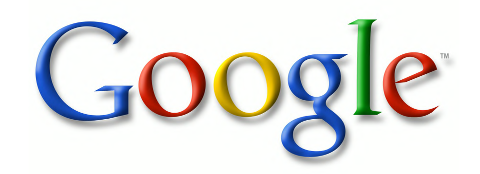
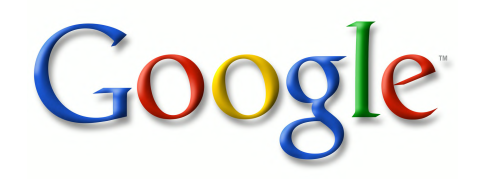
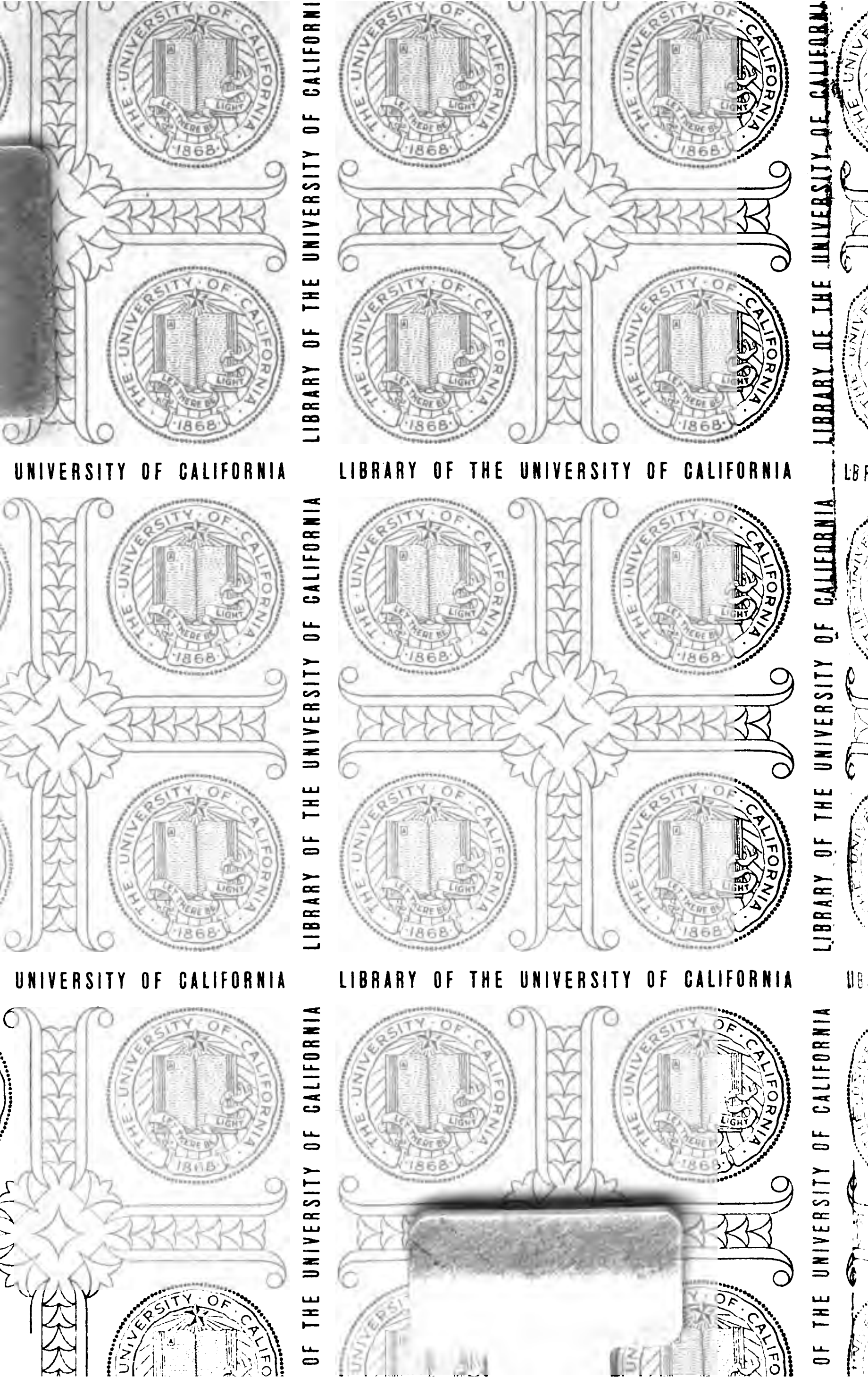
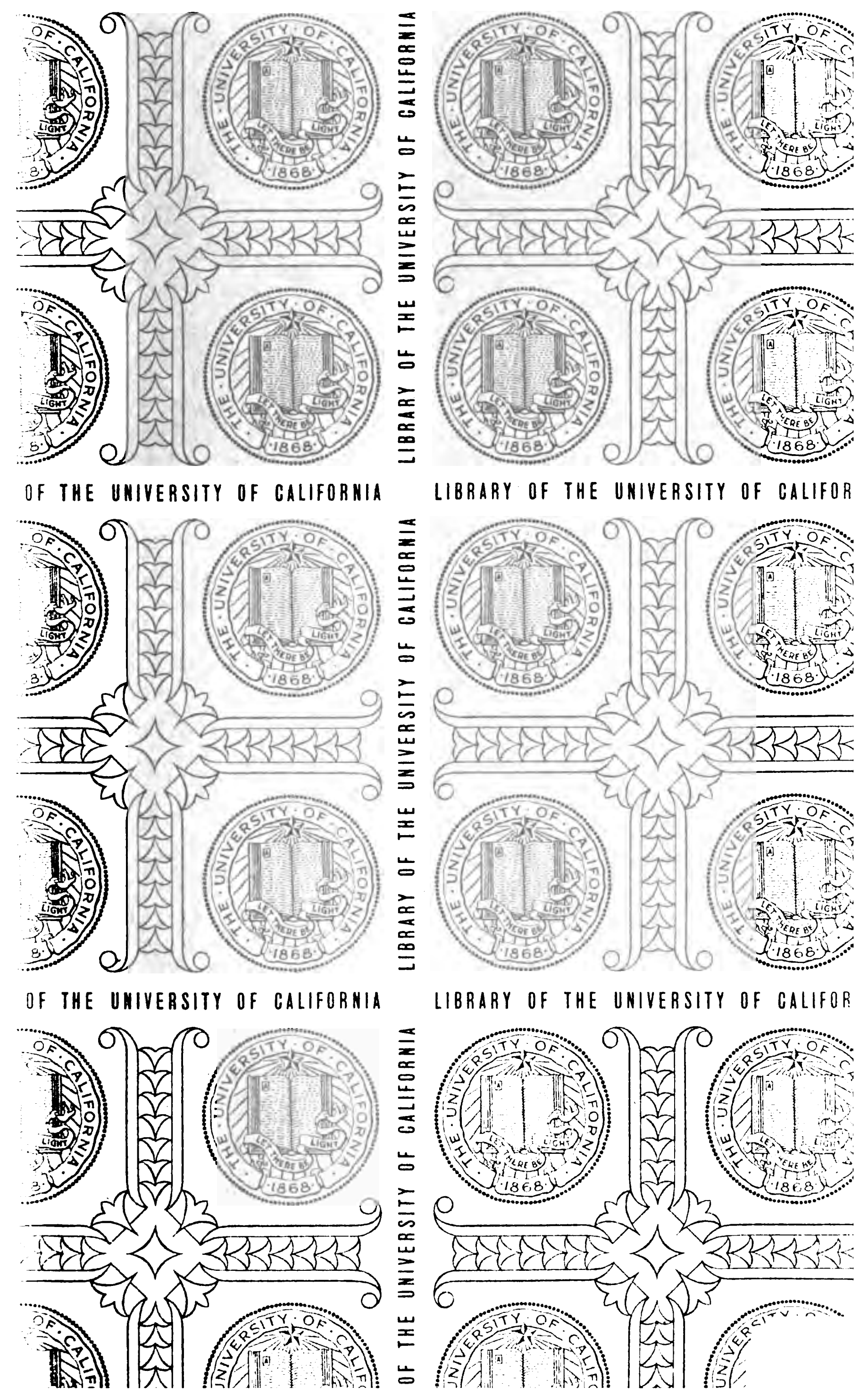

Google




UNIVERSITY OF CALIFORNIA
LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA
THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA
LET THERE BE LIGHT
1868


OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA
LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFOR
LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA
THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA
LET THERE BE LIGHT
1868

THÉORIE MÉCANIQUE

DE

LA CHALEUR,

AVEC SES

APPLICATIONS AUX MACHINES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

THÉORIE MÉCANIQUE

DE

LA CHALEUR,

AVEC SES

APPLICATIONS AUX MACHINES,

PAR LE Dr G. ZEUNER,

PROFESSEUR DE MÉCANIQUE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE ZURICH.

2e ÉDITION, ENTIÈREMENT REFONDUE,

AVEC 87 FIGURES DANS LE TEXTE ET DE NOMBREUX TABLEAUX.

OUVRAGE TRADUIT DE L'ALLEMAND

PAR

MAURICE ARNTHAL,

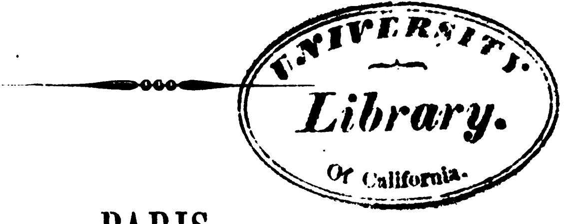
ANCIEN ÉLÈVE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

ACHILLE CAZIN,

DOCTEUR ÈS SCIENCES,

PROFESSEUR DE PHYSIQUE AU LYCÉE BONAPARTE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1869

PRÉFACE DES TRADUCTEURS.

L'Ouvrage que nous offrons aux lecteurs français diffère essentiellement de ceux qui ont été publiés en France sur la *Théorie mécanique de la chaleur*. L'Auteur a voulu écrire un Traité destiné spécialement aux Ingénieurs, comme il le dit lui-même dans sa Préface. Ce Traité embrasse les diverses parties de la Mécanique appliquée qui ont quelque rapport avec la chaleur. L'immense progrès accompli depuis quelques années dans nos connaissances sur les phénomènes calorifiques imposait en effet une révision complète de la Mécanique, principalement pour ce qui concerne la théorie des machines à feu. M. G. Zeuner est entré depuis plusieurs années dans la voie nouvelle tracée par MM. Mayer, Joule, Clausius, Rankine. Auteur de plusieurs Mémoires importants sur diverses questions de Thermodynamique, il a contribué par ses recherches personnelles à l'édification d'une théorie qui sera certainement l'œuvre capitale de la Physique moderne, et l'exposition qui est l'objet de cet Ouvrage, comprenant les principes fondamentaux et les applications de la Thermodynamique, est remarquable par une foule d'aperçus nouveaux. L'Ouvrage contient une théorie nouvelle de la machine à vapeur, que l'Auteur établit à l'aide de

formules très-simples, dont il discute l'approximation avec beaucoup de soin, et un grand nombre de tableaux où sont rassemblées toutes les données que nous possédons aujourd'hui sur les vapeurs, en appliquant les formules de la Thermodynamique aux expériences des Physiciens, et notamment à celles de M. Regnault. M. Zeuner dit avec une grande modestie dans sa Préface : « Je ne prétends pas que les Physiciens se déclarent satisfaits de toutes les parties de mon Ouvrage, j'espère cependant que les Ingénieurs ne seront pas seuls à le considérer comme utile pour une première étude. » L'aspect seul des tableaux suffit pour justifier l'espoir de l'Auteur; ils peuvent servir de point de départ pour de nombreuses recherches de Physique pure, et ils offrent le moyen le plus commode de tirer, des belles expériences de M. Regnault, tout le parti possible. Ces tableaux ont été calculés à l'aide de l'arithmomètre de M. Thomas; aussi les nombres contiennent-ils un plus grand nombre de décimales que ne l'exigent les calculs ordinaires.

Les recherches de Clapeyron, Clausius, Rankine, W. et J. Thomson, Joule, Hirn, etc., ont naturellement leur place dans l'Ouvrage. M. Zeuner a cherché à simplifier le plus possible l'exposition des théorèmes; mais il a toujours cité avec une attention scrupuleuse les noms des Auteurs auxquels on doit la découverte de nouvelles propositions. Ajoutons que l'Ouvrage contient une Introduction qui fait connaître les fondateurs de la Thermodynamique et l'importance de cette théorie.

Bien que l'Auteur indique dans cette Introduction les principales hypothèses relatives à la nature de la chaleur auxquelles ont été conduits les Physiciens mo-

dernes, nous croyons utile de faire remarquer que l'exposition de la théorie mécanique de la chaleur ne repose nullement sur quelqu'une de ces hypothèses. Elle offre seulement un enchaînement rationnel de faits observés, indépendant de toute idée préconçue sur l'essence de la chaleur.

L'Ouvrage est totalement différent de celui que M. Zeuner a publié en 1859, et qui a été traduit par M. G.-A. Hirn dans la première édition de son *Exposition analytique et expérimentale de la Théorie mécanique de la chaleur*. Nous avons ajouté à l'édition allemande, avec l'assentiment de l'Auteur, quelques Notes concernant des travaux postérieurs à la publication du texte allemand. Nous signalerons particulièrement une Note importante relative aux dernières recherches de M. Zeuner sur les propriétés de la vapeur d'eau surchauffée.

Avril 1869.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE SECTION.

ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE MÉCANIQUE DE LA CHALEUR.

DEUXIÈME SECTION.

RECHERCHES SUR LES GAZ PERMANENTS.

TROISIÈME SECTION.

DES VAPEURS.

CHAPITRE PREMIER.

DES VAPEURS SATURÉES.

CHAPITRE II.

DES VAPEURS SURCHAUFFÉES.

CHAPITRE III.

THÉORIE NOUVELLE DES MACHINES A VAPEUR.

APPENDICE.

DES CORPS SOLIDES ET LIQUIDES.

TABLES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

THÉORIE MÉCANIQUE

DE

LA CHALEUR,

AVEC SES

APPLICATIONS AUX MACHINES.



INTRODUCTION.

La connaissance des propriétés de la lumière a fait naître l'hypothèse, généralement adoptée aujourd'hui, d'une matière élastique extrêmement ténue, appelée *éther*, qui pénètre tous les corps, et dont les particules possèdent un mouvement oscillatoire.

De même qu'un corps sonore communique ses vibrations à l'air ambiant et donne naissance à des ondes qui, se propageant dans toutes les directions et pénétrant dans l'oreille, produisent, dans certaines circonstances, la sensation du son, de même un corps lumineux excite dans l'éther des vibrations qui, en arrivant à l'œil, font naître, dans certaines circonstances, la sensation de la lumière.

Dans le premier cas, les particules de l'air, et dans le second celles de l'éther, oscillent autour de certaines positions d'équilibre, et la propagation du son ou de la lumière consiste en ce que les particules qui entourent le centre d'ébranlement entrent en vibration dans toutes les directions et commu-

niquent leur mouvement de proche en proche aux particules voisines.

Les sons diffèrent les uns des autres suivant le nombre des vibrations que les particules d'air exécutent dans un temps déterminé, dans une seconde par exemple; plus le nombre des vibrations est grand, plus le son paraît haut : mais la vitesse de la propagation est indépendante de la durée d'une vibration.

La variété des couleurs s'explique d'une manière analogue par l'inégalité du nombre des vibrations de l'éther qui sont effectuées dans un temps déterminé; ici encore, la vitesse avec laquelle les ondes lumineuses des différentes couleurs se propagent est la même pour tous les rayons.

Huyghens a le premier émis cette hypothèse (1690), que la lumière n'est pas une substance, mais qu'elle est analogue au son; qu'elle consiste dans la propagation du mouvement oscillatoire des dernières particules d'un agent intermédiaire. C'est l'hypothèse des *ondulations*. Mais la théorie des ondulations ne date en réalité que du commencement de ce siècle, depuis que les travaux de Young et de Fresnel, et les recherches mathématiques de Cauchy, Green et autres ont permis d'expliquer clairement, au moyen de cette théorie, tous les phénomènes connus, tels que la diffraction, la polarisation, les interférences et la double réfraction de la lumière : depuis cette époque, on a généralement abandonné la théorie de l'*émission*, due à Newton, d'après laquelle la lumière aurait pour agent une substance dont les particules seraient lancées avec une grande vitesse par les corps lumineux.

L'adoption de la théorie des ondulations en optique a fait bannir peu à peu les substances impondérables du domaine de la physique; et, d'après l'opinion qui se répand de plus en plus, la chaleur, l'électricité et le magnétisme seraient, comme la lumière, les manifestations du mouvement des particules de l'éther.

Cette théorie a conduit à regarder comme un mouvement la chaleur, et notamment la chaleur rayonnante.

Les belles expériences de Melloni prouvent d'une manière irréfutable que la chaleur rayonnante consiste, comme la lu-

mière, en vibrations transversales de l'éther. Les rayons calorifiques ne sont autre chose qu'une certaine espèce de rayons invisibles dont les vibrations n'ont pas la même durée que celles des rayons visibles.

Notre œil n'est plus capable d'apercevoir de pareils rayons à l'état de lumière, de même que l'oreille ne saurait entendre des sons, ou, en d'autres termes, ne saurait nous révéler des vibrations aériennes dont la durée serait trop courte.

Lorsqu'un pinceau de lumière solaire pénètre dans une chambre obscure par une petite ouverture et rencontre un prisme de verre, on sait qu'on aperçoit sur un écran blanc placé convenablement une image composée de bandes colorées; on y reconnaît les couleurs de l'arc-en-ciel qui se succèdent de la manière suivante : le rouge, l'orangé, le jaune, le vert, le bleu, l'indigo et le violet. La lumière blanche du soleil est donc composée de rayons de couleurs différentes, dont la décomposition résulte de la différence de réfrangibilité des rayons diversement colorés, qui d'ailleurs ne peuvent pas se décomposer davantage, et reproduisent la lumière blanche par leur réunion.

Les rayons rouges sont les moins déviés, les rayons violets au contraire sont les plus déviés, et les déviations différentes ont une relation déterminée avec les longueurs d'onde et avec les nombres d'oscillations exécutées dans un temps déterminé par les particules d'éther. Pour le premier rayon rouge du spectre, le nombre des vibrations est, d'après Fresnel, de 481 billions par seconde, et pour le dernier rayon violet ce nombre est de 764 billions.

L'étendue des bandes colorées du spectre n'est pas la même pour toutes; elle est la plus grande pour le violet, la plus petite pour le jaune, tandis que, d'après Frauenhofer, l'intensité de la lumière est au contraire la plus faible pour le violet; elle augmente ensuite jusqu'au jaune et diminue de nouveau jusqu'au rouge : l'intensité maxima se trouve par conséquent dans le jaune.

Un nouvel examen du spectre conduit à un résultat qui a pour nous une importance particulière; on reconnaît que la

surface sur laquelle tombe le spectre s'échauffe, mais que la distribution de cette chaleur ne se fait pas comme celle de la lumière.

Si l'on produit le spectre au moyen d'un prisme de sel gemme, qui laisse le mieux passer les rayons calorifiques, on voit que la chaleur est la plus petite dans le violet, qu'elle augmente de plus en plus jusqu'au rouge, et qu'elle n'atteint son maximum qu'au delà du rouge, pour décroître de nouveau à partir de là. La présence de la chaleur peut se constater du côté du rouge jusqu'à un point éloigné de son extrémité d'une quantité égale aux deux tiers de l'étendue du spectre visible.

Le spectre calorifique tombe par conséquent en partie sur le spectre solaire, en partie sur l'espace obscur situé au delà du rouge.

On doit conclure de là qu'outre les rayons visibles, ou rayons de lumière proprement dits, il y en a d'autres que nous ne voyons pas, mais qui se manifestent par leur action calorifique. Ces rayons, qui composent le spectre calorifique, sont moins déviés, mais présentent des longueurs d'onde plus considérables et des durées de vibrations plus grandes. La plus grande action calorifique provient par conséquent des rayons pour lesquels les particules de l'éther exécutent moins de 481 billions de vibrations par seconde.

Ajoutons que l'examen de l'espace extérieur au violet a donné des résultats non moins intéressants. Les rayons pour lesquels le nombre des vibrations de l'éther dépasse 764 billions par seconde échappent également à l'œil; ils n'en existent pas moins, et se manifestent surtout par les modifications chimiques qu'ils produisent dans certains corps.

La photographie est basée sur la propriété que possèdent les rayons lumineux de décomposer certaines combinaisons chimiques; mais un examen plus approfondi du spectre montre que le violet possède cette faculté au plus haut degré et le rouge au moindre; cependant l'action chimique maxima est produite par les rayons situés en dehors du violet, rayons que l'on appelle *ultra-violets*.

L'existence des rayons ultra-violets se manifeste encore par la *fluorescence*. Il y a certains extraits de plantes colorées qui deviennent éclatants aussitôt qu'on les place dans le prolongement du spectre au delà du violet; ce qu'on explique en supposant que ces corps sont capables de diminuer le nombre des vibrations des rayons ultra-violets qui les rencontrent, et de renvoyer par suite des rayons visibles. Ce sont ces propriétés qui ont fait donner à la partie du spectre située au delà du violet et invisible pour nous le nom de *spectre chimique* ou *spectre de fluorescence*. Il résulte de ce qui précède que le spectre visible n'est qu'une partie d'un spectre de plus grandes dimensions, et encore est-elle la plus petite. On a souvent comparé le spectre à une gamme dans laquelle on peut déterminer chaque ton par les nombres de vibrations qui correspondent aux différentes couleurs; dans cette division acoustique, la partie visible du spectre comprend à peine une octave, tandis que le spectre tout entier s'étend sur quatre octaves environ, dans l'état actuel de la science.

La plus grande partie du spectre total appartient au spectre de chaleur, et les rayons calorifiques jouissent des mêmes propriétés que les rayons visibles ou rayons lumineux; on a aussi constaté pour les premiers les phénomènes de la diffraction et des interférences, qui ne peuvent s'expliquer que par les vibrations de l'éther.

Les expériences sur la polarisation et la double réfraction des rayons calorifiques démontrent aussi que leurs vibrations sont transversales comme celles des rayons lumineux.

Si l'on veut par conséquent comprendre dans une seule dénomination les vibrations de l'éther, au moins ses vibrations transversales, on doit nécessairement les appeler *chaleur*.

Un corps qui a la propriété de pouvoir mettre en vibration l'éther qui l'entoure, et tous les corps sont dans ce cas, envoie des *rayons de chaleur;* parmi ces rayons il y en a qui affectent nos nerfs et nous échauffent, comme on dit en langage ordinaire; il y en a d'autres pour lesquels le nombre des vibrations reste compris entre les limites indiquées plus haut; ceux-là peuvent produire dans notre œil la sensation de la lu-

mière. Enfin, d'autres rayons de chaleur, pour lesquels le nombre des vibrations dépasse celui des rayons lumineux, se manifestent par leurs actions chimiques et par leur fluorescence.

Ainsi, d'après l'étude du spectre que nous avons indiquée rapidement, le rayonnement de la chaleur doit consister dans la propagation du mouvement vibratoire de l'éther qui remplit l'espace; en partant de là, on est amené naturellement à penser que la chaleur contenue dans un corps doit aussi provenir de vibrations.

Pour la constitution générale des corps, c'est l'hypothèse faite par Ampère, Poisson et Cauchy qui est aujourd'hui la plus répandue : on considère les corps comme composés de particules invariables, séparées les unes des autres par des espaces relativement très-grands, et appelées *atomes*. Les atomes sont tellement petits, qu'il peut y en avoir un très-grand nombre dans une quantité de matière qui échapperait à nos sens, et il y a autant d'espèces différentes d'atomes qu'il y a de *corps simples* en chimie.

Plusieurs atomes de même espèce ou d'espèces différentes qui s'attirent entre eux peuvent se réunir en un groupe que l'on appelle une *molécule;* c'est de cette manière que sont constitués les corps appelés en chimie *corps composés*. En admettant que les atomes *de même espèce* peuvent se grouper différemment, on s'explique, d'après M. Clausius (*), comment certains corps de même composition chimique ont des propriétés physiques différentes.

Les espaces intermoléculaires sont remplis d'éther; les atomes d'éther, dont les dimensions sont très-petites relativement à leurs distances respectives, et relativement aux atomes des corps, se *repoussent* mutuellement et sont au contraire *attirés* par les atomes des corps.

Sous l'influence de ces actions, l'éther doit former une sorte d'atmosphère qui entoure les molécules et les atomes.

(*) Clausius, *Sur la nature de l'ozone* (*Ueber die Natur des Ozons*), *Annales de Pogendorff*, t. CIII, p. 644.

Ces atmosphères, dans lesquelles la densité décroît de l'intérieur à l'extérieur, constituent avec leurs noyaux un tout individuel.

M. Redtenbacher donne à l'ensemble de l'atome et de son enveloppe d'éther le nom de *dynamide*, et appelle *dynamide composée* une réunion d'atomes (molécule) avec une atmosphère d'éther commune (*).

Lorsque des rayons de chaleur tombent sur un corps ainsi constitué, les particules d'éther en vibration communiquent une partie de leur mouvement soit aux particules du corps, soit aux particules de l'éther contenu dans le corps, soit à la fois aux unes et aux autres, et accroissent le mouvement qui existait déjà dans ce corps. On dit alors que le corps a été échauffé; au toucher, il peut faire naître en nous la même sensation que les rayons de chaleur eux-mêmes.

Inversement, les mouvements intérieurs du corps peuvent se communiquer à l'éther ambiant : on dit que le corps émet de la chaleur.

On peut admettre comme certain que ces mouvements intérieurs du corps sont oscillatoires, si toutefois on adopte l'hypothèse sur la constitution des corps et la nature de la chaleur qui, comme nous venons de le dire, est la plus répandue.

Les opinions ne diffèrent que sur un point : le mouvement de la chaleur est-il dû au mouvement des atomes, c'est-à-dire des particules matérielles du corps, ou bien à celui des particules de l'éther qui s'y trouve renfermé?

M. Redtenbacher admet que le mouvement calorifique consiste dans un certain mouvement radial des enveloppes éthérées qui entourent les atomes des corps ou les molécules, ces enveloppes se contractant et se dilatant alternativement. Les corps sont absolument froids lorsque ces enveloppes sont en repos; ils ont un volume déterminé, lorsqu'il y a équilibre entre les actions réciproques des *dynamides*; mais quand

(*) Redtenbacher, *Système des dynamides (Dynamidensystem), Principes fondamentaux d'une Physique mécanique;* Mannheim, 1857.

les forces répulsives prédominent, la réunion des *dynamides* a besoin d'une enveloppe solide. Ce dernier cas correspond à l'état gazeux, et le premier à l'état solide ou à l'état liquide; dans l'état liquide, les *dynamides* peuvent glisser les unes sur les autres sans changer leurs distances respectives, de sorte que le volume total reste le même.

M. Clausius a émis une autre opinion (*) : le mouvement calorifique consiste, d'après lui, dans le mouvement des molécules, c'est-à-dire des *particules matérielles* des corps, et ce mouvement n'est pas le même dans les solides, les liquides et les gaz. Dans les solides, les molécules oscillent autour de certaines positions d'équilibre, sous l'influence de forces réciproques. Outre les mouvements oscillatoires rectilignes, les molécules peuvent avoir des mouvements de rotation oscillatoires autour de leurs centres de gravité, et il peut encore y avoir des mouvements dans leurs parties constituantes, c'est-à-dire dans leurs atomes.

Dans les liquides, il y a un mouvement oscillatoire, rotatoire et translatoire; la force vive n'est pas assez grande, relativement aux attractions réciproques des molécules, pour séparer entièrement ces molécules les unes des autres; elles conservent aussi un volume limité, même quand il n'y a pas de pression extérieure.

Dans les gaz, les molécules sont entièrement sorties de leurs sphères d'attraction mutuelle; elles se meuvent en ligne droite d'après les lois ordinaires, et possèdent un mouvement de rotation; il est probable que les atomes oscillent aussi dans les molécules gazeuses.

M. Krœnig (**) a déjà démontré avant M. Clausius, au moyen de calculs très-simples, que les propriétés principales des gaz s'expliquent par les effets du mouvement de translation recti-

---

(*) CLAUSIUS, *Sur la nature du mouvement que nous appelons chaleur*, *Annales de Poggendorff*, t. C, p. 353; *Sur la nature de la chaleur comparée à la lumière et au son, Exposé populaire;* Zurich, 1857.

(**) *Principes fondamentaux d'une théorie des gaz*, *Annales de Poggendorff*, t. XCIX, p. 315.

ligne des molécules. Mais l'idée sur laquelle sont basés ces calculs, et même une partie de ceux de M. Clausius, est déjà ancienne; on trouve des notions explicites sur cette question dans les écrits de Le Sage (*).

La solution de ces questions et la connaissance de la nature du mouvement calorifique seraient, sans aucun doute, d'une très-grande importance pour le progrès de la théorie mécanique de la chaleur. Les recherches de ce genre nous conduiraient à des résultats non moins nombreux et non moins surprenants que celles qui ont été faites sur la nature de la lumière.

Il est très-intéressant de comparer dans leur développement la théorie des ondulations et la théorie mécanique de la chaleur. Dans la théorie de la lumière, on est parti d'une espèce particulière de mouvement de l'éther; on a supposé *à priori* que ses particules décrivaient certaines trajectoires autour de leurs positions d'équilibre, sous l'influence de forces attractives directement proportionnelles à leurs distances à ces positions, et cette hypothèse très-simple sur la nature du mouvement lumineux a conduit à des découvertes qui peuvent compter parmi les plus belles des sciences naturelles. La marche suivie dans les recherches sur la chaleur, depuis que l'on a cessé de supposer que la chaleur est une substance, a été tout autre. Parmi les travaux sur ce sujet, nous n'en trouvons qu'un très-petit nombre qui partent de l'hypothèse d'une espèce particulière de mouvement calorifique, et ces recherches ne concernent que les gaz.

On fait abstraction, en général, dans les développements mathématiques, de toute hypothèse sur la nature du mouvement calorifique; c'est ce que nous ferons également, dans ce Traité.

(*) Deux *Traités de Physique mécanique*, publiés par Pierre Prévost, Genève et Paris, 1818. La première partie contient les travaux de Le Sage dans lesquels cet auteur exprime sur les gaz des opinions semblables à celles auxquelles a de nouveau conduit, dans ces derniers temps, la théorie mécanique de la chaleur. Le Sage cite plusieurs auteurs qui ont émis des idées analogues avant lui; on les rencontre formellement énoncées dans les écrits de Daniel Bernoulli.

Si cependant on fait allusion de temps en temps à la constitution probable des corps et à la nature de leur mouvement, on n'aura recours à ce moyen que pour rendre les raisonnements plus intelligibles. On peut dire à cause de cela que la théorie mécanique de la chaleur est basée sur des principes plus simples que la théorie de la lumière.

Dans la nouvelle théorie de la chaleur, on suppose d'abord simplement que la chaleur *sensible* d'un corps consiste en un mouvement moléculaire. L'échauffement ou le refroidissement d'un corps provient d'un accroissement ou d'une diminution de ce mouvement. Le mouvement moléculaire d'un corps peut s'accroître si le corps est exposé à des rayons calorifiques d'une certaine intensité, ou s'il se trouve en contact avec un autre corps dans lequel le mouvement est plus intense; il se trouve alors visiblement échauffé; il se refroidit au contraire quand il cède du mouvement à d'autres corps ou à l'éther qui l'entoure.

L'intensité du mouvement d'un point matériel dont la masse et la vitesse sont déterminées se mesure à un moment donné par sa force vive ou par le travail capable d'imprimer cette vitesse au point matériel pris au repos, ou bien encore, ce qui est la même chose, par le travail qui est produit lorsque le point animé de cette vitesse rentre au repos.

Concevons maintenant le corps formé d'une réunion de points matériels, atomes du corps et de l'éther, qui agissent les uns sur les autres et qui possèdent un certain mouvement d'oscillation et de rotation : à un moment donné, il y aura toujours dans ce système un certain *travail mécanique emmagasiné*, de quelque manière que les parties intégrantes du corps soient d'ailleurs disposées, et quelle que soit la vitesse de chaque point. La *force vive totale* du système peut être évaluée rigoureusement; elle est la demi-somme des produits des masses de tous les points par les carrés de leurs vitesses.

L'accroissement ou la diminution du mouvement moléculaire d'un corps consiste donc en un accroissement ou une diminution de la somme des forces vives de toutes ses particules.

Si nous appelons *travail d'oscillation* ce travail emmagasiné dans le corps, nous pouvons conclure de ce qui précède qu'il existe une certaine relation entre la chaleur sensible d'un corps et ce travail d'oscillation, et il semble dès l'abord que l'échauffement ou le refroidissement *sensible* d'un corps consiste uniquement dans l'accroissement ou la diminution du travail d'oscillation. Il ne résulte cependant pas de là que le travail d'oscillation doive augmenter *toutes les fois* que l'on fait arriver de la chaleur sur un corps; on conçoit que le contraire puisse avoir lieu sans qu'on ait besoin d'en chercher la preuve dans les faits connus.

Lorsqu'un système de points matériels agissant les uns sur les autres et animés d'un mouvement oscillatoire exerce une action quelconque sur un autre système, non-seulement le travail d'oscillation change de grandeur, mais encore les positions moyennes des points matériels oscillants peuvent changer. Avec de tels changements, opérés par des forces quelconques, ou survenus parce que certaines résistances ont dû être vaincues, il y a eu du travail gagné ou dépensé. Les forces dont il est ici question sont de deux sortes : il y a à distinguer celles qui font agir les points matériels des corps les uns sur les autres, forces attractives ou répulsives, et celles qui proviennent de l'action du second système sur le premier; les dernières forces se manifestent en général par des pressions exercées sur toute la surface du corps.

Le *travail total* gagné ou dépensé par suite *du changement de disposition des particules du corps* ou du système de points matériels sera appelé, pour abréger, le *travail de disgrégation* (*).

On peut admettre que tout changement d'état d'un corps

(*) Le mot *disgrégation* est dû à M. Clausius, qui désigne ainsi le degré de division du corps; il y a *changement de disgrégation* quand il se fait dans la disposition des particules un changement tel qu'on l'a indiqué dans le texte.

Voyez le *Mémoire sur l'application du principe de l'équivalence des transformations au travail intérieur*, *Annales de Poggendorff*, 1862, t. CXVI, et encore Clausius, *Mémoires sur la théorie mécanique de la chaleur* (Brunswick, 1864, VIe Mémoire), traduits par M. Folie.

est accompagné d'un gain ou d'une dépense de travail d'oscillation, ou bien de travail de disgrégation, ou bien des deux à la fois, quelles que soient d'ailleurs les influences qui ont amené ce changement.

Si l'on examine de plus près les changements que présente un corps auquel on fournit ou on enlève de la chaleur, on constate en général un changement de volume, pendant lequel il a fallu le plus souvent vaincre des forces extérieures, des pressions. Nous concluons de là que la chaleur fournie à un corps détermine en général un changement dans la disposition de ses parties intégrantes, et que, par conséquent, il y a dépense ou gain de travail de disgrégation : il existe sans aucun doute une certaine relation entre la quantité de chaleur et le travail de disgrégation. Comme ces quantités sont aussi liées à la variation du travail d'oscillation qui a lieu en même temps, on se demande quelles sont les relations qui existent entre ces grandeurs.

Pour les découvrir, on fait l'hypothèse suivante dans la théorie mécanique de la chaleur :

La quantité de chaleur que l'on fournit ou que l'on enlève à un corps est directement proportionnelle à la somme des changements qui ont lieu à la fois dans le travail de disgrégation et dans le travail d'oscillation.

C'est cette hypothèse qui sert de point de départ à nos recherches, et, avant de l'accepter comme base de nos développements mathématiques, nous devons examiner quel est son degré de probabilité.

D'après ce qui précède, nous pouvons mesurer une quantité de chaleur par le travail qu'elle a effectué, et énoncer notre hypothèse plus simplement en disant :

Chaleur et travail sont des quantités équivalentes.

La chaleur absorbée par un corps équivaut à un certain travail gagné. L'absorption de la chaleur consiste en un accroissement, et le dégagement de la chaleur en une diminution des travaux d'oscillation et de disgrégation. Si cette hypo-

thèse est exacte, on doit pouvoir affirmer qu'il est possible de produire *directement* dans un corps, en *dépensant* du travail par compression, etc., des changements semblables à ceux que l'on obtient en lui fournissant de la chaleur; et que réciproquement le corps peut, en *produisant* du travail quand il se dilate en surmontant une pression extérieure, subir une transformation intérieure semblable à celle que nous observons lorsqu'il émet de la chaleur ou qu'il en transmet à d'autres corps.

Il faut établir encore que, si le travail de disgrégation est nul ou inappréciable, la chaleur ou le travail absorbé ne donne lieu qu'à un accroissement du travail d'oscillation, c'est-à-dire à une augmentation de la chaleur sensible (élévation de la température), tandis que, dans le cas général, cette chaleur ou ce travail est employé à accroître le travail d'oscillation et à changer la disposition des particules du corps.

Il faut également admettre que dans certaines circonstances la chaleur sensible reste constante, et que par suite toute la chaleur absorbée par le corps est employée au changement de la disposition de ses particules.

Toutes ces conséquences de notre hypothèse sont confirmées par l'expérience; ce sont justement les phénomènes qui s'y rapportent et sur lesquels nous allons insister tout à l'heure qui ont fait admettre l'équivalence de la chaleur et du travail.

C'est un fait bien connu qu'il y a une élévation de température, souvent très-considérable, toutes les fois qu'il y a une perte de travail occasionnée soit par le frottement, soit par le choc de deux corps, soit, en général, par leur action réciproque.

Le comte Rumfort (*) fut le premier (1798) qui comprit le sens de ces phénomènes et qui en tira cette conséquence, que l'on peut produire de la chaleur par un travail mécanique; il

---

(*) *Phil. Trans. abridged;* t. XVIII : *An inquiry concerning the source of heat excited by friction.*

chercha aussi à trouver une relation entre le travail dépensé et la quantité de chaleur produite.

Il compara le travail employé au forage d'un canon à l'élévation de sa température, qu'il calcula d'après l'élévation de la température de l'eau qui entourait le canon. Cette expérience ne donna pas un résultat exact, parce que l'on ne tint pas compte des pertes de chaleur, et parce que sans doute il n'y eut qu'une partie du travail employée à accroître le travail d'oscillation, la chaleur sensible, tandis que le reste servit comme travail de disgrégation, pour séparer du canon les parcelles métalliques; cette dernière partie n'aurait d'ailleurs pas pu être déterminée directement.

Humphry Davy (*) adopta l'opinion de Rumfort, et chercha à la justifier par d'autres expériences. Il démontra que deux morceaux de glace que l'on frotte l'un contre l'autre à la température de zéro, sous le récipient de la machine pneumatique, finissent par fondre, et il en conclut que le mouvement est la cause de la chaleur produite, chaleur qui se manifeste ici par la fusion de la glace.

Le grand mérite cependant d'avoir énoncé pour la première fois d'une manière précise le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail appartient à un savant allemand, le D[r] J.-R. Mayer, de Heilbronn. Son traité, *Remarques sur les forces de la nature inanimée* (**), qui a paru en 1842, contient en quelques pages les théorèmes les plus intéressants.

Déjà, à cette époque, M. Mayer traita la question avec une grande clarté; il montra que l'on peut élever la température de l'eau contenue dans un vase en l'agitant (en dépensant du travail), et il en conclut que l'on doit pouvoir convertir de la glace en eau en la comprimant fortement. Cette prévision fut confirmée plus tard par les expériences de M. Mousson (***).

(*) *Researches on heat, light and respiration* in *D[r] Boddoes West Country Contributions*. Voyez Joule, *Phil. Trans.*, 1850.

(**) *Annales de MM. Wohler et Liebig*, cahier du mois de mai 1842.

(***) Mousson, *Quelques faits concernant la fusion de la glace et la congélation de l'eau*, *Annales de Poggendorff*, t. CV.

A la fin de son traité, M. Mayer dit catégoriquement : *Il faut que nous déterminions la hauteur à laquelle on doit élever un certain poids, pour que le travail qu'il peut produire en tombant soit équivalent à l'échauffement d'un égal poids d'eau de zéro à 1 degré centigrade.*

Il évalue alors cette hauteur à 365 mètres.

C'est donc M. Mayer qui a soutenu *le premier* que la chaleur créée par l'accomplissement *d'un certain* travail est *proportionnelle* au travail dépensé, que l'une de ces quantités peut être mesurée directement par l'autre; avant lui, on savait et on admettait seulement qu'il existe en général une certaine relation entre la chaleur et le travail.

Mais avant d'aborder la question par le calcul, il fallait établir cette loi de proportionnalité par des expériences précises.

Les quantités de chaleur se mesurent, comme on sait, en prenant pour unité la quantité de chaleur nécessaire pour élever de zéro à 1 degré centigrade une unité de poids d'eau, un kilogramme. S'il y a équivalence entre la chaleur et le travail, on peut, comme M. Mayer l'a énoncé le premier, mesurer les quantités de chaleur de la même manière que le travail; il suffit qu'on sache quelle quantité de chaleur, exprimée en unités de chaleur ou *calories*, correspond à l'unité de travail, à un *kilogrammètre*, ou quel travail correspond à une unité de chaleur.

Cette question a été résolue d'une manière rigoureuse par les expériences aussi belles que variées du physicien anglais M. Joule.

Ces expériences prouvent non-seulement que l'on peut produire de la chaleur en dépensant du travail, mais encore que la chaleur créée est toujours directement proportionnelle au travail dépensé.

Des expériences variées conduisirent sensiblement à ce résultat, qu'un travail de 424 kilogrammètres produit une quantité de chaleur égale à une calorie.

Le travail de 424 kilogrammètres s'appelle *équivalent mécanique de l'unité de chaleur*, ou plus simplement, *équiva-*

lent mécanique de la chaleur; et la quantité de chaleur qui correspond à l'unité de travail, à un kilogrammètre, s'appelle *équivalent calorifique de l'unité de travail.*

La valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur trouvée par M. Joule a été confirmée plus tard par d'autres expériences.

C'est donc sans contredit à M. Joule que revient l'honneur d'avoir le premier déterminé rigoureusement la valeur de cette importante quantité; mais, d'un autre côté, il est certain que M. Mayer a appelé le premier l'attention sur son existence. Si M. Mayer a assigné une valeur trop petite à cette constante, comme le montre le passage de son traité cité plus haut (il détermine cette valeur par l'observation de la quantité de chaleur dégagée dans la compression d'un gaz), cela tient à ce que certaines grandeurs, qui entrent dans ses calculs, n'étaient pas déterminées à cette époque d'une manière assez exacte.

Les expériences faites en vue de la détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur, dont nous ne ferons qu'un exposé rapide, exigent un très-grand soin; il s'agit de mesurer exactement le travail qui est réellement dépensé pour la production de la chaleur, et de déterminer ensuite la quantité de chaleur créée.

On atteint le plus sûrement ce double but en choisissant comme corps qui doivent recevoir la chaleur produite *ceux pour lesquels il n'y a pas de changement de disposition intérieure pendant la durée de l'expérience.*

Il faut autant que possible faire servir tout le travail dépensé à l'accroissement du travail d'oscillation, c'est-à-dire de la chaleur sensible, et éviter qu'une partie appréciable du travail soit employée au travail de disgrégation, qui se soustrait à l'observation directe.

Les corps qui remplissent ces conditions à des températures peu élevées et pour de faibles différences de température sont les liquides très-fluides, comme l'eau et le mercure; ce sont aussi les liquides que M. Joule a employés. Pour produire la chaleur il se servit d'abord du travail perdu dans le frottement.

Dans une première série d'expériences (*), il prit un vase rempli de mercure dans lequel se trouvaient deux plaques de fonte, dont l'une était fixe et dont l'autre était pressée contre la première au moyen d'un levier chargé de poids; on imprimait à cette seconde plaque un mouvement de rotation par la descente d'un poids. La valeur du poids et la hauteur de sa chute donnaient le travail nécessaire pour vaincre le frottement, à la condition évidemment de faire subir certaines corrections aux nombres directement observés.

On déterminait la quantité de chaleur produite par le frottement au moyen de l'élévation de température du mercure, en tenant compte de la quantité de chaleur perdue par le rayonnement.

Toutes les expériences, faites dans des circonstances diverses, donnèrent la même relation entre le travail dépensé et la chaleur créée. On trouva pour l'équivalent mécanique de la chaleur une valeur moyenne de $425^{kgm},18$

Dans une autre série d'expériences on employa le frottement entre les solides et les liquides.

On prit un vase rempli d'eau ou de mercure, dans lequel il y avait un moulinet mis en mouvement par la descente d'un poids. Pour faciliter la transmission du travail au liquide, et pour transformer ce travail en chaleur, on avait garni le vase de cloisons découpées de telle sorte que les ouvertures fussent presque hermétiquement fermées au moment du passage des ailettes.

Ces expériences donnèrent le même résultat que les premières. M. Joule trouva ainsi pour l'équivalent mécanique de la chaleur :

Avec le laiton dans l'eau.............	423,92
Avec le fer dans le mercure	424,68

Il conclut de toutes ses expériences que la valeur la plus probable de l'équivalent mécanique de la chaleur est de $423^{kgm},55$; nous prendrons dans la suite le nombre 424 kilogrammètres.

Dans une autre expérience, M. Joule comprima de l'air at-

(*) JOULE, *Phil. Transactions*, 1850, p. 1.

mosphérique jusqu'à 22 atmosphères dans un ballon de cuivre placé dans un calorimètre à eau. L'élévation de température de l'eau du calorimètre donnait la quantité de chaleur créée, tandis que le travail transformé en chaleur était celui que consommait le mouvement de la pompe de compression.

Ces expériences, qui, il est vrai, n'étaient pas aussi concluantes que les précédentes, parce que les pertes de travail dans la pompe et principalement le frottement du piston sont difficiles à évaluer, donnèrent le chiffre de $437^{kgm},77$ pour l'équivalent mécanique de la chaleur.

D'autres expériences ont été entreprises depuis celles de M. Joule. Une des plus ingénieuses est due à M. Hirn (*). Cette expérience est particulièrement intéressante, parce que M. Hirn transforme en chaleur le travail perdu par le choc de corps solides, et parce que, dans ces circonstances, une partie du travail employé se transforme en travail de disgrégation, que M. Hirn évalue très-habilement.

Voici comment fut faite l'expérience : on avait formé deux pendules au moyen de deux blocs prismatiques très-lourds, l'un en bois, l'autre en fer; les axes des deux prismes étaient situés sur une même ligne droite, et les deux faces les plus voisines se touchaient dans toute leur étendue; la face du bloc en bois était recouverte d'une plaque en fer, contre laquelle on pouvait maintenir un petit cylindre creux en plomb.

On écartait le bloc en fer de sa position d'équilibre d'un certain angle, et on le laissait retomber sur le cylindre de plomb, ce qui faisait écarter en sens contraire le bloc de bois. Par suite du choc, le cylindre de plomb se trouvait comprimé et échauffé; pour mesurer la chaleur ainsi créée, on remplissait immédiatement le cylindre d'eau; la température initiale et le poids de cette eau étant déterminés à l'avance, on mesurait l'élévation de sa température et on faisait le calcul avec les corrections nécessaires.

Le travail effectué pendant la descente du bloc de fer était

(*) HIRN, *Théorie mécanique de la chaleur;* 2e édit., Paris, 1865, p. 58.

déterminé directement au moyen de son poids et de la hauteur de chute; mais, comme tout ce travail n'était pas employé pour produire de la chaleur, il fallait chercher la quantité de travail qui était perdue par le choc, ou plutôt celle qui restait disponible dans les deux blocs. A cet effet, M. Hirn observait les hauteurs auxquelles les deux blocs s'élevaient après le choc d'un côté et de l'autre. Connaissant ces hauteurs ainsi que les poids respectifs des blocs, on en déduit facilement le travail conservé par eux après le choc, et par suite le travail transmis au cylindre de plomb et transformé en chaleur.

M. Hirn trouva, par ce procédé, 425 kilogrammètres pour l'équivalent mécanique de la chaleur.

Ces expériences, et d'autres qui ont été faites par divers savants, démontrent que l'on peut produire dans un corps, au moyen du travail mécanique, les mêmes phénomènes qu'au moyen d'une quantité de chaleur qu'on lui fournirait; on doit se demander si un corps qui produit du travail en se détendant et surmontant une pression extérieure, subit les mêmes changements qu'en perdant de la chaleur par rayonnement ou par conductibilité, et s'il y a toujours la même relation entre le travail produit et la diminution de la chaleur contenue dans le corps.

Quoique l'on doive répondre affirmativement à cette question d'après tout ce qui précède, il est bon de remarquer qu'on a aussi fait des expériences qui confirment cette conclusion. Il faut d'abord rappeler ce fait bien connu, que la température d'un gaz s'abaisse lorsqu'il se détend en surmontant une pression et en produisant un travail; il y a donc disparition de chaleur, et la quantité de chaleur disparue équivaut au travail produit. On n'a pas fait d'observations directes sur ce point; M. Hirn (*) a cependant prouvé ce fait pour la vapeur d'eau.

M. Hirn observa la quantité d'eau vaporisée pendant un

(*) Hirn, *Recherches sur l'équivalent mécanique de la chaleur, présentées à la Société de Physique de Berlin*; Paris, 1858.

temps déterminé dans la chaudière d'une grande machine à vapeur et envoyée dans le cylindre. Connaissant la tension et la température de cette vapeur, il put déterminer la chaleur qu'elle contenait en se servant des expériences de M. Regnault. La vapeur étant condensée à sa sortie du cylindre, il mesura la quantité et la température de l'eau injectée et celles de la vapeur condensée, ce qui permit de calculer la chaleur que possédait encore la vapeur à son entrée dans le condenseur.

Il faut, d'après la théorie mécanique de la chaleur, c'est-à-dire d'après les hypothèses développées plus haut, que la chaleur contenue dans la vapeur au moment de sa sortie du cylindre soit *moindre* que la quantité de chaleur qu'elle possédait à son entrée, et cette différence doit être proportionnelle au travail produit par la vapeur; ce dernier travail fut mesuré au frein. M. Hirn a en effet constaté cette différence, et M. Clausius (*) a même démontré que la quantité de chaleur perdue dans la machine à vapeur de M. Hirn était avec le travail produit dans la rapport indiqué par la théorie.

Dans ces expériences, le travail produit était de 399 à 427 kilogrammètres pour chaque unité de chaleur perdue; la moyenne est de 413 kilogrammètres; on retrouve de cette manière un chiffre qui se rapproche de celui de M. Joule.

L'écart s'explique facilement par les difficultés que présentent des expériences faites sur une aussi grande échelle, les machines à vapeur étaient de plus de 100 chevaux-vapeur; il faut même admirer l'adresse que déploya dans ces travaux l'habile expérimentateur auquel la Mécanique appliquée doit aussi la solution d'autres questions très-importantes.

Si, pour terminer, nous résumons les résultats des recherches expérimentales dont nous venons de parler, nous pouvons admettre comme démontré le premier théorème fondamental de la théorie mécanique de la chaleur, à savoir : *La chaleur et le travail sont des quantités équivalentes*, ce qui veut dire

(*) Hirn, ouvrage cité plus haut, p. 134 (Rapport sur l'ouvrage cité, fait à la Société de Physique de Berlin, par M. le Professeur Clausius).

que l'on peut produire du travail au moyen de la chaleur, et que réciproquement on peut créer de la chaleur au moyen du travail; qu'à l'unité de chaleur perdue ou créée correspond un travail de 424 kilogrammètres produit ou dépensé, et que réciproquement à une unité de travail correspond une quantité de chaleur égale à $\frac{1}{424}$ d'unité de chaleur. On entend par unité de chaleur la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température d'un kilogramme d'eau de zéro à 1 degré centigrade.



PREMIÈRE SECTION.

ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE MÉCANIQUE DE LA CHALEUR.

I. — *Remarques préliminaires.*

Quand on étudie les changements d'état produits dans un corps auquel on enlève ou on fournit de la chaleur, on peut supposer que ce corps soit en repos ou bien qu'il soit en mouvement. Ce mouvement visible ne doit pas être confondu avec le mouvement moléculaire, que nous ne voyons pas, mais qui se manifeste à nous par une production de chaleur, et qui existe même quand le corps est en repos.

Nous supposerons d'abord que le corps soit en repos; son état est alors déterminé par son poids, son volume et la pression qu'il supporte. Pour plus de simplicité, on prendra toujours dans la suite le corps sous l'unité de poids, lorsqu'on n'indiquera pas d'autre convention; il restera alors à considérer seulement le volume et la pression pour déterminer l'état du corps. Pour ce qui concerne le volume d'un corps, nous remarquerons seulement ici que nous désignerons par v le volume de l'unité de poids ou *volume spécifique*, tandis que V sera le volume d'un corps de poids quelconque.

Mais il faut définir exactement ce que l'on entend par *pression* d'un corps. Nous admettons que le corps en question soit pressé également et normalement en tous les points de sa surface, et nous désignerons par p la pression sur l'unité de surface ou *pression spécifique*.

On peut supposer, pour plus de clarté, que le corps soit entouré d'une enveloppe qui presse sa surface. A l'état de repos le corps exerce contre cette enveloppe une pression égale :

de là l'expression abrégée de *pression du corps*. Pour les gaz, ce sont les parois du vase qui forment l'enveloppe en question; pour les liquides, les parois constituent seulement une partie de l'enveloppe, et la surface supérieure peut être pressée par un gaz ou une vapeur. Les solides sont ordinairement soumis à la pression atmosphérique; il vaut mieux cependant imaginer aussi dans ce cas que la surface soit pressée par une enveloppe.

Supposons maintenant que l'on fournisse à l'unité de poids d'un corps une quantité de chaleur infiniment petite dQ évaluée en unités de chaleur; l'état du corps subira alors les changements suivants :

1° Il y a accroissement du mouvement moléculaire; soit dW l'accroissement de la force vive, c'est-à-dire celui du travail emmagasiné dans le corps par suite du mouvement oscillatoire de ses particules, quantité exprimée en unités de travail.

2° Il y a changement des positions moyennes des particules; mais comme les amplitudes d'oscillation sont considérées comme infiniment petites relativement aux distances des centres d'oscillation des atomes et des molécules, on peut dire qu'il y a changement de position des atomes et des molécules mêmes; ce changement de position correspond à un travail, puisque les particules agissent les unes sur les autres. Soit dJ sa valeur en unités de travail.

3° Il y a généralement changement de volume du corps. Quand le corps se dilate, il doit surmonter la pression extérieure; soit dL le travail employé à cet effet.

Ces trois quantités de travail sont en relation simple avec la quantité de chaleur dQ, d'après le théorème fondamental de la théorie mécanique de la chaleur qui a été établi dans l'Introduction. Tout le travail produit par la chaleur dépensée dQ est $dW + dJ + dL$; comme à l'unité de travail correspond une quantité de chaleur de $\frac{1}{424}$ de calorie (équivalent calorifique du travail), que nous désignerons par A, on a, pour la quantité de chaleur qui équivaut au travail indiqué,

$A(dW + dJ + dL)$, ce qui donne finalement l'équation

$$dQ = A(dW + dJ + dL). \tag{1}$$

Il est évident que quelques-uns des termes du second membre de cette équation peuvent être nuls ou négatifs; en effet, les trois changements mentionnés n'ont pas toujours lieu toutes les fois que le corps reçoit de la chaleur. Ainsi il peut arriver que le travail d'oscillation, c'est-à-dire la *chaleur sensible*, reste stationnaire, alors $dW = 0$; c'est ce qui a lieu pendant la fusion d'un solide et l'évaporation d'un liquide sous une pression constante; on peut avoir $dL = 0$, alors il n'y a pas de changement de volume, ou bien $dL < 0$, et alors il y a diminution du volume, comme cela arrive quand on chauffe l'eau sous la pression atmosphérique entre zéro et 4 degrés centigrades.

Enfin dQ est négatif quand le corps cède de la chaleur.

L'équation (1) n'est vraie que pour un corps en repos. Dans le cas général où il y a mouvement visible, ou mieux *mouvement extérieur*, et où, par suite, les particules du corps se meuvent pendant l'introduction de la chaleur, cette équation est incomplète; on ne peut pas l'employer sous cette forme, s'il y a à la fois introduction de chaleur et changement dans la vitesse du mouvement extérieur.

II. — *Du travail intérieur.*

On peut simplifier l'équation (1) en posant avec M. Clausius $dJ + dL = dH$; il vient alors

$$dQ = A(dW + dH).$$

Dans cette équation, dW représente, comme on sait, l'accroissement du travail d'oscillation, et, par suite, $A\,dW$, d'après les hypothèses faites dans l'Introduction, est l'augmentation de la chaleur sensible, ou, comme on dit encore, l'accroissement de la chaleur réellement contenue dans le corps. dH représente le travail employé pour faire changer la disposition

des particules du corps, ou, selon l'expression de M. Claudius (*), le travail employé pour augmenter la disgrégation. Ce travail comprend à la fois le travail correspondant au changement de position relative des particules du corps, et le travail qui correspond à l'action de la pression extérieure p quand le volume du corps change. Certaines hypothèses faites sur la loi à laquelle doivent obéir les valeurs de dW et dH ont conduit M. Clausius (ouvrage cité) à des recherches très-intéressantes que nous ne développerons pas ici, parce qu'on ne peut pas encore les considérer comme terminées.

Une autre forme de l'équation (1) a été bien plus féconde en résultats; c'est cette forme que nous emploierons toujours dans la suite. Si on pose $dW + dJ = dU$, on aura

$$dQ = A(dU + dL). \tag{2}$$

Ici dU représente à la fois l'accroissement du travail d'oscillation ou de la force vive du mouvement moléculaire, et le travail employé à vaincre les actions mutuelles des molécules pendant que la chaleur arrive au corps.

dU représente donc le travail total qui a été produit pendant l'introduction de la chaleur dans l'*intérieur* du corps.

Nous appellerons dorénavant la quantité U *travail intérieur;* dU est par conséquent l'accroissement du travail intérieur (**). La quantité U représente le travail mécanique emmagasiné dans le corps, et peut être mesurée par la quantité d'action que produirait le corps si ses particules sortaient entièrement de leurs sphères d'action réciproque et rentraient au repos.

Ce travail intérieur total U ne peut pas être mesuré directement, il est vrai, mais nos recherches ultérieures n'exigent pas la connaissance de sa valeur. Il suffit de supposer la gran-

---

(*) CLAUSIUS, VI[e] Mémoire.

(**) M. Kirchhoff appelle la quantité U *die Wirkungsfunktion,* et M. Thomson *the mechanical energy of a body in a given state.* M. Clausius considère comme travail intérieur seulement le terme dJ de l'équation (1).

L'expression *travail intérieur* est habituellement prise en France dans le sens adopté par M. Clausius (*Note des Trad.*).

deur U connue pour un certain état initial, parce que dans tous les problèmes il s'agit de trouver seulement le changement d'état du corps, c'est-à-dire de déterminer l'augmentation ou la diminution du travail intérieur.

Mais s'il était possible de déterminer le travail intérieur de l'unité de poids d'un corps, cette quantité serait évidemment une fonction du volume spécifique v et de la pression spécifique p; on pourrait donc écrire

$$U = F(p, v).$$

Le travail emmagasiné dans un corps doit évidemment être complétement déterminé par les quantités p et v, pourvu que le corps soit en repos.

Si les quantités p_1 et v_1 sont relatives à l'état initial du corps, et si l'on suppose ce corps amené par l'effet de la chaleur ou par d'autres causes à un état défini par les valeurs p_2 et v_2, le changement du travail intérieur sera

$$F(p_2, v_2) - F(p_1, v_1),$$

et ce changement serait nul si les valeurs initiales et finales de p et de v étaient égales, quelles que fussent, d'ailleurs, les valeurs intermédiaires de ces quantités.

La différentiation de U donne

$$\left(\frac{dU}{dp}\right) dp + \left(\frac{dU}{dv}\right) dv,$$

et, si l'on pose

$$\left(\frac{dU}{dp}\right) = X \quad \text{et} \quad \left(\frac{dU}{dv}\right) = Z,$$

on peut écrire

$$dU = X\,dp + Z\,dv. \tag{3}$$

Cette formule donne la variation du travail intérieur lorsque le volume v et la pression p de l'unité de poids du corps s'accroissent de dv et de dp.

L'équation (3) étant une différentielle exacte, on a, d'après

les règles du calcul différentiel,

$$(4) \qquad \left(\frac{dX}{dv}\right) = \left(\frac{dZ}{dp}\right),$$

relation dont on fera usage dans la suite.

III. — *Du travail extérieur.*

La quantité dL, qui se trouve dans le second membre de l'équation (2), désigne le travail qui correspond à l'action de la pression extérieure p quand le corps change de volume. Si l'on admet que le corps subisse une augmentation de volume pendant qu'il reçoit de la chaleur, comme cela a lieu ordinairement, du travail est dépensé pour vaincre la pression extérieure, et il est cédé aux corps extérieurs; ce travail dL a reçu de M. Clausius le nom très-juste de *travail extérieur*. Quand le corps diminue de volume, sous l'influence de la pression extérieure, dL est négatif; le travail extérieur peut être considéré comme un travail gagné par le corps, et l'accroissement du travail intérieur est dû à la fois à la chaleur reçue et au travail extérieur gagné.

On suppose qu'au commencement et à la fin de l'arrivée de la chaleur il y ait équilibre entre la pression extérieure p et la pression que le corps exerce sur son enveloppe. Lorsqu'il s'agit maintenant d'étudier le changement d'état que subit un corps quand on lui envoie de la chaleur, il faut savoir si cet équilibre persiste ou non pendant le changement. Les deux cas peuvent se présenter, et on doit les distinguer soigneusement dans toutes les recherches qui vont suivre.

Admettons d'abord, et c'est le cas le plus important, que, pendant l'introduction de la chaleur, on ait réglé par un moyen quelconque la pression extérieure p de telle sorte qu'elle soit égale à la force expansive du corps, ou mieux, puisqu'il y a en même temps changement de volume, que la différence entre la pression extérieure et la force expansive du corps soit à chaque instant infiniment petite; lorsqu'il y a dilatation,

cette différence infiniment petite est négative, tandis qu'elle est positive quand il y a contraction : mais dans les deux cas elle pourra être négligée. Dans cette hypothèse, que nous ferons du reste dans tout ce qui suit, on peut regarder la pression extérieure comme une propriété du corps même, et il y a, pendant toute la durée du changement, une relation déterminée entre le travail extérieur, le changement d'état luimême et le mode d'introduction de la chaleur. Nous ferons voir que l'on peut, dans ce cas, suivre pas à pas les modifications du corps.

Les choses se passent tout autrement quand on suppose qu'il n'y ait plus égalité entre la pression extérieure et la force expansive du corps pendant le changement même, mais que cette égalité n'ait lieu qu'au commencement et à la fin de l'opération. Jusqu'ici il n'a pas été possible de poursuivre ces sortes de transformations; dans quelques cas spéciaux seulement, auxquels nous reviendrons plus tard, certaines hypothèses sur la loi des variations de la pression extérieure, laquelle est indépendante de la force expansive du corps, ont permis de trouver l'état final du corps.

Vu l'importance de cette question, nous allons montrer sur un exemple très-simple, emprunté à la Mécanique, que l'on trouve des valeurs différentes pour la quantité de chaleur émise ou reçue, suivant que l'on se place dans l'un ou dans l'autre cas.

Imaginons deux tiges prismatiques A et B de même matière, de même section s et de même longueur l, fixées par une de leurs extrémités, et tendues par des forces appliquées à l'autre. Supposons que la force X, qui sollicite la tige A suivant son axe, ne surpasse la résistance de la tige que d'une quantité infiniment petite; si on appelle x l'allongement et E le coefficient d'élasticité de la substance, la valeur de X est, comme on sait, donnée par l'équation

$$X = \frac{x}{l} sE.$$

Le travail correspondant à un allongement dx est, par

suite,

$$\mathrm{X}\,dx = \frac{x}{l}\, s\mathrm{E}\,dx.$$

Si l'on veut que l'allongement soit λ à la fin, on aura pour le travail total L, en intégrant l'équation précédente,

$$(5) \qquad \mathrm{L} = \frac{s\mathrm{E}\lambda^2}{2l}.$$

La force totale, à la fin de l'opération, est

$$\frac{\lambda}{l}\, s\mathrm{E}.$$

Si l'on veut qu'il y ait équilibre, on peut imaginer un poids G suspendu à la tige tel, que l'on ait

$$(6) \qquad \mathrm{G} = \frac{\lambda}{l}\, s\mathrm{E}.$$

L'équation (5) donne alors, quand on y introduit le poids G,

$$(7) \qquad \mathrm{L} = \frac{\mathrm{G}\lambda}{2}.$$

Il est bien entendu qu'on suppose que la limite d'élasticité n'ait pas été dépassée; en d'autres termes, les formules précédentes ne sont applicables qu'autant qu'il y a proportionnalité entre l'allongement et la force de tension. Le travail *extérieur* donné par l'équation (7) a été gagné par la tige et converti en travail intérieur. Si maintenant on enlevait le poids et si on le remplaçait par une force variable agissant toujours suivant l'axe, et différant à chaque instant de la force de tension d'une quantité infiniment petite, la tige se raccourcirait et restituerait peu à peu aux corps extérieurs tout le travail qu'elle avaitgagné pendant l'allongement. L'opération est donc *réversible*.

Les circonstances sont tout autres quand, pendant l'allongement, il n'y a plus égalité entre la force qui agit sur la tige et la force élastique. On peut alors faire une infinité d'hypothèses sur les variations de la force extérieure; prenons le cas

très-simple, où la force extérieure reste constante pendant l'opération, et faisons l'expérience suivante.

Supposons que la tige B soit munie à son extrémité inférieure d'un crochet, et qu'un poids G se trouve immédiatement au-dessus. Soutenons le poids de sorte qu'il touche le crochet sans s'appuyer sur lui, et abandonnons-le subitement, il agira alors pour allonger la tige; étudions cette action.

Au moment où l'allongement est devenu x, la force X, avec laquelle la tige tend à se raccourcir, sera comme tout à l'heure,

$$X = \frac{x}{l} sE;$$

la force qui agit de haut en bas est donc $G - X$. Comme il s'agit ici seulement d'un problème particulier, nous négligerons la masse de la tige devant la masse M du poids G; on aura alors, pour l'accélération du mouvement du poids,

$$w = \frac{G - X}{M}.$$

Si on désigne par v la vitesse du poids au même moment, l'équation connue

$$v\,dv = w\,dx$$

donnera, en vertu des deux dernières équations,

$$Mv\,dv = G\,dx - \frac{sE}{l} x\,dx.$$

Comme $v = 0$ pour $x = 0$, c'est-à-dire au commencement de l'opération, et $v = 0$ aussi au moment du plus grand allongement que nous désignons par λ_1, l'intégration donne

$$0 = G\lambda_1 - \frac{sE}{l}\frac{\lambda_1^2}{2};$$

on a, par suite, pour l'allongement maximum,

$$\lambda_1 = 2\frac{Gl}{sE}.$$

Cet allongement est double de celui que donne l'équa-

tion (6) dans le premier cas. Le travail dépensé au moment de l'allongement maximum est

$$G\lambda_1 = 2G\lambda.$$

Mais, dans ce moment aussi, la tension de la tige est le double du poids suspendu; il n'y a donc pas équilibre, la tige se raccourcit et le poids remonte jusqu'à sa position première.

En poursuivant le problème, on voit qu'il ne peut y avoir équilibre; le poids descend et remonte, il oscille, et l'étendue totale de cette oscillation est $\lambda_1 = 2\lambda$, et on trouve, par des calculs faciles, que la durée d'une oscillation est celle d'un pendule de longueur λ.

On voit donc, et c'était là le but de cette digression, qu'au moment où l'allongement est λ, la tige se trouve dans des états bien différents, suivant qu'il s'agit de l'un ou de l'autre des cas que nous venons d'examiner.

Dans le premier cas, tout le travail extérieur a été gagné par la tige; dans le second, le travail est alternativement gagné et perdu; pendant l'allongement, le travail extérieur du poids est employé en travail intérieur, et pendant le raccourcissement ce travail intérieur redevient libre et est employé en travail extérieur pour faire monter le poids. L'expérience montre que ces oscillations ont bien réellement lieu, mais leurs amplitudes diminuent de plus en plus jusqu'à un moment où il y a enfin équilibre, et alors l'allongement permanent devient égal à celui qui correspond au premier cas. En apparence, l'état de la tige est le même dans les deux cas au moment où l'allongement est égal à x; en réalité, cela ne peut être. En effet, si l'on admet que la tige n'a pas fourni de travail aux corps extérieurs, le travail intérieur doit évidemment être plus grand dans le second cas que dans le premier ; et cela s'explique, d'après les principes de la théorie mécanique de la chaleur, par cette circonstance, que si la disposition des particules du corps peut bien être la même, néanmoins les mouvements moléculaires doivent être différents, ou, pour parler plus simplement, la chaleur sensible, la température

doit être différente à l'instant que l'on considère. Enfin, quand l'oscillation ayant cessé, la seconde tige est parvenue à un état d'équilibre, elle a subi finalement la même variation de travail intérieur que la première, et cette variation se calcule à l'aide de l'équation (7). Les deux cas se distinguent uniquement par la manière dont se fait le passage d'un état d'équilibre à l'autre.

Tout se passe dans le cas général absolument comme nous avons pu le constater sur cet exemple particulier. Si pendant l'introduction de la chaleur et le changement d'état il n'y a pas égalité entre la pression extérieure et la pression du corps, on ne peut suivre pas à pas la transformation; on peut seulement trouver l'état final du corps en supposant que l'équilibre soit alors établi, et que le travail extérieur soit connu.

Nous avons déjà dit que nous reviendrions plus tard sur quelques problèmes de ce genre. Pour établir les équations fondamentales de la théorie mécanique de la chaleur, nous supposerons que la pression extérieure p soit égale à la pression du corps ou n'en diffère que d'une quantité infiniment petite.

Dans cette hypothèse on peut exprimer plus explicitement le travail extérieur qui entre dans l'équation

$$dQ = A(dU + dL).$$

La pression p se rapporte à l'unité de surface, elle est normale et égale en tous les points. Désignons par $s_1, s_2, s_3, \ldots$ les éléments de la surface, et par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ leurs déplacements suivant la normale pour un accroissement infiniment petit du volume : les pressions élémentaires seront $s_1 p_1$, $s_2 p_2$, $s_3 p_3, \ldots$, et les travaux nécessaires pour vaincre ces pressions auront pour valeurs $ps_1 \varepsilon_1$, $ps_2 \varepsilon_2$, $ps_3 \varepsilon_3, \ldots$, attendu que ces pressions peuvent être considérées comme constantes pendant le changement de volume. D'après cela, le travail total dL sera

$$dL = (s_1 \varepsilon_1 + s_2 \varepsilon_2 + s_3 \varepsilon_3 + \ldots) p,$$

ou bien, puisque la parenthèse exprime simplement l'accrois-

sement dv du volume total v de l'unité de poids du corps,

$$(8) \qquad dL = p\,dv,$$

et, par suite, à cause de l'équation (2),

$$(9) \qquad dQ = A\,(dU + p\,dv).$$

Si on intègre cette équation, en considérant le travail intérieur comme une fonction connue de p et de v, à savoir $U = F(p, v)$, et en désignant les valeurs initiales et finales de p et de v par les données p_1, v_1, p_2, v_2, on trouve la quantité totale de chaleur Q qu'il faut fournir au corps pendant le passage d'un état à l'autre, à l'aide de l'équation

$$(10) \qquad Q = AF(p_2, v_2) - AF(p_1, v_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p\,dv.$$

Le dernier terme du deuxième membre est indéterminé; tant qu'on ne sait pas comment la pression p varie avec le volume v, l'intégrale qu'il contient ne peut être obtenue; et, par suite, l'on ne peut pas non plus déterminer la quantité totale de chaleur Q. Si l'on admet une relation connue entre p et v, on peut représenter le volume spécifique v par l'abscisse Ov (*fig.* 1), et la pression correspondante p par l'ordonnée vP d'une courbe P_1PP_2 qui donnera une image fidèle de la relation admise. L'aire terminée par cette courbe (la partie ombrée de la figure) représentera l'intégrale contenue dans

Fig. 1.

l'équation (10), c'est-à-dire le travail extérieur effectué pendant le changement d'état.

Il résulte de ce qui précède le théorème suivant :

Si en recevant ou perdant de la chaleur un corps passe d'un état à un autre, la variation du travail intérieur sera complétement déterminée au moyen de l'état initial et de l'état final.

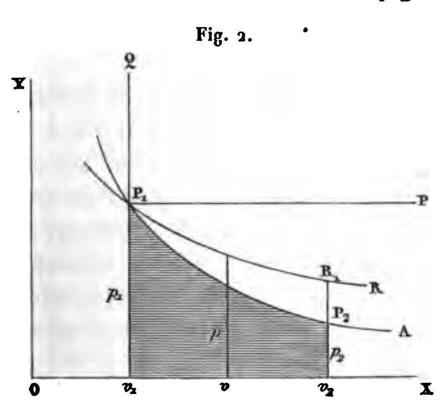
Il n'en est pas de même de la valeur du travail extérieur et de la quantité de chaleur reçue ou perdue pendant le changement d'état. Pour déterminer ces quantités il faut encore connaître la manière dont le passage s'est effectué, c'est-à-dire la loi suivant laquelle la pression a passé de sa valeur initiale à sa valeur finale. On peut dire encore que le second membre de l'équation (9) *n'est pas une différentielle exacte*, et est intégrable seulement dans le cas où l'on a une relation entre les variables p et v.

Le mérite d'avoir énoncé pour la première fois ce théorème avec précision revient incontestablement à M. Clausius.

La relation entre la pression p et le volume v peut être variée à l'infini; nous ne traiterons que les cas très-peu nombreux qui présentent un véritable intérêt.

On peut, par exemple, régler l'introduction de la chaleur de telle sorte que la pression reste constante; dans ce cas, la courbe des pressions est une parallèle P_1P (*fig.* 2) à l'axe des

Fig. 2.



abscisses. L'intégration indiquée dans l'équation (10) est alors

3.

possible, et on obtient

$$\int_{v_1}^{v_2} p\,dv = p\,(v_2 - v_1).$$

On en déduirait sans difficulté la quantité de chaleur fournie au corps au moyen de l'équation (10), pourvu que l'on connût $U = F(p, v)$. On dit en ce cas que l'admission de chaleur s'est faite sous une pression constante.

On peut aussi supposer que le volume soit constant; pour cela on suppose qu'une enveloppe solide entourant le corps s'oppose à une augmentation de volume. Ici encore la courbe des pressions est une ligne droite $P_1 Q$, mais elle est parallèle à l'axe des Y (*fig.* 2). Dans ce cas, le travail extérieur est évidemment nul, et l'équation (10) montre que toute la chaleur admise est employée à accroître le travail intérieur.

On peut encore supposer que le corps passe d'un état à l'autre sans qu'il y ait ni gain ni perte de chaleur. On admet toujours que la différence entre la pression extérieure et la force expansive du corps reste infiniment petite.

Dans cette hypothèse, $Q = 0$ dans l'équation (10), et de même $dQ = 0$ dans l'équation (9); on a, par suite,

$$p\,dv = -\,dU$$

et

$$\int_{v_1}^{v_2} p\,dv = F(p_1, v_1) - F(p_2, v_2).$$

Alors le travail extérieur est égal à la variation du travail intérieur. Si, pendant le passage de l'état $p_1 v_1$ à l'état $p_2 v_2$, il y a eu du travail extérieur produit, un travail intérieur égal a été dépensé, et la surface ombrée de la *fig.* 2 représente ce travail. Dans ce cas une certaine courbe $P_1 P_2 A$ indique suivant quelle loi la pression spécifique p varie avec le volume v.

Cette courbe joue un rôle tellement important dans la théorie de la chaleur, que nous l'appellerons avec M. Rankine *courbe adiabatique*.

Nous la décrirons plus tard avec plus de détails; pour une classe particulière de corps, on peut établir facilement son

équation. Posons, comme plus haut,

$$dU = X dp + Z dv;$$

la substitution de dU dans l'équation (9) donne de suite, pour le cas où $dQ = 0$,

$$X dp = -(Z + p) dv.$$

Si on connaissait les valeurs de X et de Z en fonction de p et de v, ou, plus simplement, si on connaissait la fonction $U = F(p, v)$, l'intégration de l'équation ci-dessus donnerait l'équation de la courbe adiabatique.

On aurait un cas analogue au précédent, si pendant le changement d'état du corps on réglait la pression extérieure et l'introduction de la chaleur de telle sorte que le travail intérieur restât constant; alors $dU = 0$ et l'intégration de l'équation

$$0 = X dp + Z dv$$

fournirait l'équation de la courbe des pressions, courbe que l'on peut appeler, d'après M. Cazin, *courbe isodynamique*.

L'équation (9) donne du reste dans ce cas

$$dQ = A p dv,$$

d'où l'on doit conclure que toute la chaleur introduite a été transformée en travail extérieur.

Il est à remarquer que dans tous les cas où il y a égalité entre la pression extérieure et la force expansive du corps (ce que nous avons admis jusqu'à présent), le changement d'état du corps est réversible. Si en effet le corps, en recevant de la chaleur d'une certaine manière, s'était dilaté de telle sorte que Ov_1 fût devenu Ov_2 (*fig.* 2), et que la pression $p_1 = v_1 P_1$ eût pris la valeur finale $v_2 R_1$ (et alors la variation du volume et de la pression eût été représentée par la courbe $P_1 R_1 R$), le corps retournerait ensuite à l'état initial, en passant par les mêmes états intermédiaires, si on le comprimait d'après la loi indiquée par la courbe $P_1 R_1 R$, et si, en outre, on lui soustrayait de la chaleur, en opérant comme la première fois, mais en sens inverse.

IV. — *Établissement de la première équation fondamentale.*

Quand la pression extérieure que supporte un corps est égale à sa force expansive, on a, pour le travail extérieur exécuté lorsque le volume v de l'unité de poids change de la quantité dv, par suite du gain de chaleur dQ,

$$dL = p\,dv;$$

et pour l'accroissement du travail intérieur,

$$dU = X\,dp + Z\,dv.$$

Si l'on porte ces valeurs de dL et dU dans l'équation (2),

$$dQ = A\,(dU + dL),$$

on a

$$dQ = A\,[X\,dp + (Z + p)\,dv].$$

Posons, pour simplifier,

$$(11) \qquad Z + p = Y;$$

il vient alors

$$(12) \qquad dQ = A\,(X\,dp + Y\,dv).$$

Dans cette équation, il faut regarder X et Y comme des fonctions de p et de v, qui sont encore inconnues, mais qui ont entre elles une relation particulière. Si on différentie les deux membres de l'équation (11) par rapport à p, on a

$$\left(\frac{dZ}{dp}\right) + 1 = \left(\frac{dY}{dp}\right)$$

ou

$$\left(\frac{dY}{dp}\right) - \left(\frac{dZ}{dp}\right) = 1.$$

Mais, comme nous l'avons dit en parlant du travail intérieur, l'expression de dU doit être une différentielle exacte;

ce qui donne (p. 28) l'équation (4)

$$\left(\frac{dZ}{dp}\right)=\left(\frac{dX}{dv}\right).$$

Substituant dans l'équation précédente, on a

$$\left(\frac{dY}{dp}\right)-\left(\frac{dX}{dv}\right)=1. \tag{I'}$$

Cette équation constitue la première équation fondamentale établie pour la première fois, quoique sous une autre forme, par M. Clausius.

Cette équation montre la liaison qui existe entre les deux fonctions encore inconnues X et Y de l'équation (12). Elle fait voir aussi que la parenthèse de cette équation n'est pas une différentielle exacte, car autrement la différence entre les deux quotients différentiels serait zéro et non l'unité. On doit conclure de là que l'équation (12) n'est pas intégrable tant qu'on ne connaît pas une autre relation entre les différentes quantités qui s'y trouvent. L'équation fondamentale (I') exprime seulement sous une forme mathématique ce fait que nous avons déjà fait connaître plus haut, à savoir : que l'on ne peut déterminer la chaleur que gagne un corps uniquement à l'aide de son état initial et de son état final, mais qu'il faut indiquer encore de quelle manière le corps a passé de l'un de ces états à l'autre, par exemple comment la pression spécifique varie avec le volume spécifique.

V. — *Établissement de la deuxième équation fondamentale.*

Nous venons de faire remarquer que l'équation (12), c'est-à-dire

$$dQ=A(X\,dp+Y\,dv), \tag{12}$$

n'est pas intégrable tant qu'on ne donne pas une deuxième équation entre les grandeurs qu'elle renferme.

Désignons par S une nouvelle fonction de p et de v, dont la forme, il est vrai, n'est pas plus connue en ce moment que celle des fonctions X et Y, mais à laquelle nous donnerons une signification par les considérations suivantes.

Si on multiplie et si on divise par S le deuxième membre de l'équation écrite ci-dessus, il vient

$$(13) \qquad dQ = AS\left[\frac{X}{S}\,dp + \frac{Y}{S}\,dv\right].$$

Il est évident que l'on peut choisir S de telle manière que l'expression entre parenthèses devienne une différentielle exacte, ou, en d'autres termes, que la quantité $\frac{1}{S}$ soit le facteur qui rend intégrable la parenthèse de l'équation (12).

La signification de la nouvelle fonction S est par là complétement définie; sa valeur et sa forme peuvent se déterminer lorsqu'on donne les quantités X et Y en fonction de p et de v.

La relation qui lie ces trois fonctions est facile à trouver.

Si, d'après notre hypothèse, l'expression entre parenthèses de l'équation (13) est une différentielle exacte, on a, comme on sait, la relation

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{X}{S}\right) = \frac{d}{dp}\left(\frac{Y}{S}\right),$$

ou, si on effectue la différentiation indiquée,

$$S\left(\frac{dX}{dv}\right) - X\left(\frac{dS}{dv}\right) = S\left(\frac{dY}{dp}\right) - Y\left(\frac{dS}{dp}\right),$$

ou

$$S\left[\left(\frac{dY}{dp}\right) - \left(\frac{dX}{dv}\right)\right] = Y\left(\frac{dS}{dp}\right) - X\left(\frac{dS}{dv}\right).$$

Mais, d'après l'équation (I'), la quantité entre parenthèses dans le premier membre de la dernière équation est égale à l'unité; on a donc

$$(\text{II}') \qquad S = Y\left(\frac{dS}{dp}\right) - X\left(\frac{dS}{dv}\right),$$

équation qui constitue la deuxième équation fondamentale de

la théorie mécanique de la chaleur. Tandis que la première équation fondamentale indique la relation qui lie les fonctions X et Y, cette seconde équation montre comment ces deux fonctions sont liées avec la fonction S, c'est-à-dire avec l'inverse du facteur qui rend intégrable la parenthèse de l'équation (12).

Cette dernière équation a été donnée d'abord par Clapeyron (*), puis plus tard par M. Clausius, mais par une autre méthode. Ces deux auteurs, en faisant certaines hypothèses sur lesquelles nous reviendrons, ont attribué, dès le principe, à la fonction S une autre signification. Clapeyron et M. Clausius ont, dès l'abord, considéré S comme une fonction de la température seule. J'ai préféré démontrer, pour établir les deux équations fondamentales, qu'il suffit d'un seul principe, celui de l'équivalence de la chaleur et du travail, et je crois qu'il est avantageux d'éviter aussi longtemps que possible, dans ces développements mathématiques, la notion de la *température*, parce qu'il est très-difficile de la définir rigoureusement. Certainement, c'est parce qu'on a voulu considérer dès le commencement cette quantité comme une fonction de la température, que l'on a rendu longue et difficile, dans les ouvrages publiés jusqu'ici sur la théorie mécanique de la chaleur, la démonstration de la seconde équation fondamentale. En suivant une telle marche, on doit aussi s'appuyer sur un principe qui a été posé en premier lieu par Carnot, modifié plus tard par M. Clausius, et auquel nous serons conduits naturellement.

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, cah. XIV, p. 170, 1834; *Annales de Poggendorff*, t. LIX, p. 446, *Sur la force motrice de la chaleur*. Ce Mémoire admirablement écrit, qui est remarquable par une grande clarté et une élégance rare dans les développements mathématiques, est à vrai dire le premier travail mathématique sur la théorie mécanique de la chaleur, et s'appuie sur l'ouvrage de S. Carnot, devenu très-rare aujourd'hui : *Réflexions sur la puissance motrice du feu;* Paris, Bachelier, 1824. Ces deux ouvrages sont restés longtemps presque inconnus, au moins ne les a-t-on point utilisés; c'est seulement plus tard, surtout après la publication des Mémoires de M. Clausius, que leur valeur a été appréciée.

La fonction S est suffisamment définie par ce qui précède pour que l'on puisse en tirer parti sans difficulté.

A l'aide des deux équations fondamentales déjà établies, on peut d'abord mettre sous d'autres formes l'équation (12), qui donne la chaleur que l'on doit fournir au corps. Puisque S est une fonction de p et de v, on peut écrire

$$dS = \left(\frac{dS}{dp}\right) dp + \left(\frac{dS}{dv}\right) dv. \tag{14}$$

Si maintenant nous tirons de l'équation (II'), successivement, les valeurs de Y et de X, pour les substituer dans l'équation (12), nous avons, en simplifiant les résultats au moyen de l'équation (14) et en écrivant de nouveau l'équation (12),

$$\text{(III')} \quad \left\{ \begin{aligned} dQ &= A(X dp + Y dv), \\ dQ &= \frac{A}{\left(\frac{dS}{dp}\right)}(X dS + S dv), \\ dQ &= \frac{A}{\left(\frac{dS}{dv}\right)}(Y dS + S dp). \end{aligned} \right.$$

Ces trois équations sont identiques; nous choisirons toujours pour résoudre différents problèmes celle qui conduit au but le plus rapidement. La relation mutuelle des trois quantités X, Y et S, qui sont des fonctions de p et de v, est en général donnée par les équations (I') et (II'); ces fonctions ont néanmoins besoin d'être déterminées plus complétement lorsqu'on veut se servir des équations (III') pour certaines recherches spéciales.

Si on savait comment le travail intérieur U est lié aux quantités p et v, on connaîtrait immédiatement les quantités X, Y et S.

En effet, nous avons posé plus haut (p. 27)

$$X = \left(\frac{dU}{dp}\right),$$

puis

$$Z = \left(\frac{dU}{dv}\right);$$

mais, comme d'après l'équation (11) on a $Z + p = Y$, il en résulte

$$Y = p + \frac{dU}{dv}.$$

Enfin la substitution de ces valeurs de X et de Y dans l'équation (II') donnerait finalement la valeur de S; mais comme, en général, on ne connaît pas la forme de la fonction $U = F(p, v)$, il faut la déterminer autrement et la déduire des fonctions X, Y, S. Telle est la question que nous nous proposons de résoudre.

VI. — *Des cycles d'opérations simples et réversibles.*

On communique à l'unité de poids d'un corps, dont l'état initial est déterminé par le volume $Ov_1 = v_1$ et la pression $v_1 a = p_1$ (*fig.* 3), une quantité de chaleur Q de telle manière,

Fig. 3.

que la relation qui lie la pression et le volume pendant le changement d'état soit représentée par la courbe RR. Si l'équation de cette courbe est connue, on peut, d'après ce qui précède, déterminer la quantité de chaleur nécessaire pour

faire passer la pression de la valeur initiale p_1 à la valeur finale p_2. Nous supposerons toujours que l'équation de cette courbe soit donnée sous la forme

$$R = F(p, v),$$

R étant constant pendant le changement d'état. Lorsque la forme de la fonction est connue, on peut exprimer p en fonction de v, et juger par là de la nature de cette courbe.

Pour indiquer de quelle manière la chaleur a été fournie ou soustraite et quelles modifications ont eu lieu, nous dirons dorénavant pour abréger : qu'il fallait fournir ou soustraire la quantité de chaleur Q pendant que le corps parcourait sur la courbe R le chemin *ab*. Cela signifie simplement que le changement de pression de p_1 à p_2 a eu lieu d'après la loi

$$R = F(p, v) = \text{const.}$$

L'aire $v_1 v_2 ab$, limitée par la portion de courbe *ab*, donne le travail extérieur.

S'il a fallu fournir de la chaleur pour faire parcourir au corps un chemin *ab* sur la courbe R, il est nécessaire de retirer du corps la même quantité de chaleur, s'il doit revenir à son état initial en suivant le chemin inverse *ba*. Si au contraire il avait fallu retirer du corps la quantité de chaleur Q, il faudrait lui fournir cette même quantité de chaleur pendant le trajet inverse suivant *ba*.

Si la forme de la fonction $F(p, v)$ restait la même tandis que la constante R change et devient R_1 (*fig.* 3), ce serait une autre courbe R_1 de même espèce qui indiquerait le changement d'état du corps.

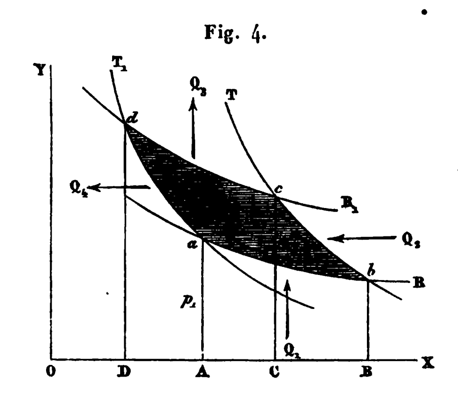
Supposons le même corps placé d'abord dans l'état a (p_1, v_1), puis dans l'état a_1 (p'_1, v'_1) (*fig.* 3); si pendant le trajet *ab* sur la courbe R, il a fallu fournir de la chaleur, il faudrait en fournir également pendant le trajet $a_1 b_1$ sur la courbe R_1. Supposons que le même corps ait dû parcourir dans deux expériences les chemins *ab* dans un sens et $a_1 b_1$ dans le sens inverse, la chaleur aurait été retirée dans l'un des trajets et fournie dans l'autre.

Quand les constantes R et R_1 diffèrent infiniment peu l'une de l'autre, les courbes R et R_1 se rapprochent indéfiniment; nous désignerons dans ce cas la quantité R_1 par $R + dR$; la différentiation de l'équation $R = F(p, v)$ donne d'ailleurs pour ce cas

$$dR = \left(\frac{dR}{dp}\right) dp + \left(\frac{dR}{dv}\right) dv.$$

Imaginons maintenant deux couples de courbes, chaque couple appartenant à la même espèce : le premier couple correspondra à $R = F(p, v)$, le second à $T = \varphi(p, v)$. Les courbes R et R_1 (*fig.* 4) sont de même espèce et ne diffèrent que par

Fig. 4.



la valeur de la constante; il en est de même des courbes T et T_1.

Supposons que l'état initial du corps soit donné par les quantités $OA = v_1$ et $Aa = p_1$, et admettons que nous fassions parcourir au corps sur la courbe R le chemin ab; il faudra alors fournir une certaine quantité de chaleur Q_1 (c'est pour fixer les idées que nous supposons la chaleur fournie), que l'on peut déterminer à l'aide de l'équation (2),

$$dQ = A(dU + dL).$$

Intégrons en effet cette équation, ce qui est possible parce que nous supposons p connu en fonction de v. A l'aide de l'équation

$$R = F(p, v) = \text{const.},$$

nous trouvons pour la quantité de chaleur fournie

$$(15) \qquad Q_1 = A(U_2 - U_1 + L_1).$$

La différence $U_2 - U_1$ indique l'accroissement du travail intérieur, tandis que L_1 est le travail extérieur qui est représenté par l'aire AB*ba*; U_1 est le travail intérieur dans l'état initial *a*; U_2 est la valeur de ce travail dans l'état final *b*. La *fig.* 4 montre que pendant ce changement d'état il y a eu une dilatation du corps, indiquée par le passage de OA à OB. Le travail extérieur a donc été employé au dehors, c'est-à-dire gagné. Un travail extérieur gagné sera dans la suite affecté du signe +, tandis qu'un travail extérieur dépensé, lequel a lieu lorsque le corps diminue de volume, sera affecté du signe —.

Les quantités de chaleur seront de même affectées des signes + ou —, suivant qu'elles sont fournies ou retirées. Les quantités Q_1 et L_1 ont donc leurs véritables signes dans l'équation (15).

Supposons maintenant que le corps considéré doive parcourir (*fig.* 4) sur la courbe

$$T = \varphi(p, v) = \text{const.}$$

le chemin *bc*; désignons par U_3 le travail intérieur dans l'état *c*, et admettons que pendant ce passage il faille fournir au corps une quantité de chaleur Q_2; alors on aura, comme tout à l'heure,

$$(16) \qquad Q_2 = A(U_3 - U_2 - L_2),$$

équation dans laquelle le travail extérieur L_2, représenté par l'aire CB*bc*, doit être pris négativement, attendu que, d'après la *fig.* 4, une diminution du volume du corps a eu lieu dans le trajet *bc*.

Si ensuite le corps est ramené à son état initial en suivant le chemin *cd* sur la courbe

$$R_1 = F(p, v) = \text{const.},$$

puis le chemin *da* sur la courbe

$$T_1 = \varphi(p, v) = \text{const.},$$

et si on désigne par U_4 le travail intérieur dans l'état *d*, on aura comme tout à l'heure les deux équations

$$(17) \qquad -Q_3 = A(U_4 - U_3 - L_3)$$

$$(18) \qquad -Q_4 = A(U_1 - U_4 + L_4).$$

Les quantités de chaleur Q_3 et Q_4 doivent être prises négativement, parce que la chaleur a été retirée du corps sur les deux trajets *cd* et *da*; car nous avons supposé la chaleur fournie sur les trajets *ab* et *bc*, et les chemins *ab* et *cd* d'un côté, *bc* et *da* de l'autre ont été parcourus dans des sens différents sur des courbes de même espèce.

Le travail L_3 de l'équation (17) et le travail L_4 de l'équation (18) sont représentés par les aires DC*cd* et DA*ad*; L_3 a été affecté du signe — et L_4 du signe +, parce que sur le trajet *cd* il y a eu une diminution et sur le trajet *da* une augmentation de volume, et que dans le premier cas le travail L_3 a dû être dépensé, tandis que le travail L_4 a été gagné. Il est à remarquer enfin que le travail U_1, qui existait dans le corps au commencement de l'expérience, reparaît dans l'équation (18). Comme le corps se trouve à la fin de l'expérience dans le même état qu'au commencement, et que, par suite, la pression et le volume ont repris leurs valeurs initiales, il doit en être de même du travail intérieur, puisque nous avons considéré d'avance le travail comme une fonction de p et de v.

Si on ajoute membre à membre les équations (15), (16), (17) et (18), les valeurs de U disparaissent et on a

$$(19) \qquad Q_1 + Q_2 - Q_3 - Q_4 = A(L_1 - L_2 - L_3 + L_4).$$

Les valeurs de L contenues dans la parenthèse du second membre sont entièrement déterminées, comme on l'a déjà fait remarquer, par les aires (*fig.* 4)

AB*ba*, CB*bc*, DC*cd* et DA*ad*,

et il en résulte

$$L_1 + L_4 = \text{aire DB}\,bad,$$

$$L_2 + L_3 = \text{aire DB}\,bcd.$$

La différence de ces aires n'est évidemment autre chose que

l'aire *abcd* limitée par nos quatre courbes, aire qui est ombrée sur la *fig.* 4. Si nous supposons cette aire mesurée et représentée par la lettre F, l'équation (19) s'écrit plus simplement

$$(20) \qquad -[(Q_3+Q_4)-(Q_1+Q_2)]=-AF.$$

Comme F est négatif, du travail a disparu ; le travail dépensé sur le trajet *bcd* pour la compression du corps est supérieur au travail gagné sur le chemin *dab* pendant sa dilatation, c'est-à-dire au travail produit par le corps. La quantité AF représente la quantité de chaleur qui correspond à ce travail, et, comme dans le cas actuel il y a eu disparition de travail, une quantité de chaleur (AF) équivalente à ce travail a dû être *créée*. Le corps soumis à l'opération ne possède point cette quantité de chaleur, puisqu'il est revenu à son état initial ; son travail intérieur est par conséquent le même qu'au commencement. L'équation (20) fait parfaitement voir ce qu'est devenue la chaleur créée.

Comme (Q_3+Q_4) représente, d'une part, la quantité de chaleur qui a été retirée du corps sur le trajet *cda*, et (Q_1+Q_2), d'autre part, celle qui a été fournie sur le trajet *abc*, l'équation (20) indique justement que pendant l'opération la chaleur retirée a été supérieure à la chaleur fournie, et que la différence est rigoureusement égale à la chaleur AF créée par le travail disparu.

Dans l'opération précédente, le corps, ou mieux l'extrémité de l'ordonnée qui représente la pression, parcourait le contour de l'aire F dans le sens *abcd* ; ce sens est indiqué par la flèche intérieure sur la *fig.* 4. Pour montrer qu'on a fourni de la chaleur sur les trajets *ab* et *bc*, nous mettons à côté des lettres Q_1 et Q_2 des flèches dirigées vers les courbes ; les flèches qui s'éloignent des courbes *cd* et *da* indiquent au contraire que de la chaleur a été retirée.

Nous avons supposé que le corps était soumis, pendant l'opération, à une pression extérieure égale à chaque instant à sa force expansive ou différant infiniment peu de cette force. L'opération peut alors être renversée ; le corps peut parcourir aussi le contour de l'aire F (*fig.* 4) en sens inverse,

en suivant le trajet *adcba*; alors tous les termes de l'équation (20) changent évidemment de signe, et il vient

$$(21) \qquad (Q_3 + Q_4) - (Q_1 + Q_2) = AF.$$

Dans ce trajet, on crée le travail F, et la somme des quantités de chaleur Q_4 et Q_3 *fournies* dans les trajets *ad* et *dc* est plus grande que la somme des quantités de chaleur Q_2 et Q_1 *retirées* dans les trajets *cb* et *ba*. Une quantité de chaleur égale à $(Q_3 + Q_4) - (Q_1 + Q_2)$ *disparaît* alors, et elle équivaut, d'après l'équation (21), au travail créé F. D'après cela, on peut dire que, dans la première succession des opérations, le travail F a été converti en chaleur, que ce travail a servi à créer une certaine quantité de chaleur; au contraire, dans la succession inverse des mêmes opérations, de la chaleur a *disparu* et a servi à créer un travail équivalent, on suppose bien entendu que le corps soit revenu à son état initial à la fin des opérations.

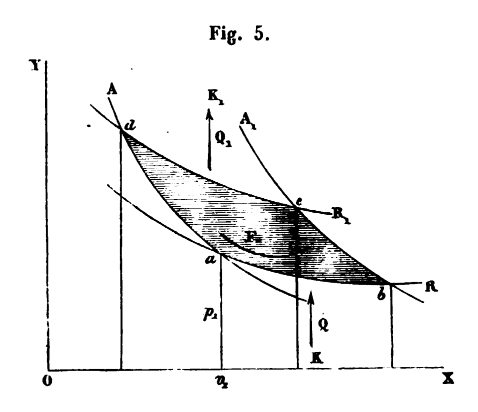
Une suite de modifications, telles que celle que nous venons de décrire, s'appelle, d'après M. Clausius, un *cycle fermé d'opérations*, et lorsque, comme cela a lieu ici, la pression extérieure est à chaque instant égale à la force expansive du corps, elle se nomme *cycle réversible*, parce que le contour de l'aire F (*fig.* 4) peut être parcouru dans un sens ou dans l'autre. Dans l'un des sens, on produit de la chaleur en dépensant du travail; dans l'autre, de la chaleur disparaît et on produit du travail.

Lorsque, comme nous venons de l'admettre, l'aire est formée par deux couples de courbes, le cycle est dit *simple;* mais on suppose expressément que les deux courbes d'un même couple soient de même espèce, c'est-à-dire que les équations ne diffèrent que par la valeur attribuée à une constante. Dans les autres cas, le cycle est dit *composé;* nous nous en occuperons plus tard.

Dans le cycle simple que nous avons considéré ci-dessus, nous avons laissé tout à fait arbitraires les lois auxquelles doivent être soumis les deux couples de courbes. Mais on peut, sans nuire à la généralité des problèmes, faire sur l'un de ces

couples, le couple T et T_1 (*fig.* 4) par exemple, une hypothèse spéciale. La première idée qui se présente et que nous poursuivrons plus attentivement consiste à supposer que les deux courbes T et T_1 soient des lignes adiabatiques, celles qui indiquent comment la pression p varie avec le volume v quand on admet que le corps n'éprouve ni perte ni gain de chaleur. L'état initial du corps est toujours déterminé par la pression p_1 et le volume v_1 (*fig.* 5). Les courbes R et R_1 suivent toutes les

Fig. 5.



deux la loi arbitraire

$$R = F(p, v) = \text{const.};$$

dans la seconde courbe seulement, la constante R est remplacée par la valeur R_1.

Ce sont les deux autres courbes A et A_1 qui sont des lignes adiabatiques, suivant la même loi, mais se distinguant l'une de l'autre par les valeurs différentes de la constante qui entre dans leurs équations.

Les équations (20) et (21) sont immédiatement applicables à un cycle simple de cette nature; mais ici elles se simplifient beaucoup. En effet, comme dans les trajets *bc* et *da* il n'y a ni communication, ni soustraction de chaleur, il faut faire $Q_2 = 0$ et $Q_4 = 0$ dans ces équations. Remplaçons alors (*fig.* 5) la lettre Q_1 par Q, et la lettre Q_3 par Q_1; il vient

$$\mp (Q_1 - Q) = \mp AF,$$

équation que nous écrivons simplement

$$(22) \qquad Q_1 - Q = AF,$$

puisqu'il ne peut pas y avoir de doute sur les signes dont il faut affecter les deux membres de cette équation.

D'après cela, si le corps parcourt le contour de l'aire F dans la direction *abcda* indiquée par la flèche intérieure, il faudra fournir au corps la quantité de chaleur Q dans le trajet *ab*, et lui en enlever une quantité Q_1 dans le trajet *cd*; la valeur de Q_1 surpasse celle de Q de la quantité de chaleur AF qui équivaut au travail extérieur dépensé. Dans le parcours inverse, il faut fournir la quantité de chaleur Q_1 dans le trajet *dc*, et enlever dans le trajet *ba* la quantité de chaleur Q; la différence $Q_1 - Q$ représente alors la quantité de chaleur transformée en travail.

Dans ce qui précède, nous n'avons point fait d'hypothèse sur le mode de communication ou de soustraction de la chaleur. Le cas ordinaire est celui où le corps considéré est en contact avec un second corps, et où la chaleur se propage de l'un à l'autre.

L'étude du cycle simple ne perd rien de sa généralité, si nous supposons que le corps sur lequel on opère, et que nous appellerons dorénavant le *corps intermédiaire*, soit mis en contact avec d'autres corps qui lui cèdent ou lui enlèvent de la chaleur.

Supposons donc, en reprenant le cycle d'opérations indiqué par la *fig.* 5, que le corps intermédiaire soit en contact avec un corps K, qui lui cède la quantité de chaleur Q, suivant le chemin *ab* de la courbe R, ou qui lui enlève cette même quantité quand le trajet est inverse.

Nous devons, il est vrai, attribuer au corps K des propriétés spéciales; il doit fournir ou absorber peu à peu la quantité de chaleur Q, de telle sorte que la variation de pression *corresponde* exactement à la courbe R. Pour indiquer que le corps jouit de cette propriété, nous l'appellerons *corps à l'état* R; on peut dire brièvement que sur la portion de courbe *ab* le corps K à l'état R fournit au corps intermédiaire la quantité de

chaleur Q, ou qu'il lui enlève cette même quantité de chaleur, quand cette portion de courbe est parcourue dans le sens opposé.

On peut concevoir de même que la chaleur Q_1, mise en jeu sur le chemin *cd*, provienne de ce que, pendant le trajet, le corps intermédiaire est en contact avec *le corps* K_1 *à l'état* R_1, lequel absorbe cette chaleur, ou la fournit quand le chemin *cd* est parcouru dans une direction opposée.

Par l'introduction de deux corps auxiliaires possédant les propriétés indiquées, le cycle simple de la *fig.* 5 représente l'action mutuelle de trois corps.

Si le corps intermédiaire parcourt le contour de l'aire *abcd* dans le sens de la flèche intérieure, le travail extérieur F est dépensé, la quantité de chaleur Q est enlevée au corps K à l'état R, et la quantité Q_1 est fournie au corps K_1 à l'état R_1 ; la valeur de Q_1 surpasse celle de Q d'une quantité équivalente au travail F qui a été transformé en chaleur. Le corps intermédiaire est revenu exactement à son état initial ; cependant les circonstances ne sont pas tout à fait les mêmes qu'au commencement de l'opération, parce que le corps K a perdu la quantité de chaleur Q, et que le corps K_1 a gagné la quantité de chaleur Q_1 ; ce transport de chaleur correspond ainsi à une dépense de travail.

Si l'opération s'effectue ensuite en sens inverse, on enlève au corps K_1 la quantité de chaleur Q_1, et on fournit au corps K la quantité de chaleur Q ; mais en même temps on reproduit le travail F. Les trois corps sur lesquels on a expérimenté sont alors revenus à leurs états initiaux, et dans la double opération il n'y a ni perte ni gain de travail, comme on devait s'y attendre d'après les principes de la Mécanique.

Nous n'avons introduit dans nos raisonnements les deux corps auxiliaires que passagèrement, et seulement dans le but de pouvoir citer des notes historiques sur l'emploi des cycles.

L'introduction du cycle fermé dans l'étude de la chaleur est due à Carnot; Clapeyron l'a soumis après lui à des considérations analytiques. Mais ces deux auteurs, ainsi que tous ceux qui ont écrit jusqu'à présent sur la théorie mécanique de la

chaleur, font dès le principe certaines hypothèses, relativement aux courbes R et R_1 (*fig.* 5), en introduisant dans le calcul la température, et en supposant que ces courbes représentent les relations qui existent entre la pression et le volume, lorsque le corps intermédiaire est maintenu à une température constante pendant la durée des trajets *ab* et *cd*. Dans les équations données plus haut, à savoir :

$$R = F(p, v) = \text{const.},$$
$$R_1 = F(p, v) = \text{const.},$$

R représente alors la température du corps dans le trajet *ab*, et R_1 sa température dans le trajet *cd*. Suivant l'usage adopté, nous remplacerons passagèrement les lettres R et R_1 par les lettres t et t_1. Les deux corps auxiliaires K et K_1 sont alors des corps qui jouissent de la propriété de pouvoir maintenir par leur contact le corps intermédiaire à des températures constantes t et t_1. On peut réaliser de pareils corps; on n'a qu'à attribuer aux deux corps K et K_1 respectivement les températures t et t_1, et des dimensions extrêmement considérables par rapport à celles du corps intermédiaire, de telle sorte qu'ils n'éprouvent qu'un changement de température inappréciable, en donnant ou prenant de la chaleur à ce corps.

Dans cette hypothèse, on peut décrire le cycle simple comme l'a fait Carnot. Les courbes A et A_1 (*fig.* 5) étant toujours des lignes adiabatiques, et le corps parcourant le contour de l'aire F dans la direction de la flèche, le corps K à la température t perdra la quantité de chaleur Q, et le corps K_1 à la température t_1 recevra la quantité de chaleur Q_1, tandis que le travail F sera dépensé. Comme $t_1 > t$, de la chaleur aura été portée au moyen d'une dépense de travail d'un corps à un autre dont la température est supérieure à celle du premier, et dans cette opération il y aura eu contact entre des corps à la même température (ou mieux entre des corps dont les températures différaient infiniment peu).

Dans l'opération inverse, il y a de même *transport* de chaleur d'un corps K_1 à un corps K, dont la température est moindre, et production d'une quantite équivalente de travail F.

Ces considérations conduisirent Carnot au principe suivant : *Au transport d'une quantité donnée de chaleur d'un corps* K_1 *à un autre corps* K *dont la température est moindre, équivaut la production d'une quantité déterminée de travail, lorsque l'état du corps intermédiaire ne subit pas de changements permanents. La quantité de chaleur reste constante pendant l'opération.*

C'est sur ce principe que reposent les calculs de Clapeyron. Mais sous cette forme il ne s'accorde pas avec le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail. M. Clausius a fait remarquer le premier qu'il faut rejeter le dernier passage : *la quantité de chaleur reste constante.* Carnot ainsi que Clapeyron voulaient dire, avec la notation employée ci-dessus, que la quantité de chaleur Q_1, enlevée dans le trajet *adcba* autour de l'aire F au corps K_1 qui est à la température supérieure, est égale à la quantité de chaleur Q fournie dans le trajet *ba* au corps K qui est à la température inférieure.

On admettait ainsi que dans cette opération *la production du travail* F *avait sa cause dans le passage de la quantité de chaleur* Q *d'une température supérieure à une température inférieure ;* le travail produit devait alors, d'après Carnot et Clapeyron, être proportionnel à la quantité de chaleur transportée.

D'après le principe fondamental de la théorie mécanique de la chaleur, qui admet la coexistence d'une production de travail et d'une disparition de chaleur qui correspond à ce travail, on ne peut avoir l'égalité $Q = Q_1$; la relation qui a lieu pour le cycle simple, et que M. Clausius a donnée le premier, est, comme nous l'avons fait voir,

$$Q_1 - Q = F.$$

Le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail n'était pas encore connu du temps de Carnot et de Clapeyron ; il faut néanmoins comprendre leurs travaux dans ceux qui sont relatifs à la théorie mécanique de la chaleur, car le principe de Carnot est considéré encore aujourd'hui comme vrai ; il faut seulement remplacer la dernière partie de sa proposition : *la*

quantité de chaleur reste constante pendant l'opération, par la phrase suivante : *dans cette opération, il y a disparition d'une quantité de chaleur proportionnelle au travail produit.*

Devant revenir plus tard sur cette question, nous remarquerons seulement que les résultats des calculs de Clapeyron sont pour la plupart regardés encore aujourd'hui comme exacts, et que c'est à cet auteur que nous devons la deuxième équation fondamentale de la théorie mécanique de la chaleur.

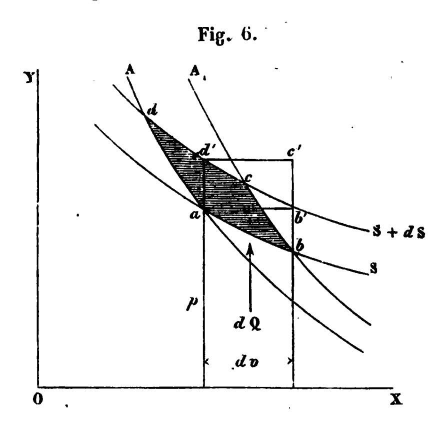
La modification introduite dans l'énoncé du principe de Carnot pour le mettre d'accord avec le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail conduisit ensuite M. Clausius à notre première équation fondamentale.

VII. — *Sur les propriétés de la fonction* S *et des cycles composés et réversibles.*

Nous allons employer les propositions sur le cycle simple, sous la forme générale que nous leur avons donnée, pour étudier les propriétés de la fonction S dont nous nous sommes servis pour démontrer la seconde équation fondamentale.

Soient A et A_1 (*fig.* 6) deux courbes adiabatiques infiniment

Fig. 6.



voisines, p et v la pression et le volume qui déterminent l'état a d'un corps.

Supposons que les deux autres courbes *ab* et *dc* soient telles, que la loi de variation de p et de v soit représentée sur la courbe *ab* par l'équation

$$S = f(p, v),$$

la valeur de S restant constante, et sur la courbe *dc*, infiniment voisine de *ab*, par

$$S + dS = f(p, v) = \text{const.}$$

Dans ces équations et dans celles qui suivront, S sera toujours cette fonction particulière de p et de v qui a été définie plus haut (p. 40).

Soumettons le corps à un cycle d'opérations, c'est-à-dire faisons parcourir à l'extrémité de l'ordonnée p le chemin *abcda*. L'aire déterminée par les lignes infiniment petites *ab*, *bc*, *cd*, *da*, représentera le travail dépensé pendant ces opérations. Cette aire, que nous désignerons par d^2F, peut être considérée comme celle d'un parallélogramme infiniment petit, équivalent au rectangle infiniment petit *ab'c'd'*, et l'on a par suite

$$d^2F = \overline{ab'} \times \overline{ad'}.$$

Mais *ab'* est la dilatation dv du corps sur le chemin *ab*, et *ad'* est l'accroissement de p quand S devient $S + dS$, v restant constant; si alors dans l'équation

$$dS = \left(\frac{dS}{dp}\right)dp + \left(\frac{dS}{dv}\right)dv,$$

on fait $dv = 0$, on a

$$dp = \frac{dS}{\left(\frac{dS}{dp}\right)}:$$

telle est la valeur de *ad'*. Remplaçons maintenant, dans l'équation qui donne d^2F, $\overline{ab'}$ et $\overline{ad'}$ par leurs valeurs, il viendra

$$(23) \qquad d^2F = \frac{dS . dv}{\left(\frac{dS}{dp}\right)}.$$

On peut déterminer aussi la quantité de chaleur dQ qu'il faut fournir au corps dans le trajet ab, pour que, pendant son changement d'état, la quantité S conserve sa valeur constante, comme cela a été supposé. Il suffit pour cela de faire $dS = 0$ dans l'équation (III') donnée plus haut (p. 42),

$$dQ = \frac{A}{\left(\frac{dS}{dp}\right)}\left(X\,dS + S\,dv\right),$$

et nous obtiendrons alors

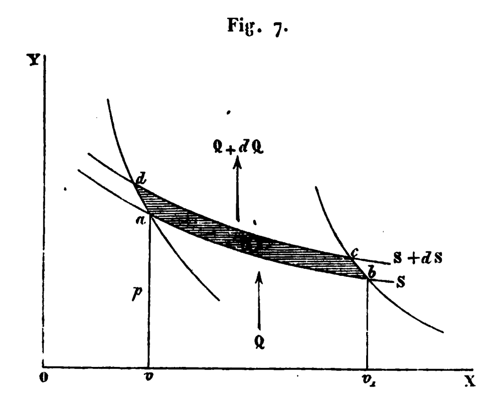
$$(24) \qquad dQ = \frac{AS\,dv}{\left(\frac{dS}{dp}\right)}.$$

Divisons membre à membre les équations (23) et (24), il vient

$$(25) \qquad d^2F = \frac{dS}{AS}\,dQ,$$

équation intégrable lorsqu'on suppose que S et dS soient des quantités constantes, ce qui revient à admettre que la dilatation sur le chemin ab (*fig.* 7) soit finie, c'est-à-dire que

Fig. 7.



les deux lignes adiabatiques ne soient plus infiniment voisines.

L'intégration donne

$$dF = \frac{dS}{AS} Q. \tag{26}$$

Dans cette équation, Q est la quantité de chaleur qu'il faut fournir au corps dans le trajet *ab*, S restant constant.

Imaginons maintenant que le cycle d'opérations soit complétement terminé; il faut alors enlever au corps, dans le trajet *cd*, pendant lequel $S + dS$ reste constant, une quantité de chaleur qui, d'après les considérations précédentes, dépasse Q d'une quantité de chaleur équivalente au travail dépensé dF (*voyez* l'équation 22). Désignons par $Q + dQ$ la quantité de chaleur qui doit être enlevée au corps, on aura ainsi

$$dQ = A\,dF.$$

En portant dans l'équation (26) la valeur de dF donnée par cette équation, on obtient

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dS}{S},$$

et en intégrant,

$$\text{log. népérien } Q = \text{log. népérien } S + \text{const.},$$

ou bien

$$\text{log. népérien } \frac{Q}{S} = \text{const.},$$

ou plus simplement

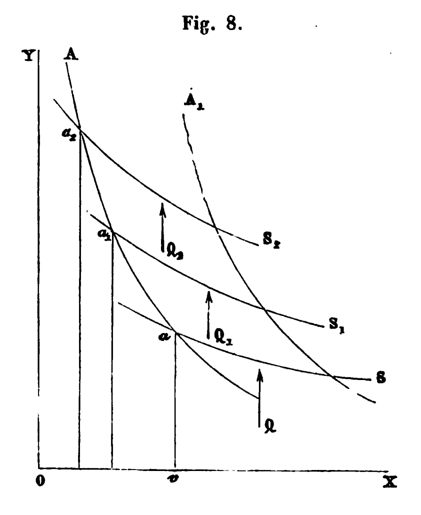
$$\frac{Q}{S} = \text{const.} \tag{27}$$

Cette équation exprime une loi très-remarquable et indique pour la fonction S des propriétés caractéristiques. En voici le résultat :

Supposons qu'un corps quelconque se trouve successivement dans les états initiaux a, a_1, a_2 (*fig.* 8), tels, que l'extrémité de l'ordonnée qui représente la pression soit sur la ligne adiabatique A: chacun de ces états correspondra à une valeur particulière de la fonction S; désignons ces valeurs respecti-

vement par S, S_1 et S_2. Si maintenant on fournit de la chaleur

Fig. 8.



à ce corps, de telle sorte que pendant sa dilatation la valeur de S qui correspond à l'état initial reste constante, et que l'extrémité de l'ordonnée atteigne dans chacun des trois cas une seconde ligne adiabatique A_1, les quantités de chaleur Q, Q_1, Q_2 qu'il faudra fournir pour cela auront entre elles une relation simple qui s'exprime, d'après l'équation (27), comme il suit :

$$(28) \qquad \frac{Q}{S} = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{Q_2}{S_2}.$$

Cette relation, sur la signification de laquelle nous reviendrons plus tard, nous permet d'étendre considérablement les propositions données plus haut sur le cycle d'opérations simple.

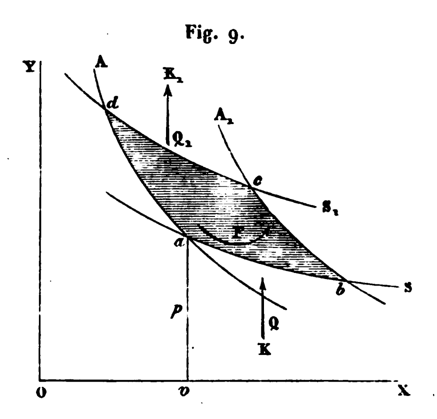
Soient (*fig.* 9) A et A_1 deux courbes adiabatiques, puis S et S_1 deux courbes qui ont pour équations

$$S = f(p, v) = \text{const.} \quad \text{et} \quad S_1 = f(p, v) = \text{const.}$$

Faisons parcourir au corps, dont l'état initial est donné par le volume v et la pression p, le contour de la surface comprise entre ces quatre courbes, dans le sens de la flèche; dans le

trajet ab, il faudra fournir une quantité de chaleur Q, tandis

Fig. 9.



que dans le trajet cd il faudra enlever une quantité de chaleur Q_1, et l'aire F représentera le travail dépensé à la fin des opérations. Mais les équations (22) et (28) donnent

$$AF = Q_1 - Q,$$

$$\frac{Q_1}{S_1} = \frac{Q}{S}.$$

Nous en déduisons

(29) $$F = \frac{Q}{AS}(S_1 - S)$$

ou bien

(30) $$F = \frac{Q_1}{AS_1}(S_1 - S).$$

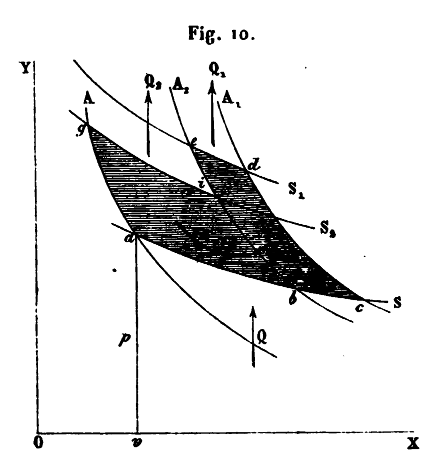
D'où résulte cette proposition importante :

Le travail dépensé dans ce cycle d'opérations simple F, *ou le travail produit, si les opérations se sont effectuées dans un sens inverse, est dans un rapport simple soit avec la quantité de chaleur fournie, soit avec la quantité de chaleur soustraite ; ce travail est en outre proportionnel à la différence des valeurs* S_1 *et* S (*).

(*) Si nous voulions introduire dès à présent la température, et admettre

Les équations précédentes peuvent se mettre sous une forme plus générale. Imaginons les trois courbes adiabatiques A, A_1, A_2 (*fig.* 10), et les trois courbes S, S_1, S_2 qui ont pour

Fig. 10.



équation générale

$$S = f(p, v) = \text{const.},$$

la constante S ayant une valeur particulière pour chacune de ces courbes; admettons encore que le corps soit donné dans l'état *a* par la pression *p* et le volume *v*; on peut concevoir la chaleur fournie ou soustraite de telle sorte que l'extrémité de l'ordonnée *p* parcoure le contour de la surface ombrée F dans le sens *abcdeiga*. D'après ce qui précède, il faut fournir dans le trajet *ac* une certaine quantité de chaleur Q, tandis que dans les trajets *de* et *ig* il faut enlever respectivement les quantités de chaleur Q_1 et Q_2. L'excès de la somme des valeurs Q_1 et Q_2 sur la valeur Q est aussi dans ce cas égal à la quantité de chaleur AF, qui équivaut au travail F représenté

que S soit la température ou une fonction de la température, la proposition actuelle coïnciderait avec le principe de Carnot énoncé à la p. 54. Les équations (29) et (30) du texte seraient aussi identiques, quant à la forme et à la signification, aux équations données pour la première fois par MM. Rankine et Thomson.

par la surface ombrée; car le corps se retrouve à la fin des opérations dans son état initial. On a d'après cela

$$(31) \qquad AF = Q_1 + Q_2 - Q.$$

Mais la quantité de chaleur Q peut être regardée comme composée de deux parties Q' et Q'' correspondant respectivement aux trajets *ab* et *bc*; l'équation (28), appliquée au cas de la *fig.* 10, donne

$$\frac{Q'}{S} = \frac{Q_2}{S_2},$$

$$\frac{Q''}{S} = \frac{Q_1}{S_1},$$

d'où l'on tire, en ajoutant membre à membre les deux équations et tenant compte de la relation $Q' + Q'' = Q$,

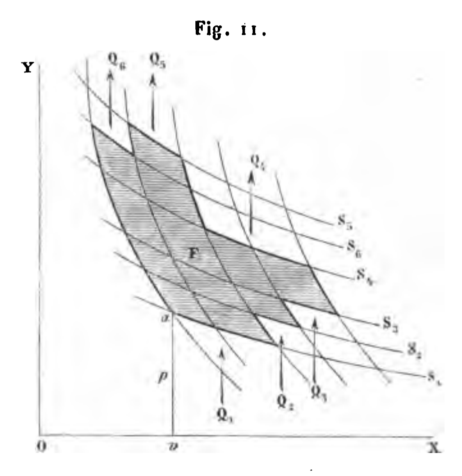
$$\frac{Q}{S} = \frac{Q_1}{S_1} + \frac{Q_2}{S_2}$$

ou bien

$$(32) \qquad \frac{Q_1}{S_1} + \frac{Q_2}{S_2} - \frac{Q}{S} = 0.$$

Les deux équations (31) et (32) se rapportent à un cycle composé tel que la *fig.* 10 le représente; le cycle plus compli-

Fig. 11.



qué, représenté par la *fig.* 11, peut être expliqué de la même

manière. On trouverait d'une manière analogue pour ce dernier cycle d'opérations

$$AF = Q_4 + Q_5 + Q_6 - Q_1 - Q_2 - Q_3,$$

et par suite

$$\frac{Q_4}{S_4} + \frac{Q_5}{S_5} + \frac{Q_6}{S_6} - \frac{Q_1}{S_1} - \frac{Q_2}{S_2} - \frac{Q_3}{S_3} = 0.$$

On écrit plus simplement les deux dernières équations en introduisant le signe $\sum$:

$$AF = \sum(Q), \tag{33}$$

$$\sum\left(\frac{Q}{S}\right) = 0 \ (*). \tag{34}$$

On peut encore mettre ces équations sous la forme suivante :

$$F = \sum\left(\frac{Q}{A}\right), \tag{35}$$

$$\sum\left(\frac{Q}{AS}\right) = 0, \tag{36}$$

en divisant les deux membres par A, équivalent calorifique de l'unité de travail.

Nous nous en servirons plus loin sous cette dernière forme.

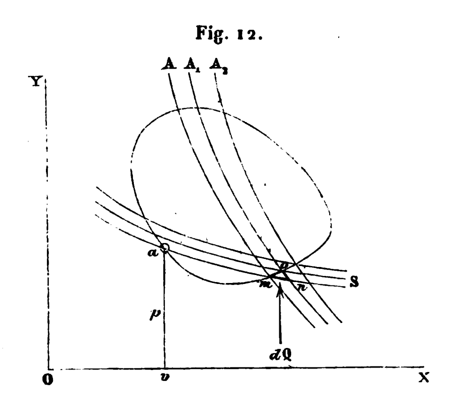
Telles sont les équations générales applicables *à tout cycle d'opération réversible*. Si on affecte du signe + les quantités de chaleur introduites et du signe — les quantités de chaleur soustraites, la quantité de travail dépensée ou produite, exprimée en chaleur, est égale à la somme algébrique de toutes ces quantités. Si cette somme est négative, le travail F a été dépensé et transformé en chaleur; si elle est positive, le travail F a été produit par le cycle d'opérations et la chaleur a été transformée en travail.

(*) L'équation (34) et l'équation (37) indiquée plus loin dans le texte ont été établies pour la première fois par M. Clausius, mais d'une manière différente de la nôtre. Partant du principe de Carnot modifié (p. 54), M. Clausius commence par donner à la fonction S une autre signification déterminée.

L'équation (34) exprime en outre que, dans un cycle d'opérations réversible, la somme algébrique des quantités de chaleur partielles, divisées respectivement par les valeurs de S qui leur correspondent, est égale à zéro.

On voit facilement que la proposition dont il s'agit est vraie, même dans le cas plus général où la surface F est limitée par une courbe fermée, comme cela a lieu dans la *fig.* 12. Que l'on imagine un nombre infiniment grand de

Fig. 12.



courbes adiabatiques infiniment voisines A, A_1, A_2, ... traversant la surface et un nombre infiniment grand de courbes S; on peut considérer l'élément *mn* comme coïncidant avec un élément d'une courbe S. La courbe donnée sera représentée alors par une ligne polygonale formée par un nombre infiniment grand d'éléments *mno* et analogue à celle de la *fig.* 11. Si dQ est la quantité de chaleur infiniment petite qu'il faut fournir dans le trajet *mn*, les équations (33) et (34) seront évidemment applicables ici, et l'équation (34) donnera, lorsqu'on aura remplacé le signe $\sum$ par le signe de l'intégrale,

$$(37) \qquad \int \frac{dQ}{S} = 0,$$

équation qui s'applique, à cause de son origine, seulement à

un cycle complet d'opérations, c'est-à-dire lorsque l'intégration porte sur tout le contour d'une courbe fermée.

La dernière équation ne nous donne pas d'ailleurs une proposition nouvelle, puisque, en établissant la deuxième équation fondamentale, nous avons choisi la fonction S de manière à avoir une différentielle exacte dans le second membre de l'équation (13) (p. 40) :

$$\frac{dQ}{AS} = \frac{X}{S}\,dp + \frac{Y}{S}\,dv.$$

Par suite, si nous intégrions cette dernière équation entre des limites égales, c'est-à-dire en supposant que les valeurs de p et de v fussent à la fin les mêmes qu'au commencement, la valeur de l'intégrale du prèmier membre serait égale à zéro, résultat précisément indiqué par l'équation (37).

VIII. — *Explication des propositions relatives aux cycles d'opérations au moyen de théorèmes analogues et connus de la Mécanique.*

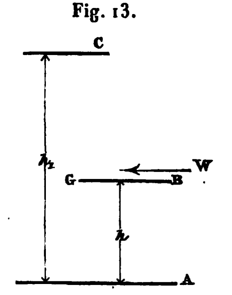
Nous pouvons donner aux formules relatives aux cycles simples et composés une interprétation qui facilitera l'intelligence des propositions ultérieures. Malgré la simplicité des considérations qui conduisent à ces formules, on suit difficilement la marche des idées dans une première étude; les formules finales paraissent même étranges, malgré la simplicité de leurs formes; aussi allons-nous les démontrer par des considérations mécaniques très-simples. Nous expliquerons d'abord les formules (29) et (30), que le cycle simple, représenté par la *fig.* 10, nous a fournies.

Imaginons trois plans horizontaux A, B, C, dont les distances, comptées à partir du premier, soient respectivement o, h et h_1. Sur le plan B, on met un corps de poids G; si ce poids descendait lentement et uniformément jusqu'au plan A, il y aurait, comme on sait, un travail produit

(38) $$Gh = W.$$

D'après cela on peut dire qu'en plaçant le poids G sur le

Fig. 13.



plan B nous avons à notre disposition un travail W et que ce travail nous est fourni.

Élevons maintenant le poids G lentement et uniformément au niveau C, il faudra *dépenser* un certain travail

$$(39) \qquad G(h_1 - h) = F.$$

Le travail W_1, qui est mis à notre disposition par le poids G à la hauteur h_1, est simplement

$$(40) \qquad W_1 = G h_1;$$

des équations (38) et (40) on tire

$$(41) \qquad G = \frac{W}{h} = \frac{W_1}{h_1},$$

et la substitution dans l'équation (39) donne

$$(42) \quad F = W_1 - W, \quad F = \frac{W}{h}(h_1 - h), \quad F = \frac{W_1}{h_1}(h_1 - h).$$

Ainsi, lorsqu'après avoir fourni au poids G, au niveau B, le travail W, on l'élève ensuite au niveau C, ce qui rend disponible le travail W_1, il se fait pendant ces opérations une *dépense de travail* déterminée par les équations (42). Nous avons, par conséquent, porté du travail d'un niveau à un niveau supérieur, et ce transport correspond à un travail qu'il a fallu dépenser, et qui, d'après les dernières équations, est proportionnel à la différence $W_1 - W$, à chacune des valeurs W et W_1 et aussi à la différence des hauteurs.

On peut aussi renverser le sens des opérations. Le poids G est placé au niveau C, et possède une quantité de travail disponible W_1; ce poids descend lentement au niveau B en produisant du travail, et, arrivé là, il possède la quantité de travail W; on aura réalisé *un bénéfice* de travail en transportant le poids d'un niveau à un niveau inférieur, bénéfice qui se déterminera également par les équations (42).

En comparant les formules précédentes aux équations (28), (29) et (30) (p. 60), que nous avons obtenues pour le cycle simple d'opérations, nous trouvons une analogie complète.

Nous avions d'abord établi la relation

$$\frac{Q}{AS} = \frac{Q_1}{AS_1},$$

puis le travail gagné ou dépensé était

$$F = \frac{Q_1}{A} - \frac{Q}{A},$$

ou

$$F = \frac{Q}{AS}(S_1 - S),$$

ou encore

$$F = \frac{Q_1}{AS_1}(S_1 - S).$$

Les quantités Q et Q_1 étaient évaluées en unités de chaleur. Comme nous les trouvons ici divisées par A, elles sont maintenant évaluées en unités de travail, et les quotients $\frac{Q}{A}$ et $\frac{Q_1}{A}$ sont analogues aux quantités de travail désignées tout à l'heure par W et W_1.

En continuant la comparaison, nous pouvons nous représenter S comme une *longueur* ou comme une hauteur, et l'expression

$$\frac{Q}{AS},$$

qui est analogue à

$$\frac{W}{h};$$

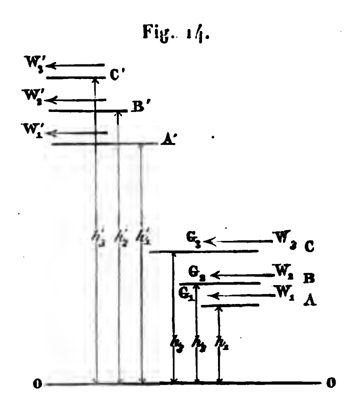
comme un *poids;* aussi appellerai-je cette quantité *poids thermique.* Le cycle simple peut être interprété de la manière suivante :

Fournir de la chaleur au corps dans le trajet *ab* (*fig.* 9), S étant constant, c'est donner à ce corps placé au niveau S la quantité $\frac{Q}{AS}$; lui enlever de la chaleur dans le trajet *cd*, c'est ôter la même quantité à ce corps placé au niveau S_1; enfin F représente le travail dépensé pour élever lentement et uniformément le poids $\frac{Q}{AS} = \frac{Q_1}{AS_1}$ du niveau S au niveau supérieur S_1. Si le cycle d'opérations est renversé, on donne au corps au niveau supérieur S_1 le poids thermique $\frac{Q_1}{AS_1}$, et par suite le travail $\frac{Q_1}{A}$; puis ce corps descend lentement au niveau inférieur S en produisant du travail, et on lui ôte ce poids thermique ainsi que le travail $\frac{Q}{A}$.

On peut interpréter avec la même simplicité le cycle composé de la *fig.* 11 (p. 62).

Plaçons les poids G_1, G_2, G_3 sur les plans horizontaux A, B, C

Fig. 14.



(*fig.* 14) situés à des distances h_1, h_2, h_3 au-dessus du plan OO; nous aurons à notre disposition les travaux $W_1 = G_1 h_1$, $W_2 = G_2 h_2$, $W_3 = G_3 h_3$; ce qui signifie que l'on pourrait gagner

ces travaux si les poids descendaient lentement au niveau inférieur OO. Élevons maintenant lentement les poids donnés au niveau des plans horizontaux supérieurs A', B', C' dont les distances respectives aux plans OO sont h'_1, h'_2, h'_3; il faut dépenser le travail total

$$F = G_1(h'_1 - h_1) + G_2(h'_2 - h_2) + G_3(h'_3 - h_3).$$

Nous possédons finalement à ces hauteurs les travaux

$$W'_1 = G_1 h'_1, \quad W'_2 = G_2 h'_2 \quad \text{et} \quad W'_3 = G_3 h'_3,$$

et si nous enlevons les poids, nous supprimons ces quantités de travail.

En portant les valeurs de W_1, W'_1, W_2, W'_2,... dans l'équation qui donne F, nous aurons

$$F = W'_1 - W_1 + W'_2 - W_2 + W'_3 - W_3,$$

ou, pour abréger,

$$(43) \qquad F = \sum(W).$$

Le travail dépensé, ou inversement gagné si on fait descendre lentement les poids des plans horizontaux supérieurs aux plans inférieurs, est donc égal à la somme algébrique des quantités de travail données ou retirées dans l'opération. La somme des poids que l'on se donne sur les plans A, B, C est

$$G_1 + G_2 + G_3 = \frac{W_1}{h_1} + \frac{W_2}{h_2} + \frac{W_3}{h_3},$$

et celle des poids que l'on supprime sur les plans A', B', C' est

$$G_1 + G_2 + G_3 = \frac{W'_1}{h'_1} + \frac{W'_2}{h'_2} + \frac{W'_3}{h'_3}.$$

Si on affecte maintenant les poids fournis du signe + et les poids enlevés du signe —, la somme algébrique de tous ces poids sera nulle, et on a pour le cas général

$$(44) \qquad \sum\left(\frac{W}{h}\right) = 0.$$

Nous voyons que les formules (43) et (44) ont la même forme

que les formules (35) et (36) qui se rapportent au cycle composé et réversible.

L'équation (35) exprime par conséquent que le travail gagné ou dépensé dans un cycle entièrement réversible est égal à la somme algébrique des quantités de chaleur fournies et enlevées, exprimées en unités de travail.

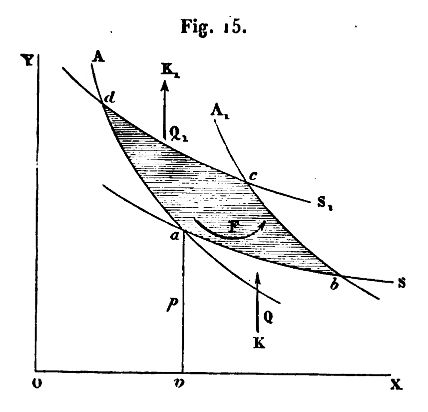
L'équation (36) indique que dans un pareil cycle la somme des poids thermiques est nulle, en d'autres termes qu'*il y a égalité entre la somme des poids thermiques fournis et celle des poids thermiques enlevés*.

IX. — *Hypothèse relative à la fonction* S *et transformation des équations fondamentales.*

Les propositions relatives à un cycle, et les explications que nous avons données, nous font trouver naturellement la signification probable de la fonction S.

Considérons un cycle simple. Nous imaginons que dans le trajet *ab* (*fig.* 15), pendant lequel la valeur de S reste con-

Fig. 15.



stante, la quantité de chaleur Q soit fournie par un corps K qui est mis en contact avec le corps intermédiaire, et qui jouit de la propriété de conserver à la fonction $S = f(p, v)$ sa valeur constante; c'est l'action du corps K qui fait varier la pression p et le volume v suivant la courbe *ab*. De même pen-

dant le trajet *cd* le corps intermédiaire doit rester en contact avec un corps K_1 qui absorbe la quantité de chaleur Q_1, et qui assujettit le corps intermédiaire à satisfaire à l'équation $S_1 = f(p, v) =$ const. Pour le moment nous ne chercherons pas à savoir s'il existe réellement des corps qui possèdent de telles propriétés; l'hypothèse que nous venons de faire ne nuit point à la généralité de nos observations.

Si le cycle s'achève de telle sorte que l'extrémité de l'ordonnée p décrive le contour de la surface F dans la direction de la flèche, d'après ce qui précède, le corps K fournit au corps intermédiaire, dans le trajet *ab*, le poids thermique $\frac{Q}{AS}$, tandis que le corps K_1 lui enlève dans le trajet *cd* le poids thermique $\frac{Q_1}{AS_1}$. Désignons par G ces deux poids, qui sont égaux en vertu de l'équation (28); le cycle pourra être considéré comme une opération dans laquelle le poids thermique G aura été transmis par un corps K, qui se trouve dans l'état S, à un autre corps K_1, dont l'état est S_1. Le travail F *dépensé* pour effectuer ce transport est, d'après ce qui a été dit plus haut,

$$F = G(S_1 - S),$$

et cette transmission est analogue à l'ascension lente et uniforme d'un poids G à la hauteur $S_1 - S$.

Si le cycle s'effectue dans un ordre inverse, le poids thermique G sera transporté du corps K_1 au corps K, et le travail *gagné* se calculera par la même formule; on peut dire encore dans ce cas que le poids thermique G est descendu lentement et uniformément de la hauteur $S_1 - S$ en produisant du travail. La transmission d'un certain poids thermique d'un corps à un autre au moyen d'un cycle réversible peut se comparer à l'ascension ou à la descente d'un poids G d'un niveau à un autre, à la condition que le corps ait le même état de mouvement (vitesse), à l'instant où il atteint le deuxième niveau et à l'instant où il quitte le premier. Imaginons un corps de poids G en repos à un certain niveau, et admettons qu'il arrive au second niveau avec une vitesse infiniment petite; le

travail produit pendant la descente sera un maximum, et le travail dépensé s'il y a ascension sera un minimum; car si la vitesse du corps au moment où il arrive au deuxième niveau était finie, le travail gagné après la chute serait moindre, et le travail absorbé pendant l'ascension serait supérieur au travail donné par la formule (39).

En général, il est *impossible* d'élever un poids G d'un niveau où il est en repos à un niveau supérieur sans *dépenser du travail.* Ce travail atteint *au moins* la valeur donnée par la formule (39).

Inversement, un corps peut descendre d'un niveau où il est en repos à un niveau inférieur de différentes manières en *produisant* du travail; ce travail est maximum quand le corps arrive au niveau inférieur avec une vitesse nulle; dans tous les autres cas le travail est inférieur à cette dernière valeur, et peut même être négatif.

Un cas particulier, qu'il faut surtout considérer ici, est celui où le corps descend d'un niveau à l'autre *librement, sans vaincre de résistance;* le travail gagné est alors zéro; la totalité du travail $W_1 = Gh_1$ que le corps possédait au niveau supérieur s'y retrouve au niveau inférieur; une portion, celle qui correspond à la hauteur de chute $(h_1 - h)$, s'y trouve à l'état de force vive.

En appliquant ces propositions au cycle simple, on en tire les conséquences suivantes :

1° Dans un cycle simple (*fig.* 15), où le poids thermique $G = \frac{Q}{AS} = \frac{Q_1}{AS_1}$ est transmis d'un corps K_1 à l'état S_1 à un autre corps K à l'état S, on gagne un travail $F = G(S_1 - S)$, et ce travail est un maximum;

2° La transmission du poids thermique peut s'effectuer aussi sans gain de travail, et peut être considérée alors comme une chute libre du poids thermique G de la hauteur $S_1 - S$;

3° Le poids thermique G ne peut jamais se transmettre *de lui-même* du corps K au corps K_1; une pareille transmission est toujours accompagnée d'une dépense de travail dont le minimum est $F = G(S_1 - S)$.

Il reste à savoir maintenant si les expériences confirment complétement ou au moins partiellement ces propositions, et quelle est, par suite, la véritable signification de la fonction S.

On doit répondre affirmativement; le plus souvent on observe une transmission libre de la chaleur d'un corps K_1 à un autre K, c'est-à-dire sans gain de travail. C'est ce qui arrive dans la communication de la chaleur par rayonnement et par conductibilité; les deux corps entre lesquels se fait une pareille transmission donnent constamment des indications thermométriques différentes, et on dit que celui des corps qui fournit la chaleur est à une température *supérieure* à celle du corps qui la reçoit. La transmission de la chaleur peut, d'après cela, se concevoir comme une opération dans laquelle un poids thermique tombe d'une température à une température inférieure.

Mais jamais on n'a vu de la chaleur se transmettre d'elle-même d'un corps qui possède une certaine température à un autre qui se trouve à une température supérieure; une pareille transmission est *toujours* accompagnée d'une dépense de travail.

L'expérience montre en outre que l'on peut gagner du travail quand la transmission de la chaleur d'un corps qui est à une certaine température, à un autre corps dont la température est supérieure, n'est pas directe, mais s'opère par l'intermédiaire d'un troisième corps.

Les machines à vapeur et les machines à air dilaté sont des appareils dans lesquels nous réalisons ce mode de transmission de la chaleur; le gaz du foyer est le corps qui fournit la chaleur, l'eau du réfrigérant est le corps qui la reçoit, l'eau de la chaudière (l'air atmosphérique, dans les machines à air chaud) est le corps intermédiaire.

Tout ce que nous avons exprimé dans les trois propositions énoncées ci-dessus, lorsque nous prenions la fonction S dans toute sa généralité, se confirme par l'expérience, quand nous remplaçons simplement cette fonction par la température.

Nous sommes autorisés par conséquent à admettre dans

nos recherches ultérieures que la *fonction* S *représente véritablement la température.*

Si tous les résultats que nous fournit cette hypothèse sont d'accord avec l'expérience, nous donnons, avec la définition rigoureuse de la fonction S, en même temps une définition précise de la mesure de la température.

Le changement d'état d'un corps qui a lieu dans une opération où S reste constant devient le changement d'état de ce corps, lorsqu'on suppose que sa pression et son volume changent, mais que sa température ne varie pas; la courbe $S = f(p, v) =$ const. correspond à un tel changement d'état.

Le corps K à l'état S, que nous considérions tout à l'heure dans le cycle simple, devient maintenant un corps qui possède une température déterminée (*).

(*) Il est vrai qu'on devrait d'abord admettre seulement que S est une fonction de la température, et non pas supposer que S soit en même temps la mesure même de la température, celle-ci étant prise avec sa signification ordinaire. Clapeyron a, le premier, pris pour S une fonction de la température : c'est la fonction C de son Mémoire qui a été introduite dans la théorie de la chaleur sous le nom de *fonction de Carnot ;* elle ne diffère de notre fonction S que par un facteur constant.

M. Clausius a traité plus tard ces questions avec plus de rigueur, en déclarant qu'il était impossible de transporter de la chaleur d'un corps à un autre ayant une température supérieure, sans dépenser du travail, proposition que nous avons donnée plus haut dans le texte. M. Clausius démontre aussi, à l'aide de ce théorème, que la fonction de Carnot ne peut être qu'une fonction de la température. Clapeyron a déjà donné la valeur de cette fonction pour certaines valeurs de la température; plus tard M. Helmholtz a reconnu sa forme (*Sur la conservation de la force,* Berlin, 1847, p. 36) en comparant l'équation de Clapeyron, notre seconde équation fondamentale, à la formule développée par M. Holtzmann (*Sur la chaleur et la force élastique des gaz et des vapeurs,* Mannheim, 1845); mais ce dernier fait certaines hypothèses qui ne paraissent plus admissibles aujourd'hui sous tous les points de vue. Les travaux ultérieurs de M. Clausius ont montré que la forme donnée par M. Helmholtz à la fonction de Carnot est la plus probable.

Si je fais, dès le commencement, une hypothèse sur la fonction S, en supposant qu'elle soit la température même, c'est surtout pour arriver déjà dans les considérations générales à une définition rigoureuse de la température, et pour faciliter l'intelligence des considérations qui suivent. On verra seulement dans les chapitres suivants que cette hypothèse a pour elle un grand degré de

L'unité de température peut être prise arbitrairement; nous choisissons le degré centigrade du thermomètre à air. Nous désignerons, selon l'usage, par t la température comptée à partir du zéro centigrade.

En supposant que S représente aussi la mesure de la température, nous ne devons pas considérer *à priori* S et t comme des valeurs identiques, car le choix du point de la glace fondante comme zéro de l'échelle centigrade est arbitraire; si la différence $S_1 - S$ figurait seule dans toutes les formules, nous pourrions sans doute, d'après l'hypothèse, la remplacer par $t_1 - t$. Mais, comme la fonction S ne se présente pas seulement sous cette forme, nous devons poser

$$(45) \qquad S = a + t,$$

a représentant une constante, dont nous trouverons plus tard la valeur en appliquant les formules générales à des cas particuliers.

Si nous trouvons a différent de zéro, nous en conclurons que le zéro de la température mesurée par S ne coïncide pas avec le point de la glace fondante. On voit, d'après cela, que notre hypothèse nous conduit à *un zéro déterminé rigoureusement par la nature.*

Les recherches ultérieures sur les gaz donneront pour la quantité a le nombre 273; lorsque la température doit être mesurée par la quantité S, on doit placer par conséquent le zéro de l'échelle thermométrique à 273 degrés au-dessous du point de la glace fondante. Ce point de l'échelle est appelé le zéro absolu, et la température mesurée à partir de ce point se nomme la *température absolue;* on la trouve en ajoutant 273 à la température de l'échelle centigrade.

---

probabilité; disons dès à présent que toutes les observations confirment sa justesse.

Il faut remarquer encore que M. Thomson (*Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1854) a déjà été conduit à définir ainsi la température par l'emploi des cycles d'opérations (*voyez* aussi JOCHMANN, *Considérations sur la théorie des gaz*, 1859).

Pour le moment, nous laissons la constante a indéterminée, mais nous pouvons mettre nos équations fondamentales (I'), (II'), (III') (p. 39 et suivantes) sous une autre forme, en remplaçant S par sa nouvelle valeur.

Puisqu'on a, d'après notre hypothèse,

$$S = a + t = f(p, v),$$

on trouve

$$\left(\frac{dS}{dp}\right) = \left(\frac{dt}{dp}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{dS}{dv}\right) = \left(\frac{dt}{dv}\right).$$

Nos équations fondamentales deviennent :

$$\text{(I)} \qquad \left(\frac{dY}{dp}\right) - \left(\frac{dX}{dv}\right) = 1;$$

$$\text{(II)} \qquad a + t = Y\left(\frac{dt}{dp}\right) - X\left(\frac{dt}{dv}\right);$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} dQ = A(X dp + Y dv); \\ dQ = \dfrac{A}{\left(\dfrac{dt}{dp}\right)}[X dt + (a + t) dv]; \\ dQ = \dfrac{A}{\left(\dfrac{dt}{dv}\right)}[Y dt - (a + t) dp]. \end{cases}$$

C'est sous cette forme que nous appliquerons les équations fondamentales aux corps pour lesquels on connaît la relation qui existe entre la température, la pression et le volume; tels sont les gaz et les vapeurs. Il reste seulement à déterminer les valeurs de X et de Y en fonction de p et de v, et cette détermination n'offre pas de difficulté, au moins pour ces derniers corps, comme nous le montrerons dans la seconde et la troisième section.

X. — *Des cycles incomplets et réversibles.*

Les recherches sur les cycles montrent qu'il y a deux espèces de courbes qui jouent un rôle important dans la théorie

de la chaleur; nous avons appelé, d'après M. Rankine, *courbe adiabatique* la première, dont on obtient l'équation en intégrant l'équation

$$X dp + Y dv = 0$$

(comme on l'a fait voir page 37); elle indique comment varient dans un corps la pression p et le volume v quand le changement d'état du corps s'effectue sans addition et sans soustraction de chaleur.

La seconde a été définie par l'équation

$$S = f(p, v) = \text{const.}$$

Quand on adopte l'hypothèse énoncée plus haut sur la signification de S, cette équation indique les variations de la pression et du volume lorsque la température du corps est maintenue constante pendant son changement d'état. Nous appellerons cette courbe, également d'après M. Rankine, *courbe isothermique*.

A ces deux courbes, il faut encore ajouter une troisième qui donne le moyen de représenter graphiquement d'une manière très-saisissante les changements d'état d'un corps, lorsqu'il y a addition de chaleur.

C'est la courbe qui représente la variation de la pression et du volume lorsque le *travail intérieur* U *reste constant*. D'après M. Cazin, nous l'appellerons *courbe isodynamique*, et son équation résulterait de l'intégration de l'équation

$$X dp + (Y - p) dv = 0,$$

comme cela a été dit p. 37 et 38.

Admettons que les trois équations de ces courbes soient connues pour le corps soumis à un changement d'état, qui s'effectue avec addition de chaleur dans le trajet *ab* (*fig.* 16); le travail intérieur aura passé de la valeur U qui se rapporte à l'état *a*, à la valeur U_1 qui se rapporte à l'état *b*, et un travail extérieur L aura été effectué. D'après l'équation (2), p. 26, on a

$$\frac{Q}{A} = (U_1 - U + L), \tag{46}$$

$\frac{Q}{A}$ désignant la quantité de chaleur Q mesurée en unités de travail. Le travail extérieur L sera représenté par l'aire de la

Fig. 16.

surface abv_2v_1 (*fig.* 16). Si l'on trace par le point a la courbe adiabatique aA, elle indiquera les variations de pression qu'on observerait s'il n'y avait ni addition ni soustraction de chaleur; on aurait alors, d'après l'équation (46),

$$L = U - U_1,$$

et si la dilatation se faisait jusqu'à ce que le travail intérieur fût $U_1 = 0$, il en résulterait

$$L = U.$$

Si l'on admet avec M. Rankine, ce qui est très-vraisemblable, que les courbes adiabatiques se rapprochent toutes asymptotiquement de l'axe OX, on reconnaît que la surface $aAXv_1$ (couverte dans la *fig.* 16 de hachures verticales) représente le travail intérieur U du corps dans l'état a, qui correspond au volume $Ov_1 = v_1$, et à la pression $v_1a = p_1$, puisque L serait mesuré dans un tel changement d'état par cette même surface $aAXv_1$.

La surface bA_1Xv_2 représenterait de même le travail intérieur U_1 pour l'état initial b. En admettant maintenant que le corps ait été amené le long de la courbe acb de l'état a à l'état b, on trouve la quantité de chaleur Q mesurée en unités de travail par l'équation (46) lorsqu'on y remplace les va-

leurs U, U_1, L par les arcs de courbes désignées,

$$\frac{Q}{A} = \text{surf.}\,(bA_1Xv_2) - \text{surf.}\,(aAXv_1) + \text{surf.}\,(abv_2v_1).$$

La valeur du second membre de cette équation est évidemment égale à l'aire de la surface $acbA_1A$ (couverte de hachures horizontales sur notre figure). On arrive ainsi à cette proposition, que la quantité de chaleur ajoutée ou soustraite, exprimée en unités de travail, est représentée par l'aire limitée d'une part par la ligne *acb*, et d'autre part par les deux lignes adiabatiques qui correspondent aux états initial et final.

Cette espèce de représentation graphique est due à M. Rankine (*); quoiqu'elle soit fort simple nous ne l'emploierons plus pour l'explication des cycles d'opérations, parce qu'elle ne peut pas servir pour mesurer réellement des quantités de chaleur au moyen de surfaces, et qu'il y aurait à chercher des aires de surfaces limitées en partie par deux courbes qui se rapprochent asymptotiquement.

Nous emploierons à cause de cela une autre représentation graphique, qui, lorsqu'il s'agit de la détermination de la quantité de chaleur introduite Q, a été indiquée pour la première fois par M. Cazin (**).

Supposons qu'un corps, dont l'état initial est donné par la pression p_1 et le volume v_1 (*fig.* 17), ait été amené à l'état *b*, caractérisé par la pression p_2 et le volume v_2, en suivant le trajet *acb* et au moyen de la quantité de chaleur Q qui lui a été fournie. Soient U et U_1 les travaux intérieurs correspondant aux états *a* et *b*. Menons par le point *a* la courbe isodynamique *a*U qui correspond à l'équation U = const., et par le point *b* la courbe adiabatique *b*A; ces courbes se couperont en un point *d*. Un travail extérieur L, représenté par la surface abv_2v_1 (couverte de hachures horizontales), a été effectué

(*) RANKINE, *A Manuel of the steam engine and other prime movers*, London and Glasgow, 1859.

(**) CAZIN, *Théorie élémentaire des machines à air chaud*; *Annales du Conservatoire des Arts et Métiers*, 1865, Paris, Gauthier-Villars.

pendant le passage de a à b, et le travail intérieur passe de la

Fig. 17.

valeur U à la valeur U_1; on a alors

$$\frac{Q}{A} = U_1 - U + L.$$

Si maintenant nous amenions le corps sur la courbe adiabatique (sans lui fournir ou lui enlever de la chaleur) jusqu'au point d'intersection d, le travail intérieur qui était U_1 deviendrait U, et le nouveau travail extérieur effectué L' serait représenté par la surface bdv_3v_2. Pour ce changement d'état on a l'équation

$$U - U_1 + L' = 0,$$

d'où

$$L' = U_1 - U = \text{surf. } bdv_3v_2.$$

La surface bdv_3v_2 (couverte de hachures verticales) donne par conséquent la variation du travail *intérieur* $U_1 - U$, tandis que la surface abv_2v_1 (couverte de hachures horizontales) représente le travail *extérieur* L effectué pendant le passage du corps de l'état a à l'état b. La somme de ces deux surfaces donne, d'après l'équation (46), la quantité de chaleur $\frac{Q}{A}$ évaluée en unités de travail; c'est celle qu'il faut fournir au corps pour l'amener, suivant le trajet donné, de l'état a à l'état b.

Il faut remarquer que l'on ne doit pas nécessairement mener la ligne adiabatique par le point final b; on peut aussi

tracer la courbe isodynamique U_1 relative à ce point, et mener alors une ligne adiabatique quelconque $d'A'$; la surface $b'd'v'_3v'_2$ (*fig.* 17) représente aussi bien la variation $U_1 - U$ du travail intérieur que la surface bdv_3v_2. C'est là le mode de représentation graphique imaginé par M. Cazin; on conçoit que cette méthode soit extrêmement propre à déterminer sans calculs, à l'aide de simples mesures de surfaces par le planimètre, le travail extérieur, la variation du travail intérieur, et la quantité de chaleur qu'il faut fournir au corps lorsque le trajet *ab* des changements d'état est donné graphiquement, par exemple au moyen d'un diagramme indicateur. Cette méthode suppose, il est vrai, la connaissance de la loi qui détermine le tracé de la courbe adiabatique et celui de la courbe isodynamique à partir des points *b* et *a*. Nous rechercherons plus tard pour certains corps les lois auxquelles doivent obéir ces courbes.

La proposition précédente est générale; elle reste donc vraie quand la courbe *ab* (*fig.* 17) est une courbe fermée; la surface limitée par cette courbe représente dans ce cas à la fois le travail extérieur et la quantité de chaleur fournie au corps pendant les changements d'état, et mesurée en unités de travail; la variation du travail intérieur est nulle, puisque le corps est revenu à l'état initial; nous avons alors un cycle complet réversible.

Mais si la courbe *acbd* (*fig.* 18) qui indique les changements d'état du corps n'est pas fermée, le cycle est incomplet et réversible.

Menons encore par le point de départ *a* (*fig.* 18) la courbe isodynamique *a*U, et par le point final *d* la courbe adiabatique *d*A; le *travail extérieur* sera toujours représenté par la surface couverte de hachures horizontales, et la *variation du travail intérieur* sera donnée par la surface à hachures verticales; l'ensemble de ces deux surfaces représente la quantité $\sum\left(\frac{Q}{A}\right)$, c'est-à-dire la somme algébrique des quantités de chaleur à fournir et à retirer, mesurées en unités de travail, dans le trajet *acbd*.

Nous avons trouvé plus haut (p. 63) encore une deuxième

Fig. 18.

équation pour un cycle complet, à savoir :

$$\sum\left(\frac{Q}{AS}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \int \frac{dQ}{AS} = 0;$$

elle indique que les poids thermiques à fournir et à retirer sont égaux et que leur somme algébrique est nulle.

Ces équations ne peuvent s'appliquer au cycle incomplet de la *fig.* 18; l'intégrale qui se rapporte alors seulement au trajet *abcd* a au contraire ici une valeur positive déterminée P; nous écrirons donc

$$(47) \qquad P = \int \frac{dQ}{AS}.$$

On peut dire par conséquent que la quantité P représente l'*excès de la somme des poids thermiques fournis sur celle des poids thermiques retirés.*

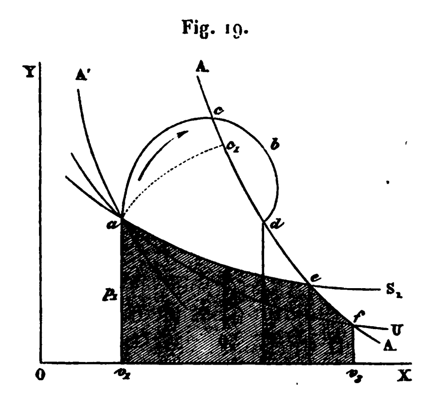
L'intégrale ne porte que sur le trajet *acbd*; prolongeons la courbe adiabatique *d*A en arrière, jusqu'au point d'intersection *c*; nous pouvons alors partager l'intégrale en deux parties, dont l'une correspond au trajet *ac*, l'autre au trajet *cbd*; mais cette dernière partie est évidemment nulle, puisque la surface *cbd* correspond à un cycle complet. Nous avons, d'après cela, une proposition très-simple : la valeur P de l'inté-

grale de la formule (47) représente *la somme des poids thermiques fournis dans le trajet ac.*

La quantité P se détermine par un procédé graphique très-simple :

Traçons par le point de départ a (*fig.* 19) la courbe isody-

Fig. 19.



namique aU et par le point d'arrivée d la courbe adiabatique dA, qui coupe la précédente au point f, et désignons par t_1 la température correspondant à l'état initial $a\,(p_1, v_1)$; la valeur correspondante de S sera

$$S_1 = a + t_1.$$

Menons encore par le point a la courbe isothermique aS_1, dont l'équation est $S_1 = f(p, v) = \text{const.}$, et qui rencontre la courbe adiabatique au point e.

A partir du point d, nous faisons parcourir au corps d'abord la portion de de la courbe adiabatique (sans addition ni soustraction de chaleur), puis nous le ramenons sur la courbe isothermique aS_1 à son état initial. Dans le trajet ea, il faut lui retirer une certaine quantité de chaleur Q_1.

Comme les changements du corps suivant $acdea$ forment un cycle complet, on a l'équation

$$P - \frac{Q_1}{AS_1} = 0,$$

et on a, par suite, pour la valeur l'intégrale de l'équation (47),

6.

la formule

$$(48) \qquad P = \frac{Q_1}{AS_1}.$$

Mais nous savons que la quantité $\frac{Q_1}{A}$ est représentée par la surface ombrée $aefv_3v_1$, et S_1 indique la température absolue $a + t_1$ relative à l'état initial a; pour avoir la somme des poids thermiques qu'il faut fournir, si le corps doit se trouver finalement à l'état initial, on n'a donc qu'à *diviser l'aire de cette surface par la température absolue* $a + t_1$.

Quand il s'agit de déterminer la quantité P, le chemin que le corps a suivi pour aller de a en c est indifférent; sa valeur ne changerait même pas si le corps passait du point a à quelque autre point quelconque c_1 de la ligne adiabatique dA.

Le point de départ même n'est pas forcément le point a; si on trace par ce point une deuxième ligne adiabatique aA', la valeur de P sera la même pour *tout* passage d'une ligne adiabatique à l'autre; ceci résulte immédiatement de l'équation (48) quand on tient compte en même temps de l'équation (28), p. 59.

L'intégrale P *a donc toujours la même valeur quand le corps, en partant du même point initial a* (*fig.* 19), *atteint la même ligne adiabatique.*

La fonction P *joue ainsi dans la théorie de la chaleur un rôle analogue à celui de la fonction potentielle en Mécanique, et les courbes adiabatiques sont analogues aux surfaces de niveau.*

Rien ne s'oppose à ce qu'on appelle la fonction P une *fonction potentielle,* mais je préfère considérer la quantité P dans certains cas comme un poids; cela facilite, comme on le verra, des recherches très-importantes pour les applications de la Mécanique.

XI. — *Des cycles non réversibles.*

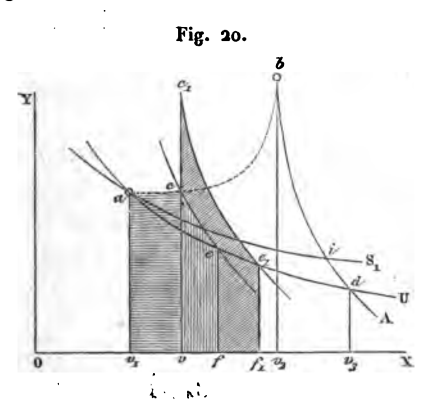
Jusqu'ici nous avons supposé que, pendant les changements d'état que subit un corps, la pression extérieure était

toujours égale à sa force expansive, ou mieux, que ces deux forces différaient infiniment peu l'une de l'autre. Dans ce cas, on doit considérer la pression extérieure comme une propriété du corps; la quantité de chaleur à fournir au corps est, pendant tout le temps que dure le changement, *complétement déterminée à chaque instant par le trajet déjà parcouru*, et le cycle est *réversible;* c'est-à-dire le corps retourne par le même trajet à son état initial, si la chaleur enlevée et la variation de pression suivent les mêmes lois dans un ordre inverse.

Les choses se passent autrement quand il n'y a plus égalité entre la pression extérieure et la force expansive; il se produit alors dans les corps des mouvements qui se manifestent ordinairement au dehors, et dont la force vive représente l'augmentation du travail intérieur, lorsqu'à la fin du changement le corps se retrouve à l'état d'équilibre. Nous allons montrer comment il faut étendre à ce cas les propositions ralatives à la représentation graphique des phénomènes d'un cycle incomplet, mais réversible.

Soit *acb* (*fig.* 20) la courbe qui, pendant le passage du corps

Fig. 20.



de l'état initial *a* à l'état initial *b*, règle la variation de la pression extérieure; on l'a ponctuée dans la figure pour indiquer qu'elle ne donne que la variation de la pression extérieure. Admettons que l'état final *b* soit pour le corps *un état d'équilibre*, c'est-à-dire qu'à ce moment il y ait de nouveau égalité entre la pression extérieure et la force expansive du corps, les

surfaces abv_2v_1 et bdv_3v_2 représenteront respectivement le travail extérieur et l'accroissement du travail intérieur (*voyez* p. 80); l'ensemble de ces deux surfaces donne la quantité de chaleur fournie Q, évaluée en unités de travail. Jusque-là il n'y a pas de différence entre le cas actuel et celui qui a été examiné sur la *fig.* 17; mais voici une différence essentielle.

Prenons sur la courbe *ab* un point quelconque *c* entre les extrémités *a* et *b*, menons l'ordonnée *cv* et la courbe adiabatique correspondante *ec*, qui coupe la courbe isodynamique du point *a* au point *e*; la surface $acvv_1$ donnera encore le *travail extérieur* effectué pendant le passage de *a* en *c*; mais les propositions relatives à l'accroissement du travail intérieur et à la chaleur fournie ne subsistent plus.

Comme nous supposons que le cycle n'est pas réversible dans la portion *ac* du trajet, parce que la pression extérieure n'est pas égale à la force expansive, mais qu'elle est moindre (c'est le seul cas possible), la portion de courbe *ac* nous renseignera *uniquement* sur la valeur du travail extérieur dans l'expansion du corps de v_1 à v, mais non pas sur l'accroissement de travail intérieur, ni, par suite, sur la quantité de chaleur fournie ou retirée au corps. La surface *cefv*, qui donne l'accroissement du travail intérieur daus un cycle réversible, *perd ici cette signification.*

Désignons par $p = cv$ (*fig.* 20) la pression *extérieure*, et par v le volume à l'état *c*, puis par p_1, v_1 la pression et le volume au commencement; la variation du travail intérieur dans le trajet *ac* n'est *plus* déterminée par les états initial et final (p_1, v_1) et (p, v) seuls, comme cela a eu lieu dans les recherches précédentes, parce que la quantité

$$dU = \left(\frac{dU}{dp}\right)dp + \left(\frac{dU}{dv}\right)dv$$

n'est pas une différentielle exacte. Dans l'équation fondamentale

$$dQ = A(dU + p\,dv),$$

nous pourrons bien intégrer le terme $p\,dv$, si nous connaissons la loi de la variation de la pression extérieure, c'est-à-

dire si la courbe ac est donnée; mais il n'en est pas de même de dU. Le problème reste donc indéterminé, *tant qu'on ne possède pas, avec le tracé de la courbe acb, une autre donnée sur l'ensemble du changement.*

Cette deuxième donnée est ordinairement la loi d'après laquelle est fournie la chaleur qui vient du dehors.

Imaginons qu'en suivant le chemin ab le corps soit arrivé au point c, et que le volume v_1 ait augmenté et soit devenu v; arrêtons en ce moment l'expansion du corps, en donnant à la pression extérieure un accroissement égal à celui que prend la force expansive; ne fournissons plus de chaleur à partir de ce même instant; la pression $cv = p$ s'approchera lentement de la valeur vc_1 qui doit correspondre à l'état d'équilibre.

Traçons par le point c_1 la courbe adiabatique c_1e_1, qui rencontre en e_1 la courbe isodynamique aU; la surface $vcc_1e_1f_1$ (somme des deux surfaces ombrées, l'une verticalement et l'autre obliquement dans la *fig.* 20) représentera évidemment l'accroissement du travail *intérieur* obtenu dans le trajet ac; la surface v_1acv, ombrée horizontalement, donnera le travail *extérieur*, et la somme de toutes les surfaces ombrées représentera en unités de travail la quantité de chaleur fournie dans le trajet ac par la source de chaleur.

Étant donnée cette quantité de chaleur, on pourrait donc, à chaque moment du passage du corps de l'état a à l'état b, déterminer, outre le travail extérieur, l'accroissement du travail intérieur. Si l'on donnait la courbe que suit le point c_1 pour aller de a en b, on pourrait, de même, connaître toutes les circonstances du changement. En rapprochant ces résultats des précédents, on verra clairement sur la figure dans quelles circonstances le cycle est réversible ou ne l'est pas; il est réversible quand le point c_1 est situé sur la courbe des pressions, et il ne l'est pas quand cela n'a pas lieu.

L'accroissement total du travail intérieur est donné, comme on vient de le voir, par la surface $vcc_1e_1f_1$; mais cette surface peut se partager en deux parties : la partie couverte de hachures verticales $vcef$ représente l'accroissement du travail intérieur quand on suppose que dans le trajet ac le corps ait

résisté à une pression égale à sa force expansive; l'autre partie $ecc_1e_1f_1f$ (à hachures obliques) représente le travail intérieur lorsque le changement d'état cesse subitement au moment où le corps est à l'état c. C'est ce travail qui correspond probablement à la force vive du *mouvement extérieur* des particules, telle qu'elle résulte du dérangement de leur position d'équilibre. Appliquons ces considérations à un exemple. Supposons qu'un piston pouvant se mouvoir dans un cylindre ouvert à sa partie supérieure y retienne une certaine quantité de gaz; ce gaz, occupant à peu près la moitié du volume du cylindre, exercera une certaine pression sur le piston, qui est fixé pour le moment. Aussitôt qu'on exercera sur la face extérieure du piston une pression inférieure à celle du gaz et qu'on lui rendra sa liberté, il sera vivement repoussé. Pour généraliser davantage la question, nous supposerons qu'on fournisse de la chaleur au gaz pendant le recul du piston, que nous admettrons sans poids, et nous l'arrêterons subitement; le gaz se trouvera alors tout à fait dans l'état qui, sur la *fig.* 20, a été désigné par la lettre c. Les particules du gaz auront des mouvements giratoires très-violents, et reviendront seulement peu à peu à l'état de repos; le changement du travail intérieur ne peut se mesurer à l'aide de la pression et du volume du gaz que dans ce nouvel état d'équilibre; la pression aura alors passé de la valeur vc à la valeur vc_1 (*fig.* 20).

Si, pendant cette expérience, on n'avait ni fourni ni enlevé de la chaleur au gaz, le travail intérieur serait moindre, dans le nouvel état d'équilibre qu'au commencement, d'une quantité égale au travail extérieur. Le travail intérieur reprendrait même à la fin exactement la valeur qu'il avait au commencement, dans le cas où le travail extérieur serait nul, ce qui arriverait s'il y avait devant le piston un espace privé d'air; alors, sur la *fig.* 20, le point c_1 serait sur la ligne isodynamique aU.

Reprenons le cas général et supposons que le corps ait parcouru tout le trajet acb, et ait repris en b l'état d'équilibre; la quantité de chaleur totale fournie au corps pendant le changement d'état sera mesurée en unités de travail par la surface

que limitent la courbe des pressions *acb*, la ligne adiabatique *bd* et les ordonnées av_1 et dv_3; mais *ici le gaz ne saurait être ramené à son état initial par le même trajet, parcouru en sens inverse, avec une soustraction de chaleur suivant la loi inverse de celle de l'introduction dans le trajet direct.*

Lorsque le corps doit résister pendant son expansion à une pression extérieure moindre que sa force expansive, une partie de la chaleur fournie, et en général aussi une partie du travail intérieur, sont employées au commencement à produire des mouvements dans les particules du corps, qu'il ne faut pas confondre avec le mouvement calorifique proprement dit, avec le mouvement moléculaire, mais qui se transforment en mouvement moléculaire, et qui finalement se manifestent par un accroissement du travail intérieur. Pour ramener le corps à l'état initial, il faut néanmoins suivre un chemin qui aurait pu être pris pour un trajet direct.

Traçons par le point de départ *a* (*fig.* 20) la ligne isothermique aS_1, qui coupe la courbe adiabatique *b*A au point *i*; on peut, par exemple, ramener le corps à son état initial de la manière suivante. On fera parcourir au corps d'abord la portion *bi* de la ligne adiabatique, sans addition ni soustraction de chaleur; puis la portion *ia* de la ligne isothermique, avec soustraction d'une quantité de chaleur Q_1, qui est exprimée en travail par la surface $aidv_3v_1$. Soit Q la quantité de chaleur fournie au corps dans le trajet non réversible *acb*; le travail extérieur F gagné dans ce cycle est

$$F = \frac{Q - Q_1}{A},$$

puisque ce travail est représenté par la surface *acbia*. Le cycle simple, que nous considérons, *n'est pas réversible*, car il s'y trouve une portion de trajet *acb* que le corps ne peut parcourir en sens inverse dans des circonstances identiques à celles du trajet direct. L'équation précédente est néanmoins la même que celle qui a été trouvée pour le cycle réversible, et

il est facile de voir que la formule

$$(49) \qquad F = \sum \left(\frac{Q}{A}\right),$$

trouvée pour le cycle composé réversible, peut s'appliquer également au cycle non réversible; on entend sous cette dernière dénomination un cycle dans lequel le corps revient à son état initial en parcourant une suite quelconque de lignes dont quelques-unes seulement peuvent être parcourues en sens inverse.

Reste à savoir si la deuxième formule

$$\sum \left(\frac{Q}{AS}\right) = 0,$$

établie pour le cycle réversible (p. 63), reste applicable dans le cas actuel. Nous avons montré, en traitant du cycle incomplet, que l'intégrale

$$\int \frac{dQ}{AS}$$

conserve constamment la même valeur quand le corps passe, par un trajet *réversible*, de son état initial à un point quelconque d'une ligne adiabatique donnée.

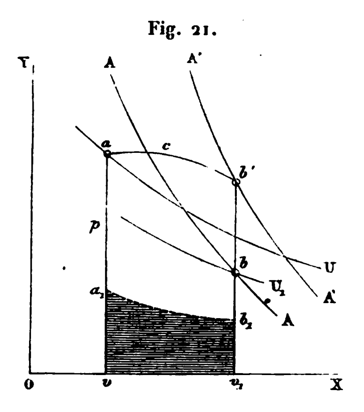
Faisons d'abord voir que cette intégrale a toujours une valeur moindre, si le passage se fait par un trajet non réversible, que s'il se fait par un trajet réversible.

Soit $a(p, v)$ l'état initial d'un corps (*fig.* 21) qui doit se dilater de Ov à Ov_1, en surmontant une pression extérieure qui varie suivant la courbe $a_1 b_1$; la surface couverte de hachures horizontales représente le travail extérieur produit pendant la dilatation de v en v_1. Admettons que pendant cette dilatation on n'ait ni fourni ni enlevé de la chaleur au corps. Lorsque le volume a atteint la valeur v_1, la pression a passé de la valeur $v_1 b_1$ à la valeur $v_1 b$, et l'équilibre s'est établi sous cette dernière pression. Désignons le travail intérieur par U à l'état a, et par U_1 à l'état final b; le travail extérieur L, qui est donné par la surface ombrée, a pour valeur

$$L = U - U_1.$$

Menons par le point b la ligne adiabatique AbA; le corps

Fig. 21.



passe alors du point a au point b de cette ligne, et la valeur de l'intégrale $\int \frac{dQ}{AS}$ est nulle, puisqu'on n'a point fourni de chaleur. Mais si, pendant ce passage et dans les mêmes circonstances, on avait fourni la quantité de chaleur Q, le corps se serait trouvé à la fin de l'opération à l'état b' (*fig.* 21), auquel correspond la ligne adiabatique $A'b'A'$; l'intégrale

$$\int \frac{dQ}{AS}$$

aurait alors sans doute une valeur déterminée, parce que le corps aurait passé de la ligne AA à la ligne A′A′; *mais cette valeur serait évidemment plus petite que celle qu'on aurait trouvée en amenant le corps de l'état a à l'état b′ par un trajet réversible.*

Pour le cas général, on trouve donc la loi suivante :

Lorsqu'un corps passe d'un état à un autre, la somme des poids thermiques fournis a la même valeur P, *quel que soit le trajet, pourvu qu'il soit réversible; si cette dernière condition n'est pas remplie, la valeur de cette somme change avec le trajet, et elle est toujours plus petite que celle qui correspond à un trajet réversible.*

Quand on fait passer le corps de l'état b' à l'état initial par le

trajet $b'ca$, la somme $\int \frac{dQ}{AS}$ des poids thermiques qu'il faut fournir sera encore P, car ce passage inverse ne peut se faire que par un trajet réversible; mais pour le passage direct de l'état initial à l'état b', cette somme était *plus petite* que P. D'où il résulte que pour un cycle complet *non réversible*, la somme des poids thermiques doit être négative; en la désignant par N, on aura l'équation

$$\int \frac{dQ}{AS} = -N \tag{50}$$

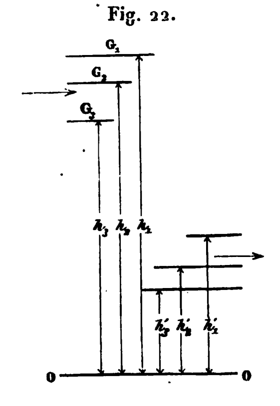
pour un cycle complet et non réversible, tandis que le cycle complet et réversible avait donné (p. 64) l'équation

$$\int \frac{dQ}{AS} = 0.$$

Le dernier théorème se trouve dans l'ouvrage de M. Clausius (*), mais il y est démontré d'une autre manière.

Nous avons comparé (p. 66) les phénomènes relatifs à un cycle réversible à l'ascension ou à la descente lente et uni-

Fig. 22.



forme de poids. Faisons la même comparaison pour le cycle non réversible.

(*) CLAUSIUS, Mémoires nos IV, V et VI.

Plaçons à des hauteurs h_1, h_2, h_3,... les poids G_1, G_2, G_3,...; les travaux disponibles sont

$$(51)\qquad \begin{cases} W_1 = G_1 h_1, \\ W_2 = G_2 h_2, \\ W_3 = G_3 h_3. \end{cases}$$

Laissons descendre ces poids aux niveaux inférieurs h'_1, h'_2, h'_3,..., mais supposons que les résistances que ces poids doivent vaincre soient *plus petites* que ces poids eux-mêmes, ils arriveront aux niveaux h'_1, h'_2, h'_3 avec des vitesses w_1, w_2, w_3 et les travaux disponibles sur ces plans seront

$$W'_1 = G_1\left(h'_1 + \frac{w_1^2}{2g}\right),$$
$$W'_2 = G_2\left(h'_2 + \frac{w_2^2}{2g}\right),$$
$$W'_3 = G_3\left(h'_3 + \frac{w_3^2}{2g}\right);$$

ou bien, si nous désignons par x_1, x_2, x_3,... les hauteurs dues aux vitesses w_1, w_2, w_3 :

$$(52)\qquad \begin{cases} W'_1 = G_1 (h'_1 + x_1), \\ W'_2 = G_2 (h'_2 + x_2), \\ W'_3 = G_3 (h'_3 + x_3). \end{cases}$$

On tire de là, pour le bénéfice de travail,

$$F = W_1 + W_2 + W_3 - W'_1 - W'_2 - W'_3,$$

ou

$$F = \sum (W),$$

formule qui est identique à l'équation (49). La valeur de la somme

$$\sum\left(\frac{W}{h}\right) = \frac{W_1}{h_1} + \frac{W_2}{h_2} + \frac{W_3}{h_3} - \frac{W'_1}{h'_1} - \frac{W'_2}{h'_2} - \frac{W'_3}{h'_3}$$

se détermine à l'aide des équations (51) et (52) de la manière

suivante. Des équations (52) on tire :

$$\frac{W'_1}{h'_1} = G_1\left(1 + \frac{x_1}{h'_1}\right), \simeq \frac{W_1}{h_1} + \frac{G_1 x_1}{h'_1}$$

$$\frac{W'_2}{h'_2} = G_2\left(1 + \frac{x_2}{h'_2}\right),$$

$$\frac{W'_3}{h'_3} = G_3\left(1 + \frac{x_3}{h'_3}\right).$$

Si dans ces équations on remplace G_1, G_2, G_3 par leurs valeurs tirées des équations (51), on trouve

$$\frac{W_1}{h_1} - \frac{W'_1}{h'_1} = -G_1\frac{x_1}{h'_1},$$

$$\frac{W_2}{h_2} - \frac{W'_1}{h'_1} = -G_2\frac{x_2}{h'_2}, \ldots$$

En additionnant et employant les notations connues, on a

$$\sum\left(\frac{W}{h}\right) = -\sum\left(\frac{Gx}{h'}\right),$$

équation identique à l'équation (50), si nous désignons la somme du second membre par N. Lorsque les poids arrivent aux niveaux inférieurs avec des vitesses nulles, on a évidemment $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots$, et, par suite,

$$\sum\left(\frac{W}{h}\right) = 0,$$

résultat déjà trouvé pour le cycle réversible.

Cette représentation explique clairement les phénomènes qui se passent dans les cycles d'opérations; dans un cycle non réversible nous n'avons pas le maximum du travail gagné, lorsque la chaleur venant d'une source passe d'une certaine température à une température inférieure; ou, ce qui est analogue, on ne laisse pas descendre le poids de toute la hauteur de chute donnée, mais on le retire à un niveau situé plus haut que le niveau inférieur donné.

Il en est de même dans le cas inverse. Lorsque dans un cycle non réversible, on y fait passer de la chaleur d'une cer-

taine température à une température supérieure, on n'a pas le minimum du travail dépensé. On élève, pour ainsi dire, des poids d'un certain niveau à un niveau supérieur, non pas uniformément, mais avec une vitesse croissante.

Nous reviendrons plus tard sur les questions que nous venons de traiter, nous démontrerons encore d'une autre manière les théorèmes que nous avons établis, et nous chercherons une nouvelle équation pour déterminer la valeur N de l'intégrale de l'équation (50). Nous trouverons plus loin des occasions plus favorables pour expliquer clairement la signification de ces propositions, et leur application à des cas particuliers aux gaz et aux vapeurs.

DEUXIÈME SECTION.

RECHERCHES SUR LES GAZ PERMANENTS.

I. — *Lois de Mariotte et de Gay-Lussac.*

On appelle *gaz permanents* les gaz que l'on n'a pu liquéfier ni solidifier jusqu'à présent par aucun moyen : les vapeurs sont, au contraire, des espèces de gaz qui proviennent des corps liquides ou solides; on les obtient ordinairement en fournissant de la chaleur à ces derniers, et on peut les ramener à leur état primitif par des moyens convenables.

Il n'existe très-probablement aucun gaz permanent : l'impossibilité où l'on est de transformer les gaz appelés *permanents* vient sans doute de l'insuffisance des moyens dont nous pouvons disposer; et en effet certains gaz, par exemple l'acide carbonique, comptés autrefois parmi les gaz permanents, appartiennent maintenant aux vapeurs.

On conserve néanmoins cette distinction entre les fluides aériformes, et elle se justifie jusqu'à un certain point dans les recherches qui nous occupent.

Lorsqu'on applique, en effet, les principes fondamentaux de la théorie mécanique de la chaleur à l'examen des gaz et des vapeurs, en tenant compte des résultats donnés par les expériences, on trouve pour ces deux espèces de fluides des formules fondamentales *différentes*. La première série de formules se rapporte uniquement aux gaz permanents, et la seconde ne peut servir que pour les vapeurs, et même seulement pour les vapeurs saturées, c'est-à-dire pour les vapeurs en contact avec leurs liquides générateurs. Il est certain cependant qu'un lien commun unit ces deux séries de formules, et qu'elles doivent pouvoir se déduire des mêmes formules

fondamentales encore inconnues. Les formules auxquelles la théorie mécanique de la chaleur a conduit jusqu'à présent n'expriment que les propriétés de certains états limites. Les gaz permanents sont, sans nul doute, des vapeurs très-éloignées de leur point de saturation, qui ont besoin d'être extrêmement comprimées et refroidies pour passer à l'état liquide; c'est ce que l'on fait ordinairement pour condenser les vapeurs. Les vapeurs saturées sont au contraire des gaz qui ont atteint le point de condensation, c'est-à-dire un état dans lequel elles se liquéfient par la moindre diminution de volume et le plus petit refroidissement.

Nous allons d'abord chercher les équations relatives au premier état limite, équations qui ne s'appliquent qu'à un gaz parfaitement permanent, c'est-à-dire un gaz *idéal;* il restera ensuite à examiner jusqu'à quel point tel ou tel gaz réel, dit *permanent*, s'approche par ses propriétés d'un gaz parfait.

Ces gaz sont jusqu'à présent les seuls corps pour lesquels on connaisse la relation qui existe entre le volume, la pression et la température; cette relation est donnée par les lois de Mariotte et de Gay-Lussac.

On les représente ordinairement par la formule

$$(53) \qquad \frac{v}{v_0} = \frac{p_0}{p} \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_0},$$

dans laquelle v et v_0 désignent les volumes de l'unité de poids d'un certain gaz, p et p_0 ses pressions aux températures t et t_0 (mesurées en degrés centigrades); α est le coefficient de dilatation des gaz. Lorsque les quantités p_0, v_0 et t_0 caractérisent l'état initial de l'unité de poids du gaz, pris pour terme de comparaison, et quand on fait la température initiale $t_0 = 0°$, on tire facilement de la dernière formule, la relation

$$(54) \qquad \frac{pv - p_0 v_0}{p_0 v_0} = \alpha t.$$

C'est cette formule dont s'est servi M. Regnault pour déterminer par l'expérience le coefficient de dilatation α des différents gaz.

Dans une première série d'expériences, on maintint le gaz sous un volume constant, on porta la température de 0 à 100 degrés, et on observa l'accroissement de la pression de p_0 à p. On a, pour ce cas, d'après la formule (54),

$$\alpha = \frac{p - p_0}{100 p_0}.$$

Dans une deuxième série d'expériences, on opéra au contraire sous une pression constante, et on observa l'augmentation de volume pour un accroissement de température de 0 à 100 degrés; pour ce cas, la formule (54) donne

$$\alpha = \frac{v - v_0}{100 v_0}.$$

En opérant sur différents gaz, M. Regnault n'obtint pas par les deux méthodes les mêmes valeurs du coefficient de dilatation α; ainsi

Pour l'air atmosphérique, à volume constant..	$\alpha = 0,003665$
Pour l'air atmosphérique, à pression constante.	$\alpha = 0,003670$
Pour l'hydrogène, à volume constant.........	$\alpha = 0,003667$
Pour l'hydrogène, à pression constante.......	$\alpha = 0,003661$
Pour l'acide carbonique, à volume constant....	$\alpha = 0,003668$
Pour l'acide carbonique, à pression constante..	$\alpha = 0,003710$

Les deux premiers gaz sont considérés comme des gaz permanents; l'acide carbonique est rangé parmi les vapeurs.

Ces indications, jointes aux résultats des expériences faites par M. Regnault sur d'autres gaz, démontrent que les valeurs du coefficient de dilatation α déterminées par les deux méthodes diffèrent un peu pour le même gaz permanent, et que ces valeurs ne sont pas non plus tout à fait les mêmes pour tous les gaz permanents; tandis que, pour les vapeurs, la différence entre les nombres trouvés par les deux méthodes est plus grande, et ces nombres sont notablement plus grands que ceux qui se rapportent aux gaz permanents.

On trouva en outre dans ces expériences, que le coefficient α à volume constant augmentait avec la pression ini-

tiale p_0, et que le coefficient à pression constante augmentait aussi avec la pression.

On obtint, par exemple, dans les expériences faites par la méthode des volumes variables :

	Pressions en millimètres de mercure.	α
Air atmosphérique	760	0,0036706
	2525	0,0036944
Hydrogène	790	0,0036613
	2520	0,0036616
Acide carbonique	760	0,0037099
	2545	0,0038455

Nous devons conclure de ces nombres qu'*aucun* gaz ne suit *complétement* la loi de Mariotte et de Gay-Lussac, et que les vapeurs s'en éloignent le plus; mais que la dilatabilité des gaz se rapproche d'autant plus de celle des gaz parfaits que la pression sous laquelle se fait la dilatation est plus faible.

Supposons que la vraie valeur du coefficient de dilatation d'un gaz parfait soit α, et que cette valeur croisse proportionnellement à la pression; en désignant par α_1 et α_2 les valeurs de α qui correspondent à la pression p_1 et à la pression supérieure p_2, on aurait

$$\alpha_1 = \alpha + \beta p_1 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \alpha + \beta p_2.$$

Si nous éliminons β entre ces deux équations, nous aurons pour la valeur de α

$$\alpha = \frac{\alpha_1 p_2 - \alpha_2 p_1}{p_2 - p_1}.$$

En nous servant des valeurs du tableau précédent, nous aurons (*) :

	α	$\frac{1}{\alpha}$
Air atmosphérique	0,0036603	273,20
Hydrogène	0,0036612	273,13
Acide carbonique	0,0036522	273,81

(*) MOUSSON, *Die Physik auf Grundlage der Erfahrung;* Zurich, 1860, t. II, p. 59.

On conclut de tout ce qui précède que l'hydrogène *se rapproche le plus* d'un gaz parfait, et que nous pouvons prendre sans hésitation, pour la valeur inverse du coefficient de dilatation d'un gaz parfait, le chiffre 273, et pour la valeur correspondante de α, la valeur 0,003663.

Cette dernière valeur de α diffère si peu de celle qu'on a trouvée pour l'air atmosphérique, que ce gaz, dont nous ferons usage exclusivement dans la suite, peut être également considéré comme un gaz permanent.

Cela posé, mettons l'équation (53) sous une forme plus commode, due à Clapeyron. Pour cela, divisons le numérateur et le dénominateur du second membre par α, et posons $\frac{1}{\alpha} = 273$, il viendra

$$\frac{v}{v_0} = \frac{p_0}{p}\,\frac{273 + t}{273 + t_0};$$

et, par suite,

$$(55)\qquad \frac{pv}{273 + t} = \frac{p_0 v_0}{273 + t_0}:$$

ce qui montre que la valeur

$$\frac{pv}{273 + t}$$

est constante pour un gaz permanent déterminé. En désignant cette valeur constante par R, on écrira

$$(56)\qquad pv = \mathrm{R}(273 + t).$$

C'est sous cette dernière forme que nous emploierons dorénavant la loi de Mariotte et de Gay-Lussac.

Au lieu du volume v de l'unité de poids du gaz, on peut introduire le poids spécifique ou la densité, c'est-à-dire *le poids de l'unité de volume* (poids d'un mètre cube de gaz mesuré en kilogrammes). En désignant cette quantité par γ, on a, d'après la définition,

$$v\gamma = 1;$$

et, par suite,

$$(57)\qquad \frac{p}{\gamma} = \mathrm{R}(273 + t).$$

On peut interpréter les équations (56) et (57) de la manière suivante. Le produit pv dans l'équation (56) représente une quantité de travail; c'est le travail produit par l'unité de poids du gaz renfermé dans un cylindre, où il se dilate en poussant un piston, et surmontant une pression extérieure constante p. L'équation (56) montre que ce travail est d'autant plus grand que la température est plus élevée.

On peut encore considérer la quantité pv ou $\frac{p}{\gamma}$ comme une longueur; elle représente en effet la hauteur d'une colonne d'air dont la densité constante est γ, et qui, par son poids, exerce la pression p sur l'unité de surface.

Admettons que l'équation (57) se rapporte à un gaz déterminé. Pour un autre gaz, sous la même pression p et pour la même température t, la densité γ prendra la valeur γ_1, et la constante R la valeur R_1, de telle sorte que pour ce gaz on aura la relation

$$\frac{p}{\gamma_1} = R_1(273 + t).$$

Divisons l'équation (57) par cette dernière équation, membre à membre, nous aurons

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{R}{R_1}.$$

Mais le quotient $\frac{\gamma_1}{\gamma}$ est la densité du second gaz relativement au premier: la désignant par ε, il vient donc

$$R = R_1 \varepsilon;$$

d'où l'on conclut que la quantité $R_1 \varepsilon$ est constante pour tous les gaz permanents.

Si nous considérons l'air atmosphérique comme un gaz permanent, dont la constante caractéristique est R, nous avons pour un gaz quelconque la formule

$$pv = \frac{p}{\gamma} = \frac{R}{\varepsilon}(273 + t).$$

Au lieu de nous servir de cette relation, nous supposerons, dans ce qui suit, que la quantité R soit déterminée pour chaque gaz permanent, et nous emploierons la loi de Mariotte et de Gay-Lussac sous une des formes (56) ou (57).

M. Regnault a trouvé pour l'air atmosphérique, à la température zéro, et sous la pression moyenne de 760 millimètres, c'est-à-dire sous la pression $p = 10334^{kg}$ par mètre carré,

$$\gamma = 1,29318^{kg}.$$

La substitution de cette valeur dans l'équation (57) donne pour l'air atmosphérique

$$R = 29,272.$$

Le tableau suivant donne encore les résultats des expériences de M. Regnault pour quelques gaz simples et permanents (*) :

	Valeurs de γ.	Densité ε relativement à l'air atmosphérique.	Valeurs de R
Air atmosphérique....	1,29318	1,00000	29,272
Azote..............	1,25616	0,97137	30,134
Oxygène............	1,42980	1,10563	26,475
Hydrogène..........	0,08957	0,06926	422,612

(*) Pour l'acide carbonique, qui appartient aux vapeurs et qui doit présenter des écarts plus grands relativement à la loi de Mariotte et de Gay-Lussac, M. Regnault a trouvé $\gamma = 1,97741$ et $\varepsilon = 1,52901$; d'où $R = 19,143$.

Remarque. — C'est peut-être seulement par un hasard remarquable que la valeur de R de l'hydrogène, c'est-à-dire du gaz qui se rapproche le plus d'un gaz parfait, est presque égale à l'équivalent mécanique de la chaleur, 424 kilogrammètres. En modifiant légèrement les chiffres de M. Regnault, on arriverait même à l'égalité; si l'on rapportait, en outre, les poids spécifiques de tous les gaz, non plus à l'air atmosphérique, mais à l'hydrogène (comme on le fait pour les poids atomiques), les formules que nous trouverons par la suite dans l'étude des gaz se simplifieraient considérablement. Admettons que pour l'hydrogène on ait $R = 424$, et que ε soit le poids spécifique d'un gaz relativement à l'hydrogène, on aurait pour ce gaz $R = \frac{424}{\varepsilon}$; mais le produit AR, dans lequel A représente l'équivalent calorifique de l'unité de travail, c'est-à-dire $\frac{1}{424}$, joue

Les valeurs de γ se rapportent à la *latitude de Paris*. A cause de l'accélération g de la pesanteur, ces valeurs sont un peu différentes en d'autres lieux; mais on peut négliger ces différences parce qu'elles sont extrêmement petites.

Puisque, d'après ce que nous savons, les véritables gaz de la nature ne suivent pas entièrement la loi de Mariotte et de Gay-Lussac, la quantité R de l'équation (56) n'est pas rigoureusement constante; mais cette quantité doit être considérée comme une fonction de p et de v, fonction qui, il est vrai, varie extrêmement peu avec ces quantités. Les efforts tentés pour trouver une équation qui caractérise rigoureusement les gaz ont été jusqu'à présent infructueux, et les formules empiriques qui ont été établies dans ce but (*) ne peuvent servir de base pour des recherches théoriques.

Comme cet Ouvrage est destiné essentiellement aux besoins de la Mécanique appliquée et comme c'est surtout l'air atmosphérique qui nous intéresse parmi les gaz permanents, nous emploierons dans la suite l'équation (56) sans corrections; cela peut se faire sans inconvénient pour l'air atmosphérique, précisément parce que, pour ce gaz, les écarts sont très-faibles.

---

dans tout ce qui va suivre un rôle très-important. La valeur de ce produit serait donc

$$AR = \frac{1}{\varepsilon}.$$

L'emploi de cette relation ne serait pourtant pas justifié, malgré l'accord presque parfait avec les résultats des expériences, si on ne parvenait à en démontrer l'exactitude par des considérations théoriques.

(*) Sur les écarts de la loi de Mariotte et de Gay-Lussac, *voyez* entre autres :

JOULE et THOMSON, *On the thermal effects of fluids in motion : Phil. Transactions for* 1854.

JOCHMANN, *Beiträge zur Theorie der Gaze : Programm des Kölnischen Realgymnasii*, 1859.

REYE, *Die mechanische Wärmetheorie und das Spannungsgesetz der Gase : Inaugural-Dissertation*, Göttingen, 1861.

SCHRÖDER VAN DER KOLK, *Ueber die Abweichungen der wirklichen Gase vom Mariotte'schen Gesetz : Poggendorffs Annalen*, 1862.

II. — *De la capacité calorifique des gaz.*

Pour déterminer la quantité de chaleur qu'il faut fournir à un corps pour élever sa température t de dt, on a comparé jusqu'ici en physique cette quantité à celle qui est nécessaire pour élever de 0° à dt° l'unité de poids de l'eau.

Le rapport de ces deux quantités de chaleur donnait alors une mesure de la capacité du corps pour la chaleur, relativement à l'eau. On appelle ce rapport *chaleur spécifique* ou *capacité calorifique du corps*. Enfin on le désigne encore par *chaleur spécifique en poids* pour indiquer que l'on compare *des poids égaux* du corps et de l'eau.

Le rapport change quand au lieu de poids on compare des *volumes égaux*, et on le nomme alors *chaleur spécifique en volume*.

Ces deux chaleurs spécifiques sont liées par une relation très-simple. Désignons par c la chaleur spécifique en poids du corps, par γ_1 son poids spécifique (poids de 1 mètre cube), et par γ celui de l'eau ; la quantité de chaleur nécessaire pour augmenter de dt la température de γ_1 kilogrammes, c'est-à-dire de 1 mètre cube, est

$$c\gamma_1\, dt.$$

La quantité de chaleur nécessaire pour élever de zéro à dt° γ kilogrammes, ou 1 mètre cube d'eau, sera

$$\gamma\, dt.$$

Le rapport de ces deux quantités de chaleur donne la chaleur spécifique à volumes égaux ; en la désignant par ω, il vient

$$\omega = \frac{\gamma_1}{\gamma} c.$$

Mais le rapport $\frac{\gamma_1}{\gamma}$ est simplement la densité du corps relative

à l'eau; si on le désigne par ε, on a

$$(58) \qquad \omega = \varepsilon c.$$

La chaleur spécifique en volume d'un corps se trouve donc en multipliant sa chaleur spécifique en poids par sa densité relative à l'eau.

Exemple. — Pour le fer chimiquement pur la chaleur spécifique en poids est $c = 0,1138$, le poids spécifique est $7,8439$, d'où l'on tire $\omega = \varepsilon c = 0,8926$: cela veut dire que 1 kilogramme de fer exige pour une certaine élévation de température une quantité de chaleur qui est 0,1138 de celle qui est nécessaire pour élever la température de l'eau prise à zéro de la même quantité, tandis que 1 mètre cube de fer exige les 0,8926 de la chaleur nécessaire pour 1 mètre cube d'eau.

Au point de vue de la théorie mécanique de la chaleur, cette explication est au moins incomplète. Il ne suffit pas de connaître l'élévation de température pour déterminer la quantité de chaleur fournie au corps; il faut encore connaître les autres changements subis par le corps pendant l'introduction de la chaleur. En général, on sous-entend dans la définition ordinaire de la capacité calorifique que le travail de disgrégation (*voyez* l'Introduction) est le même pour tous les corps.

Ordinairement il y a dilatation lorsqu'on fournit de la chaleur à un corps; s'il est soumis à une pression extérieure, il y a déjà un travail produit, puisque le corps en se dilatant surmonte cette pression extérieure; à ce travail correspond une certaine quantité de chaleur qui disparaît dans l'opération et ne peut pas par conséquent contribuer à l'élévation de la température. La capacité calorifique dépend donc de la pression extérieure sous laquelle le corps change de volume, et en outre de la loi suivant laquelle cette pression varie pendant la dilatation. Comme cette variation est arbitraire, il peut y avoir un nombre infini de valeurs pour la capacité calorifique d'un corps. Les déterminations faites antérieurement par les Physiciens ne sont pourtant pas sans utilité, parce qu'on connaît les circonstances dans lesquelles la chaleur a été fournie aux

corps. Tel est le cas des expériences de M. Regnault. Les corps se trouvaient en effet sous la pression constante de l'atmosphère. Les résultats trouvés ne sont rigoureusement vrais que pour une pression extérieure constante (celle de l'atmosphère).

Pour les solides et la plupart des liquides, la dilatation est, il est vrai, très-faible; la quantité de chaleur transformée en travail est par suite très-petite; les valeurs des capacités calorifiques déterminées par des expériences faites dans des circonstances non identiques sont peu différentes dans l'état actuel de la science. Il est cependant bon de faire remarquer cette différence dans les ouvrages de physique.

Mais on ne pouvait pas faire abstraction du fait que nous venons de signaler pour les gaz dont la dilatabilité par la chaleur est considérable, et les quantités de chaleur transformées en travail, lorsque ces corps se dilatent en surmontant une pression extérieure, ne pouvaient généralement pas échapper à l'observation. C'est pour cela qu'on a distingué dès l'origine au moins deux espèces de chaleurs spécifiques pour les gaz, en indiquant comment ils se comportent pendant l'introduction de la chaleur. On a distingué en physique *la capacité calorifique à pression constante* et *la capacité calorifique à volume constant*, considérées l'une et l'autre soit *en poids*, soit *en volume*.

Avec la capacité calorifique à pression constante on a supposé que le gaz se dilatait sous une pression constante pendant l'introduction de la chaleur; avec l'autre il n'y a pas de dilatation, et le volume reste constant. D'après les principes de la théorie mécanique de la chaleur, on voit que la capacité calorifique à pression constante est plus grande que la capacité à volume constant; car il faut fournir, pour une même élévation de température, une plus grande quantité de chaleur dans le premier cas, où le gaz effectue un travail et où une partie de la chaleur fournie disparaît, *se transforme en travail*, comme on dit habituellement.

Désignons la capacité en poids d'un gaz à pression constante par c_p et la capacité en poids à volume constant par c_v, on aura

les capacités en volume à pression constante et à volume constant représentées par les lettres ω_p et ω_v en multipliant respectivement c_p et c_v par la densité ε du gaz *relative à l'eau*.

Les expériences les plus récentes sur la chaleur spécifique des gaz sont dues à M. Regnault; mais elles donnent seulement la capacité *à pression constante;* l'autre capacité n'a pu être déterminée directement jusqu'ici : on l'obtient par le calcul, comme nous le ferons voir plus tard.

Gaz	Capacité en poids c_p à pression constante	Capacité en volume ω_p et rapportée à l'eau.
Air atmosphérique...	0,23751	0,00030714
Azote..............	0,24380	0,00030625
Oxygène...........	0,21751	0,00031099
Hydrogène..........	3,40900	0,00030533

Le tableau précédent comprend dans la première colonne les résultats des expériences de M. Regnault (*); nous nous bornons à citer l'air atmosphérique et les gaz simples permanents; le Mémoire de M. Regnault donne les chaleurs spécifiques à pression constante d'un grand nombre de gaz et de vapeurs.

Le tableau précédent indique que les capacités en poids à pression constante sont différentes pour les divers gaz; celle de l'hydrogène s'éloigne d'une manière remarquable des autres : elle est même plus grande que celle de tous les corps solides et liquides : après l'hydrogène vient l'eau dont la capacité en poids est 1. Pour tous les autres corps la chaleur spécifique est moindre que 1, et beaucoup moindre pour la plupart d'entre eux.

M. Regnault a trouvé un autre résultat très-important pour notre étude; c'est que la chaleur spécifique des gaz, et notamment celle de l'air atmosphérique, est *la même* à différentes températures et sous différentes pressions. Ce résultat a confirmé une hypothèse que M. Clausius a émise dans son premier Mémoire (1850) en partant de considérations théoriques.

(*) Regnault, *Relation des expériences, etc.*, t. II, Paris, 1862, p. 298 et 303.

La deuxième colonne de notre tableau contient les capacités en volume à pression constante. Les chiffres de cette colonne ont été calculés d'après la règle indiquée par l'équation (58), c'est-à-dire en multipliant la chaleur spécifique à pression constante c_p par la densité relative à l'eau des différents gaz. [On obtient cette densité en divisant par 1000, poids spécifique de l'eau, les valeurs de γ données par le tableau de la page 103 (*)].

A l'inspection des nombres de la seconde colonne, on aperçoit des différences si petites, qu'on est tenté de les attribuer à des erreurs d'observation. Mais lorsqu'on calcule la capacité en volume des autres gaz et des vapeurs expérimentés par M. Regnault, on voit que ces différences ne sont faibles que pour les gaz permanents. On doit conclure de là que l'égalité des capacités en volume n'existe que pour les gaz *parfaits*, et ce résultat est confirmé par une formule que nous donnerons plus loin, et à laquelle a conduit la théorie mécanique de la chaleur.

Nous avons dit que jusqu'ici on n'a pas pu déterminer directement la chaleur spécifique *à volume constant* des différents gaz; mais on a pu la trouver par une voie indirecte, au moins pour l'air atmosphérique. Soit c_p la capacité en poids de l'air à pression constante, et c_v sa capacité en poids à volume constant, la valeur du rapport $\frac{c_p}{c_v}$, que nous désignons par k, peut s'obtenir par plusieurs méthodes.

(*) M. Regnault donne, pour la capacité en volume des gaz, des valeurs différentes de celles de notre tableau; il a multiplié la capacité en poids par la densité des gaz prise *relativement à l'air*, et non relativement à l'eau. Ces nombres ont, par suite, une signification compliquée, et ne représentent pas les capacités en volume des gaz dans la véritable acception du mot, comme M. Clausius l'a déjà remarqué avec raison (*Sur la chaleur spécifique des gaz : Annalen der Chemie*, t. CXV). Lorsqu'on n'a en vue que la comparaison des nombres entre eux, cette manière de procéder ne présente pas d'inconvénients; mais j'ai préféré rapporter les densités des gaz à l'eau, parce qu'on a l'habitude de prendre la chaleur spécifique et la densité d'un corps quelconque relativement à ce corps.

M. Clausius prend pour unité la capacité en poids de l'air; pour obtenir la capacité en volume, il multiplie la capacité en poids par la densité du gaz par rapport à l'air.

Lorsque nous appliquerons plus loin à différents problèmes les formules fondamentales de la théorie mécanique de la chaleur, nous donnerons quelques-unes de ces méthodes. La méthode (*) employée successivement par Gay-Lussac et Welter, par Clément et Desormes, et plus tard par Masson, a donné respectivement $k = 1,372$; $1,357$ et $1,419$; par une autre méthode, employée par M. Hirn (**) et M. Weisbach (***), on a trouvé les nombres $1,3845$ et $1,4025$ (****).

Dulong a comparé les résultats tirés de la formule de la vitesse du son, qui contient la quantité k, avec les observations faites sur la propagation du son dans l'air. Il a trouvé par ce moyen $k = 1,421$; il a trouvé le même nombre pour l'azote, l'oxygène et l'hydrogène. La comparaison de la même formule avec les observations de MM. Moll et Van Beek sur la vitesse du son a donné pour l'air atmosphérique $k = 1,410$.

Cette dernière valeur est considérée aujourd'hui comme la plus exacte; elle est d'ailleurs confirmée indirectement par d'autres expériences, sur lesquelles nous reviendrons.

Dans la formule

$$k = \frac{c_p}{c_v},$$

nous pouvons faire maintenant pour l'air atmosphérique $k = 1,410$ et $c_p = 0,23751$, d'après M. Regnault; nous en déduisons pour la chaleur spécifique en poids de l'air à volume constant

$$c_v = 0,16844.$$

Nous verrons plus tard que l'on peut à l'aide de ces élé-

(*) WÜLLNER, *Experimentalphysik*, t. II, p. 279. — MOUSSON, *Physique*, t. II, p. 56.

(**) HIRN, *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 69.

(***) *Civilingenieur*, t. V, p. 46.

(****) Récemment M. Cazin a publié des expériences analogues aux précédentes, dans lesquelles il a évité plusieurs causes d'erreur à l'aide d'une méthode particulière. Ses observations conduisent au nombre 1,41 pour l'air, l'hydrogène, l'azote, l'oxygène, l'oxyde de carbone. *Essai sur la détente et la compression des gaz* (*Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LXVI).

ments déterminer la chaleur spécifique à volume constant d'autres gaz permanents.

III. — *Application des équations fondamentales aux gaz.*

A l'aide des résultats d'expériences énoncés ci-dessus, on peut transformer les équations fondamentales de la théorie mécanique de la chaleur qui ont été établies dans la première Section, p. 76, et en déduire les propriétés des gaz permanents.

Nous nous appuierons sur les hypothèses suivantes :

1° Un gaz parfait suit rigoureusement la loi de Mariotte et Gay-Lussac;

2° La chaleur spécifique à pression constante d'un pareil gaz est une quantité constante : il en est de même de la chaleur spécifique à volume constant;

3° Le plus important des gaz permanents, l'air atmosphérique, peut être considéré, dans les recherches qui suivent, comme un gaz parfait.

On a vu dans le Chapitre précédent jusqu'à quel point ces hypothèses sont justifiées; M. Regnault a prouvé par expérience que l'on peut légitimement admettre que la chaleur spécifique à pression constante soit invariable : quant à la chaleur spécifique à volume constant, les doutes ne peuvent être dissipés que par les recherches ultérieures.

Considérons l'unité de poids du gaz ayant le volume v et la pression p, et élevons de dt la température t de ce gaz sous une pression constante; la quantité de chaleur à fournir sera, d'après ce qui précède,

$$dQ_p = c_p\,dt.$$

Quand on échauffe le gaz sous un volume constant, on a

$$dQ_v = c_v\,dt;$$

mais ces deux quantités de chaleur peuvent se déterminer aussi par les équations générales (III) établies à la page 76.

Si la pression reste constante pendant l'échauffement, $dp = 0$, la dernière de ces équations donne

$$dQ_p = \frac{AY}{\left(\frac{dt}{dv}\right)} dt.$$

Si le volume reste constant, $dv = 0$, on tire de la seconde équation

$$dQ_v = \frac{AX}{\left(\frac{dt}{dp}\right)} dt.$$

Égalons les deux valeurs de dQ_p et dQ_v, il viendra

$$c_p = \frac{AY}{\left(\frac{dt}{dv}\right)} \quad \text{et} \quad c_v = \frac{AX}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}.$$

Ces équations déterminent pour les gaz permanents les fonctions X et Y,

(59)
$$\begin{cases} X = \frac{c_v}{A}\left(\frac{dt}{dp}\right), \\ Y = \frac{c_p}{A}\left(\frac{dt}{dv}\right). \end{cases}$$

Il y a encore dans ces deux équations les quotients différentiels de la température relativement à p et à v; mais pour les gaz, la loi de Mariotte et Gay-Lussac donne, d'après l'équation (56),

$$pv = R(273 + t);$$

et en différentiant, il vient

(60)
$$\begin{cases} \left(\frac{dt}{dp}\right) = \frac{v}{R}, \\ \left(\frac{dt}{dv}\right) = \frac{p}{R}. \end{cases}$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (59), nous aurons

(61)
$$\begin{cases} X = \frac{c_v v}{AR}, \\ Y = \frac{c_p p}{AR}. \end{cases}$$

Employons ces valeurs de X et de Y pour trouver les formes qu'affectent les équations fondamentales, quand on les applique aux gaz.

La première équation fondamentale (p. 76) donne la relation qui existe entre X et Y :

$$\left(\frac{dY}{dp}\right) - \left(\frac{dX}{dv}\right) = 1.$$

Lorsque l'on suppose que les chaleurs spécifiques sont constantes, les équations (61) fournissent les valeurs des quotients différentiels

$$\left(\frac{dY}{dp}\right) = \frac{c_p}{AR} \quad \text{et} \quad \left(\frac{dX}{dv}\right) = \frac{c_v}{AR}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on a

(62) $$c_p - c_v = AR,$$

relation très-remarquable qui a été donnée sous cette forme pour la première fois par M. Clausius (*).

On en conclut que *la différence des deux chaleurs spécifiques en poids est une quantité constante* AR, *particulière pour chaque gaz.*

Multiplions les deux membres de l'équation (62) par la densité ε du gaz par rapport à l'eau; on aura dans le premier membre les quantités $\omega_p = \varepsilon c_p$ et $\omega_v = \varepsilon c_v$, dont la première est la capacité en volume du gaz à pression constante, et la seconde la capacité en volume à volume constant; on obtient ainsi

(63) $$\omega_p - \omega_v = AR\varepsilon.$$

On a démontré à la page 102 que la quantité $R\varepsilon$ a la même valeur pour tous les gaz (on trouve avec les valeurs données plus haut $R\varepsilon = 0,0378540$); on conclut que *la différence des deux capacités en volume est la même pour tous les gaz :* proposition qui a été déduite du principe de Carnot pour la pre-

(*) Clausius, I[er] Mémoire, p. 44.

mière fois par Clapeyron; mais c'est M. Clausius qui l'a mise sous la forme que nous venons d'indiquer.

Les quantités qui entrent dans l'équation (62) sont toutes connues, d'après ce qui précède, au moins pour l'air atmosphérique; prenons pour ce gaz, $R = 29,272$, $c_p = 0,23751$, $c_v = 0,16844$: alors cette équation donne la valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur :

$$\frac{1}{A} = \frac{R}{c_p - c_v} = 423,80^{\text{kgm}}.$$

Nous avons dit, dans l'Introduction, que M. Joule a trouvé le nombre 423,55 par des expériences diverses, et que nous adoptons le chiffre 424.

Un tel accord entre les valeurs de l'équivalent mécanique de la chaleur trouvées par l'expérience et le calcul constitue peut-être la meilleure preuve de l'exactitude des hypothèses sur lesquelles s'appuie la théorie mécanique de la chaleur (*).

Les équations (62) et (63) peuvent servir pour déterminer les capacités, en poids et en volume, des gaz *à volume constant;* ces valeurs sont d'une très-grande importance pour la théorie mécanique de la chaleur.

Si l'on fait dans ces équations $A = \frac{1}{424}$, et si l'on y met pour c_p et R les valeurs données ci-dessus, on trouve :

	Capacité en poids c_v à volume constant	Capacité en volume ω_v et rapportée à l'eau.	Rapport $k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\omega_p}{\omega_v}$.
Air atmosphérique..	0,16847	0,00021786	1,4098
Azote.............	0,17273	0,00021697	1,4114
Oxygène..........	0,15507	0,00022171	1,4026
Hydrogène.........	2,41226	0,00021605	1,4132

(*) L'équivalent mécanique de la chaleur a été calculé par la méthode indiquée ci-dessus dans les premiers écrits sur la théorie mécanique de la chaleur. M. Mayer a trouvé 365 (1842); M. Holtzmann, 374 (1845); M. Clausius, 370 (1850). Ces nombres s'écartent du nombre que nous adoptons, parce que la chaleur spécifique de l'air n'était pas encore rigoureusement déterminée à cette époque. MM. Delaroche et Bérard avaient trouvé pour la chaleur spécifique de l'air à pression constante $c_p = 0,267$, tandis que la vraie valeur obtenue par M. Regnault est 0,23751.

On voit que la capacité en volume, à volume constant, est presque la même pour les quatre gaz; quant à la capacité en volume, à pression constante, on a trouvé le même résultat : la différence $\omega_p - \omega_v$ (*voyez* le tableau de la page 108) est aussi constante pour ces gaz, et a pour valeur 0,00008928.

La troisième colonne donne des nombres conformes aux expériences citées plus haut, qui ont donné le même rapport k pour les quatre gaz en question. Dans les calculs ordinaires, on peut parfaitement prendre pour ces gaz $k = 1,410$.

Passons à la seconde équation fondamentale. On a trouvé dans la première Section, p. 40,

$$S = Y\left(\frac{dS}{dp}\right) - X\left(\frac{dS}{dv}\right),$$

dans laquelle la fonction S était une quantité mathématiquement déterminée. Guidés ensuite par des considérations générales, nous avons pu supposer que S n'était autre chose que la température, et nous avons posé

$$S = a + t,$$

formule dans laquelle t est exprimé en degrés centigrades et compté à partir du point de la glace fondante; la quantité a est une constante qui se rapporte à un zéro de l'échelle thermométrique indiquée par la nature même, et que l'on ne pouvait déterminer par les recherches générales.

En substituant la valeur de S dans la deuxième équation fondamentale, on a obtenu (p. 76)

$$a + t = Y\left(\frac{dt}{dp}\right) - X\left(\frac{dt}{dv}\right).$$

Mettons dans le second membre les valeurs trouvées par les équations (60) et (61) (p. 112) pour les gaz permanents, nous aurons

$$a + t = c_p \frac{p}{AR}\frac{v}{R} - c_v \frac{v}{AR}\frac{p}{R},$$

ou

$$a + t = \frac{c_p - c_v}{AR}\frac{pv}{R};$$

mais les équations (62) et (56) ont donné respectivement les relations

$$c_p - c_v = AR,$$
$$pv = R(273 + t).$$

En substituant dans l'équation précédente, on a le résultat très-simple

(64) $$a = 273,$$

auquel se réduit la deuxième équation fondamentale appliquée aux gaz permanents. Ce résultat est extrêmement important, parce qu'il donne une très-grande probabilité à notre hypothèse sur la fonction S, que nous avons introduite dans nos considérations générales, sans faire aucune supposition sur les propriétés particulières des corps. Nous pouvons prendre cette fonction comme *mesure de la température*; elle représentera la température du corps comptée à partir d'un point situé à 273 degrés centigrades au-dessous du point de congélation de l'eau (l'intervalle entre les points de la glace fondante et de l'eau bouillante est alors supposé divisé en cent parties égales). Ce point est appelé le *zéro absolu*, et la température

$$S = a + t = 273 + t$$

se nomme la *température absolue*, qui se trouve facilement lorsque t est connu en degrés centigrades.

Il résulte de la définition mathématique de la fonction S (p. 40), que la mesure de la température se trouve définie rigoureusement, et que cette fonction S *est la même pour tous les corps*.

Les formules (III) de la page 76, relatives à la quantité de chaleur Q qu'il faut fournir à un corps pour changer son état, peuvent aussi être mises sous une forme commode pour leur application aux gaz. Dans ces équations on connaît, lorsqu'il s'agit de gaz permanents, les quantités a, X, Y, $\left(\frac{dt}{dp}\right)$ et $\left(\frac{dt}{dv}\right)$, en se servant des équations (60) et (61). Remplaçons d'abord, dans les dernières, la chaleur spécifique à volume constant c_v

par la lettre c, et la chaleur spécifique à pression constante c_p par le produit kc, d'après la relation

$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

adoptée plus haut.

Cette notation se trouve justifiée par le rôle important que jouera, dans nos calculs ultérieurs, la chaleur spécifique à volume constant.

Si nous faisons les substitutions indiquées, il vient, après quelques réductions très-simples,

$$(65)\qquad \left\{\begin{aligned} dQ &= \frac{c}{R}(v\,dp + kp\,dv),\\ dQ &= c\,dt + \frac{AR(a+t)}{v}\,dv,\\ dQ &= kc\,dt - \frac{AR(a+t)}{p}\,dp. \end{aligned}\right.$$

Ces trois équations sont identiques; dans les applications, on choisit la plus commode.

En introduisant cette nouvelle notation dans l'équation (62), nous écrirons

$$(66)\qquad c(k-1) = AR.$$

Enfin, dans l'équation (56), qui exprime les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, remplaçons 273 par a, et nous aurons

$$(67)\qquad pv = R(a+t).$$

IV. — *Lignes isothermiques et isodynamiques des gaz permanents.*

Dans les considérations générales sur les cycles, nous avons vu que ces courbes jouent un rôle important dans l'étude de la chaleur; voyons à quelles lois elles sont soumises dans le cas des gaz permanents.

Nous avons appelé *ligne isothermique*, la ligne suivant la-

quelle la pression p varie avec le volume v, *lorsque la température reste constante.*

Pour les gaz, nous avons dans ce cas, d'après l'équation (67),

$$pv = \mathrm{R}(a+t) = \text{const.};$$

et cette dernière équation est précisément celle de la ligne isothermique des gaz permanents.

Cette courbe est une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes.

Lorsque l'état initial est donné par la pression p_1 et le volume spécifique v_1, on aura la constante $p_1 v_1$, et, par suite, on pourra construire la courbe; mais cette constante, étant égale à $\mathrm{R}(a+t)$, est entièrement déterminée par la *température seule :* la courbe peut donc se tracer sans que l'on connaisse les quantités initiales p_1 et v_1.

Nous avons dit aussi plus haut (p. 37) que, suivant *la ligne isodynamique*, p varie avec v, quand *le travail intérieur* total reste constant, c'est-à-dire quand on a $d\mathrm{U} = 0$.

Cherchons d'abord la relation qui lie le travail U à la pression et au volume quand le corps est un gaz permanent. Dans les recherches générales, nous sommes partis de la formule (p. 26)

$$d\mathrm{Q} = \mathrm{A}(d\mathrm{U} + d\mathrm{L}),$$

et, en supposant que pendant l'introduction de la quantité de chaleur $d\mathrm{Q}$, le corps surmonte une résistance égale à sa force expansive, nous sommes arrivés à cette autre équation (p. 34):

$$d\mathrm{Q} = \mathrm{A}(d\mathrm{U} + p\,dv).$$

Pour les gaz permanents, on peut encore écrire [équation (65), p. 117] :

$$d\mathrm{Q} = c\,dt + \frac{\mathrm{AR}(a+t)}{v}\,dv;$$

mais d'après l'équation (67), on a

$$\frac{\mathrm{R}(a+t)}{v} = p.$$

De là, on tire

$$dQ = c\,dt + A p\,dv; \tag{68}$$

et en comparant cette dernière valeur de dQ à l'une des précédentes, on trouve la relation importante

$$dU = \frac{c}{A}\,dt. \tag{69}$$

Admettons que le gaz ait passé de la température t_1 à la température t; alors, en intégrant l'équation précédente entre ces limites, on aura, pour l'accroissement du travail intérieur,

$$U - U_1 = \frac{c}{A}(t - t_1), \tag{70}$$

ou bien, en désignant les valeurs initiales et finales de la pression et du volume, respectivement par p_1, v_1 et p, v, et en tenant compte de l'équation (67),

$$U - U_1 = \frac{c}{AR}(pv - p_1 v_1). \tag{71}$$

Pour les gaz permanents, la forme de la fonction $U = F(p, v)$ (p. 27) est complétement déterminée d'après cette dernière équation, et l'équation (70) montre, de plus, que l'accroissement du travail intérieur se déduit simplement de la différence des températures finale et initiale, pourvu que la pression extérieure soit égale à la force expansive du gaz à ces températures. Lorsqu'on a fourni au gaz une quantité de chaleur Q pendant son passage de t_1 à t, et lorsque le travail effectué pendant ce changement d'état est désigné par L, on a, d'après l'équation (15) (p. 46),

$$Q = c(t - t_1) + AL. \tag{72}$$

Si le gaz surmonte pendant le changement d'état une pression extérieure égale à sa force expansive, on peut écrire

$$Q = c(t - t_1) + A\int_{v_1}^{v} p\,dv. \tag{73}$$

Admettons que le travail intérieur reste constant, alors $dU = 0$, et d'après l'équation (69), on a aussi $dt = 0$, d'où l'on conclut qu'*il n'y a pas de changement de température.* On peut donc énoncer ce résultat très-simple : *pour les gaz permanents la courbe isodynamique coïncide avec la courbe isothermique.*

Les courbes aS et aU de la *fig.* 19 (p. 83) se couvrent donc exactement, et les deux points e et f coïncident.

La quantité de chaleur Q qu'il faut fournir à un gaz pour le faire passer d'un certain état à un autre lorsque les températures initiale et finale sont les mêmes, c'est-à-dire lorsque $t = t_1$, se déduit de l'équation (72), qui devient alors

$$Q = AL.$$

Mais L est le travail effectué par le gaz, et AL est la quantité de chaleur qui correspond à ce travail et qui disparaît; on conclut donc de l'équation précédente que *toute la chaleur fournie* Q *se transforme en travail, lorsqu'une certaine quantité de gaz passe d'un état d'équilibre à un autre, et lorsque dans les deux états limites la température est la même : le trajet parcouru pendant le passage est indifférent.*

Dans le cas où le gaz a surmonté pendant l'opération une résistance toujours égale à sa force expansive, la quantité de chaleur qui doit être fournie est donnée par l'équation (73)

$$Q = A\int_{v_1}^{v_2} p\,dv,$$

où v_2 désigne le volume final.

Comme *ici* la température est constante pendant *tout le trajet*, on peut se servir de l'équation (67) et écrire

$$p = \frac{R(a + t)}{v};$$

en substituant cette valeur de p dans l'équation précédente

$$Q = AR(a + t)\int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v},$$

et comme par hypothèse

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 = \mathrm{R}(a + t),$$

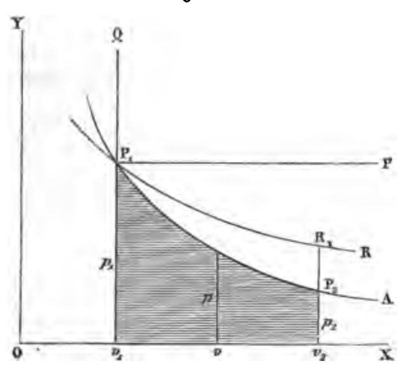
on a pour valeur de Q les expressions

$$(74) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{Q} &= \mathrm{AR}(a + t) \log \text{nép} \frac{v_2}{v_1} = \mathrm{A} p_1 v_1 \log \text{nép} \frac{v_2}{v_1} \\ &= \mathrm{A} p_2 v_2 \log \text{nép} \frac{v_2}{v_1}. \end{aligned} \right.$$

Dans ces équations on peut remplacer le rapport $\frac{v_2}{v_1}$ par le rapport $\frac{p_1}{p_2}$.

La courbe $P_1 P_2$ (*fig.* 23), d'après laquelle varie la pression,

Fig. 23.



est, comme on sait, une hyperbole équilatère, et le travail L qu'effectue le gaz en passant de l'état P_1 à l'état P_2 se détermine à l'aide de l'équation (73)

$$\mathrm{L} = \int_{v_1}^{v_2} p\, dv = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{A}},$$

ou encore de l'équation (74)

$$(75) \quad \mathrm{L} = \mathrm{R}(a + t) \log \text{nép} \frac{v_2}{v_1} = p_1 v_1 \log \text{nép} \frac{v_2}{v_1} = p_2 v_2 \log \text{nép} \frac{v_2}{v_1}.$$

Les dernières équations relatives au travail effectué par le gaz sont connues depuis longtemps; on peut les trouver directement en partant de la loi de Mariotte. La théorie mécanique de la chaleur nous apprend dans le cas actuel, comme fait nouveau, que la chaleur fournie pendant l'expansion doit être proportionnelle au travail produit.

Les équations (74) et (75) nous apprennent encore que la quantité de chaleur à fournir et la grandeur du travail produit sont indépendantes de la nature du gaz employé. Tous les gaz permanents exigent la même quantité de chaleur, lorsqu'ils passent de l'état $P_1(p_1\, v_1)$ à l'état $P_2(p_2,\, v_2)$, dans les conditions données.

Les équations que nous venons d'établir subsistent, quand inversement le gaz est *comprimé* sans changement de température; l'équation (75) donne le travail qu'il faut dépenser, et l'équation (74) la quantité de chaleur qu'il faut *enlever* au gaz pendant le changement d'état.

Supposons, par exemple, que 1 kilogramme de gaz à la température $t_1 = 30°$ soit renfermé dans un cylindre; le travail produit par le gaz pendant l'expansion du volume v_1 au volume $v_2 = \frac{4}{3} v_1$, la température restant constante, se trouve au moyen de l'équation (75)

$$L = R(a + t) \log \text{nép} \frac{v_2}{v_1} = 2251^{\text{kgm}},57,$$

en prenant

$$R = 29,272 \quad \text{et} \quad a = 273.$$

On calcule donc le travail quand on connaît seulement la température et le rapport des volumes.

La pression p_1 devient alors $p_2 = \frac{3}{4} p_1$, et la totalité de la chaleur qu'il faut fournir au gaz pendant le changement d'état et qui disparaît est

$$Q = AL = \frac{1}{424} L = 6,0178 \text{ calories}.$$

La coïncidence de la courbe isothermique et de la courbe

isodynamique appartient *seulement* aux gaz permanents, et probablement même *seulement* aux *gaz parfaits.*

Le travail intérieur est, dans les gaz, d'après les équations (69) et (70), une fonction *de la température seule;* par suite, le travail intérieur d'une certaine quantité de gaz qui occupe des volumes différents reste constant quand la température ne change pas. C'est M. Clausius (*) qui a le premier énoncé nettement ce théorème; il a ajouté en même temps que son degré d'exactitude pour un gaz donné est probablement le même que celui des lois de Mariotte et de Gay-Lussac appliquées à ce même gaz.

Pour éclaircir ce dernier point, revenons un instant aux considérations générales que nous avons présentées à la page 24, et tenons compte en même temps de la constitution probable du gaz. Nous disions alors que la quantité de chaleur que l'on fournit à un corps est employée généralement à trois choses : une partie sert à accroître le mouvement moléculaire, à augmenter le *travail d'oscillation,* dont l'intensité s'apprécie directement au moyen de la température; une autre partie produit un changement dans les positions moyennes des particules oscillantes, et comme ces particules agissent les unes sur les autres (sans doute attractivement), un certain travail doit correspondre à ce changement de positions; enfin une troisième partie de la chaleur fournie est, en général, employée à effectuer un travail extérieur.

Mais on suppose que les dernières particules d'un gaz *parfait* sont complétement sorties de leurs sphères d'action réciproque, de sorte que la chaleur que l'on fournit à un pareil gaz servirait seulement à l'accroissement du travail d'oscillation, c'est-à-dire à l'accroissement de la somme des forces vives de toutes les particules (élévation de la température) et à la production du travail extérieur.

Nous admettons, par conséquent, que, pour les gaz parfaits, dans l'équation (1) (p. 25),

$$dQ = A(dM + dJ + dL),$$

(*) Clausius, I[er] Mémoire.

le terme dJ est nul (nous avions appelé l'ensemble des deux premiers termes de la parenthèse *accroissement du travail intérieur*).

Mais, en réalité, il n'existe pas de gaz parfaits; il faut dire que le terme dJ est d'autant plus petit que le gaz diffère moins d'un gaz parfait, et qu'il est déjà négligeable pour les gaz que nous comptons, comme l'air atmosphérique, parmi les gaz permanents.

Fournissons de la chaleur à l'unité de volume d'un gaz et maintenons son volume constant; le travail extérieur sera nul, c'est-à-dire $dL = 0$; supposons de plus, ce qui est très-admissible, que l'élévation de température dt mesure l'accroissement du travail d'oscillation; l'équation précédente peut s'écrire de la manière suivante :

$$dQ_r = \omega dt + A dJ.$$

Pour un gaz parfait on aurait $dJ = 0$, et alors ω serait la chaleur spécifique à volume constant; mais si dJ n'était pas nul, la quantité que nous avons désignée jusqu'ici par chaleur spécifique à volume constant aurait une signification compliquée; quand l'introduction de la chaleur se fait dans les conditions indiquées, la quantité dJ est sans doute positive, parce qu'on doit admettre que les dernières particules s'attirent, et que dJ représente le travail qui, même quand le volume reste constant, est employé à opérer une division plus grande dans le gaz (division des groupes de molécules et d'atomes). M. Rankine appelle la quantité ω de l'équation précédente *chaleur spécifique vraie*, et on doit conclure de ce qui précède que la chaleur spécifique à volume constant dépasse d'autant plus la chaleur spécifique vraie, que le gaz diffère davantage d'un gaz parfait. Ce théorème paraît confirmé par les valeurs expérimentales que nous avons données dans les tableaux des pages 108 et 114. L'hydrogène, qui se rapproche le plus d'un gaz parfait, a la plus petite capacité à volume constant; pour les autres gaz des tableaux, les valeurs de cette capacité diffèrent peu entre elles; mais elles sont sensiblement plus grandes que celle de l'hydrogène. Si nous faisions les mêmes

calculs pour les vapeurs, nous devrions trouver des différences encore bien plus grandes; c'est ce qui arrive en effet.

Il faut remarquer cependant que la composition chimique des gaz et des vapeurs a une influence. Pour les corps gazeux simples, et pour les corps gazeux composés qui se forment sans condensation, les capacités en volume sont presque égales à celle de l'hydrogène : elles la dépassent fort peu, par les raisons que nous venons de donner. Mais pour les gaz composés qui subissent une condensation de 2 : 3, la capacité en volume augmente presque dans le rapport 3 : 2; exemple : l'acide carbonique et la vapeur d'eau.

D'après M. Regnault (*Remarque*, p. 103), on a pour l'acide carbonique $R = 19,143$ et sa densité par rapport à l'air est $\varepsilon = 1,52901$; pour la capacité en poids à pression constante, M. Regnault a trouvé $c_p = 0,2169$. En mettant ces nombres dans l'équation (62), on trouve pour la capacité en poids à volume constant 0,1718, et pour la capacité en volume, en suivant la marche indiquée plus haut,

à pression constante.... $\omega_p = 0,0004289$,
à volume constant...... $\omega_v = 0,0003397$;

d'où l'on tire

$$k = \frac{\omega_p}{\omega_v} = 1,262.$$

Avant de comparer cette capacité en volume à volume constant à celle d'un gaz simple, il faut diminuer la quantité ω_v en la multipliant par le rapport $\frac{2}{3}$; on obtient alors

$$\frac{2}{3}\omega_v = 0,0002264$$

(*voyez* le tableau de la page 114).

On retrouve l'écart dans le sens indiqué : les valeurs précédentes ne sont, il est vrai, que des valeurs approchées, puisque l'acide carbonique, en sa qualité de vapeur, ne suit pas exactement les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, et qu'en outre la chaleur spécifique à pression constante change beaucoup

d'après M. Regnault (*) avec la température, précisément pour l'acide carbonique. Enfin l'influence de la combinaison chimique des parties intégrantes des gaz et le changement de volume qui l'accompagne ne sont pas encore suffisamment connus. (*Voyez* les Mémoires de MM. Buff et Clausius dans les *Annalen der Chemie und Pharmacie*, t. CXV, p. 301, et t. CXVIII, p. 106.)

On conclut de ces considérations générales que la proposition énoncée plus haut relativement à la coïncidence des courbes isothermique et isodynamique dans les gaz n'est rigoureusement vraie que pour les gaz parfaits. Pour un gaz réel, ces courbes s'écartent d'autant plus l'une de l'autre, que ce gaz diffère davantage d'un gaz parfait. Le sens de l'écart se prévoit facilement. Si nous les faisons partir du même point, la courbe isodynamique se rapprochera plus rapidement de l'axe des abscisses que la courbe isothermique, et leur écart sera d'autant plus grand, que le gaz se rapproche davantage de l'état de vapeur, qu'il est plus dense et plus voisin de la saturation. Nous négligerons cet écart, qui, surtout pour l'air atmosphérique, est tout à fait insensible.

V. — *Lignes adiabatiques des gaz permanents.*

Nous avons appelé, d'après M. Rankine, *adiabatique*, la ligne qui indique comment la pression p varie avec le volume v, quand il n'y a ni introduction, ni soustraction de chaleur, et quand il y a égalité entre la pression extérieure et la force expansive du corps pendant tout le changement d'état.

Dans le cas d'un gaz, on avait, d'après la première des équations (65),

$$dQ = \frac{c}{R}(v\,dp + kp\,dv).$$

Comme il n'y a ni introduction, ni soustraction de chaleur

(*) Regnault, *Relations, etc.*, t. II, p. 128.

$dQ = 0$, et il vient

$$v\,dp + kp\,dv = 0,$$

ou, en divisant par vp,

$$\frac{dp}{p} + k\frac{dv}{v} = 0.$$

Intégrons et caractérisons l'état initial par les quantités p_1 et v_1, nous aurons

$$(76) \qquad pv^k = p_1 v_1^k.$$

Telle est l'équation de la courbe adiabatique d'un gaz permanent, relative au point $(p_1 v_1)$. Lorsque la position de ce point est donnée par ses coordonnées, le tracé de la courbe adiabatique est entièrement déterminé, la constante de l'équation

$$pv^k = \text{const.}$$

est simplement $p_1 v_1^k$.

La nature de la courbe adiabatique se reconnaît de suite : les axes des coordonnées sont les asymptotes de la courbe, mais la courbe se rapproche davantage de l'axe des abscisses que les courbes isothermique et isodynamique, parce que pour l'air atmosphérique et pour les autres gaz permanents $k = 1,410$, c'est-à-dire $k > 1$.

C'est Poisson qui a trouvé le premier, par une autre méthode, il est vrai, que la pression d'un gaz varie d'après la loi exprimée par l'équation (76) lorsque le changement d'état a lieu sans qu'on lui fournisse ni qu'on lui enlève de la chaleur; depuis, d'autres auteurs ont démontré cette loi de différentes manières (*).

Dans le changement d'état d'un gaz dont il s'agit, il y a aussi des changements de température, que l'on peut suivre facilement. On tire d'abord de l'équation (76)

$$\frac{pv}{p_1 v_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{k-1}.$$

(*) *Essai sur la détente et la compression des gaz*, par M. Cazin (*Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LXVI).

Si la température initiale est t_1, on aura, en tenant compte de l'équation (67),

$$(77)\qquad \frac{a+t}{a+t_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{k-1};$$

et comme, d'après l'équation (76),

$$\frac{v_1}{v} = \frac{p^{\frac{1}{k}}}{p_1},$$

on en conclut

$$(78)\qquad \frac{a+t}{a+t_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Les dernières équations donnent la température à chaque instant; on reconnaît qu'une *augmentation de volume* est accompagnée d'une *diminution de température*. On aurait pu déduire aussi les équations (77) et (78) directement des deux dernières des équations (65) en y faisant $dQ = 0$ et en intégrant.

Cherchons le travail produit par un gaz qui, sans qu'on lui fournisse ni qu'on lui enlève de la chaleur, passe du volume v_1 au volume plus grand v_2, et dont la pression et la température décroissent respectivement de p_1 à p_2 et de t_1 à t_2 : ce même travail serait dépensé, si inversement le gaz pris sous l'unité de poids était comprimé et ramené du volume v_2 au volume plus petit v_1 dans les mêmes circonstances.

Comme ici $Q = 0$, on trouve, d'après l'équation (73),

$$c(t_2 - t_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p\,dv = 0,$$

ou, si l'on désigne par L le travail représenté par l'intégrale,

$$(79)\qquad L = \frac{c}{A}(t_1 - t_2).$$

Le travail L se calcule facilement lorsque l'on donne les températures initiale et finale.

En comparant cette dernière équation et l'équation (70)

(p. 119), on voit que le *travail gagné* L est égal à la diminution $(U_1 - U_2)$ du travail intérieur. Si l'on avait, au contraire, comprimé le gaz, il y aurait eu un accroissement de travail intérieur qui eût été rigoureusement égal à la valeur du travail extérieur dépensé. Puisque dans les gaz permanents l'augmentation du travail intérieur se manifeste en entier comme élévation de température (comme accroissement de chaleur), nous avons ici le cas le plus simple de la transformation directe du travail en chaleur; dans l'expansion, au contraire, toute la chaleur disparue se transforme en travail.

Lorsque, comme cela arrive ordinairement, on donne les quantités v_1 et v_2, p_1 et p_2, et non pas les températures initiale et finale, on peut calculer directement le travail L au moyen des formules suivantes : mettons l'équation (79) sous la forme

$$L = \frac{c(a+t_1)}{A}\left(1 - \frac{a+t_2}{a+t_1}\right);$$

en nous servant des équations (67), (77) et (78), nous obtenons les équations

$$(80)\quad \begin{cases} L = \dfrac{c}{AR}\, p_1 v_1 \left[1 - \left(\dfrac{v_1}{v_2}\right)^{k-1}\right], \\ L = \dfrac{c}{AR}\, p_1 v_1 \left[1 - \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right], \end{cases}$$

dans lesquelles on peut encore remplacer $\frac{c}{AR}$ par sa valeur tirée de l'équation (66)

$$\frac{c}{AR} = \frac{1}{k-1}.$$

Appliquons ces équations à un exemple. Supposons qu'on ait renfermé dans un cylindre l'unité de poids de l'air atmosphérique, à la température $t = 30^\circ$ et sous la pression de $1\frac{1}{2}$ atmosphère ($p_1 = 1{,}5 \times 10334$).

Le volume se calcule d'après l'équation (67)

$$v_1 = \frac{R(a+t_1)}{p_1} = \frac{29{,}272(273+t_1)}{p_1} = 0^{mc},057218,$$

et la constante de la courbe adiabatique relative au point initial est

$$p_1 v_1^k = 2744,61.$$

Si le gaz doit se dilater, sans qu'on lui fournisse ni qu'on lui enlève de la chaleur, jusqu'à ce que la pression soit descendue à *une* atmosphère ($p_2 = 10334$), on trouve pour le rapport de la détente

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{1,41}} = 1,333 = \frac{4}{3}.$$

La température finale se déduit de l'équation (78)

$$\frac{a + t_2}{a + t_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

d'où l'on tire

$$a + t_2 = 269°,297,$$

et, par suite,

$$t_2 = -3°,7.$$

La température s'abaisse donc de $+30°$ à $-3°,7$. Le travail effectué par le gaz dans ce changement d'état est, d'après l'équation (79), si $c = 0,16847$ (p. 114),

$$\mathrm{L} = \frac{c}{\mathrm{A}}(t_1 - t_2) = 2407,2^{\mathrm{kgm}},$$

et la quantité de chaleur qui a disparu

$$\mathrm{AL} = 5^{\mathrm{cal}},6784.$$

(Comparez cet exemple à celui de la page 122).

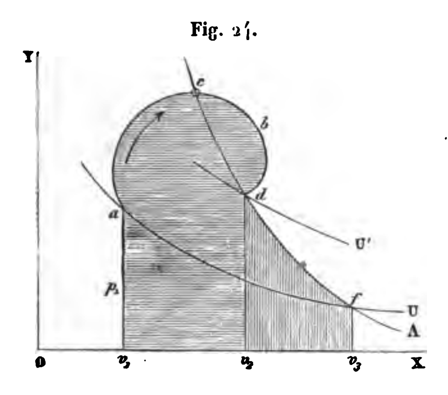
Les recherches précédentes fixent les lois auxquelles doivent satisfaire, pour les gaz permanents, les trois courbes isothermique, isodynamique et adiabatique.

Les recherches faites (p. 82) sur les cycles incomplets et réversibles peuvent être appliquées maintenant aux gaz permanents.

Admettons que l'état initial a (*fig.* 24) de l'unité de poids de l'air atmosphérique soit donné par le volume v_1 et la pres-

sion p_1; que cet air surmonte une pression églae à sa force

Fig. 24.



expansive, et que, en recevant de la chaleur et en produisant du travail, il change de pression et de volume d'après la loi donnée par la courbe *acbd*; supposons de plus qu'il passe par ce trajet (qui est réversible) à l'état *d* caractérisé par le volume v_2 et par la pression p_2, alors le travail produit par ce gaz est représenté par la surface couverte de hachures horizontales.

Pour rechercher le changement du travail intérieur, nous menons par le point final *d* la ligne adiabatique *d*A, et par le point de départ *a* la courbe isodynamique *a*U, qui pour un gaz représente également la courbe isothermique; les coordonnées des points d'intersection de ces deux courbes sont désignées par v_3 et p_3. (Rappelons que la surface à hachures verticales représente la variation du travail intérieur, et que l'ensemble des deux surfaces ombrées donne en unités de travail la quantité de chaleur qu'il a fallu fournir au gaz pendant le trajet *acbd*.) Les deux courbes en question se tracent très-facilement pour un gaz; la courbe *a*U est une hyperbole équilatère qui a pour équation

$$pv = p_1 v_1,$$

et le tracé de la courbe diabatique se fait d'après l'équation

$$pv^k = p_2 v_2^k.$$

Les coordonnées p_3 et v_3 du point d'intersection *f* sont dé-

terminées par les équations

$$p_3 v_3 = p_1 v_1, \quad p_3 v_3^k = p_2 v_2^k.$$

Les températures t_1 et t_2, qui correspondent respectivement aux états initial et final a et d, se tirent des équations

$$p_1 v_1 = R(a + t_1) \quad \text{et} \quad p_2 v_2 = R(a + t_2);$$

nous les trouvons facilement au moyen des équations suivantes :

$$v_3 = v_2 \left(\frac{a + t_2}{a + t_1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad \text{et} \quad p_3 = p_2 \left(\frac{a + t_1}{a + t_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

On a, pour la variation du travail intérieur (surface à hachures verticales),

$$\frac{c}{A}(t_2 - t_1).$$

Mais nous avons trouvé, en nous appuyant sur l'équation (47) (p. 82) que l'intégrale

$$P = \int \frac{dQ}{AS}$$

a une valeur constante, quel que soit le trajet par lequel le corps passe du point a d'une ligne adiabatique à un point quelconque (c, d ou f, *fig.* 24) d'une deuxième ligne adiabatique. Voyons quelle est la forme de cette intégrale pour les gaz, et si la loi que nous venons d'énoncer est également vraie pour ces corps.

Mettons à la place de S sa valeur $a + t$, il vient

$$P = \int \frac{dQ}{A(a + t)}.$$

Mais on a pour les gaz l'équation (65)

$$dQ = \frac{c}{R}(v\,dp + kp\,dv).$$

Divisons ses deux membres par Apv et tenons compte de la relation

$$R(a + t) = pv,$$

nous trouverons alors

$$\frac{dQ}{A(a+t)} = \frac{c}{A}\left(\frac{dp}{p} + k\frac{dv}{v}\right),$$

ou

$$dP = \frac{dQ}{A(a+t)} = \frac{c}{A}\, d \log \text{nép}\, pv^k.$$

En intégrant on aura, pour le passage de l'état initial (p_1, v_1) à l'état final (p_2, v_2),

$$(81) \qquad P = \frac{c}{A} \log \text{nép} \frac{p_2 v_2^k}{p_1 v_1^k}.$$

Les quantités $p_1 v_1^k$ et $p_2 v_2^k$ sont les constantes des courbes adiabatiques relatives aux points a et d; en les désignant par C_1 et C_2, on peut écrire

$$P = \frac{c}{A} \log \text{nép} \frac{C_2}{C_1}.$$

La loi mentionnée plus haut est donc parfaitement vraie pour les gaz. La valeur P de l'intégrale en question ne dépend que des constantes des deux courbes adiabatiques qui passent par les points a et d, et de la capacité en poids à volume constant du gaz considéré; la courbe suivant laquelle le passage a lieu, et les positions qu'occupent respectivement les points initial et final sur la première et sur la seconde de ces courbes sont arbitraires. Lorsque le passage se fait suivant la courbe isodynamique ou suivant la courbe isothermique, c'est-à-dire lorsque le gaz passe de l'état initial a (*fig.* 24) à l'état final f le long de la courbe aU en conservant la même température, on a

$$p_2 v_2 = p_1 v_1 = R(a+t),$$

et, par suite, l'équation (81) donne

$$P = \frac{c}{A} \log \text{nép} \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{k-1},$$

$$= \frac{c(k-1)}{A} \log \text{nép} \frac{v_2}{v_1},$$

ou à cause de l'équation (66)

$$P = \frac{AR(a+t_1)}{A(a+t_1)} \log \text{nép} \frac{v_2}{v_1}.$$

Mais d'après l'équation (74) la quantité de chaleur Q_1 qu'il faut fournir pendant ce passage est

$$Q_1 = AR(a+t_1) \log \text{nép} \frac{v_2}{v_1}.$$

Delà nous conclurons enfin

$$P = \frac{Q_1}{A(a+t_1)},$$

équation qui confirme complétement le théorème exprimé par l'équation (48) (p. 84).

VI. — *Comment se comportent les gaz quand ils changent d'état suivant un trajet réversible.*

Dans les recherches précédentes nous avons supposé que pendant le changement d'état du gaz sa force expansive ne diffère pas ou au moins diffère infiniment peu de la pression extérieure. Cela a presque toujours lieu dans les applications, mais c'est seulement à cette condition qu'on peut employer immédiatement les équations fondamentales (65).

Pour rendre plus facile l'usage des équations générales (65), (66) et (67), il convient d'examiner de plus près quelques-uns de ces cas. Nous avons déjà traité les problèmes les plus importants de cette espèce en étudiant le tracé des courbes isothermique, isodynamique et adiabatique des gaz; néanmoins, il y a encore quelques autres problèmes qu'il faut examiner. On donne ordinairement la loi suivant laquelle la pression extérieure, ou, ce qui est la même chose ici, la pression du gaz, varie avec son volume, et il faut déterminer quel est l'état final du gaz, de quelle manière il faut fournir ou enlever de la chaleur au gaz, enfin quel est le changement du travail intérieur.

PROBLÈME I. — *Comment se comporte le gaz lorsqu'on lui fournit de la chaleur, son volume restant constant.*

Lorsque l'unité de poids d'un gaz dont le volume est v_1, la pression p_1 et la température t_1, doit être portée à la température t_2 sans que le volume v_1 change, on déduit la pression finale p_2 des deux équations suivantes [*voyez* l'équation (67)] :

$$p_1 v_1 = R(a + t_1) \quad \text{et} \quad p_2 v_2 = R(a + t_2);$$

en les divisant membre à membre, on a

$$(82) \qquad p_2 = p_1 \frac{a + t_2}{a + t_1}.$$

D'après la deuxième des équations (65), il vient, puisque v est constant, et, par suite, $dv = 0$,

$$dQ = c\,dt.$$

L'intégration nous donne la quantité de chaleur Q

$$(83) \qquad Q = c(t_2 - t_1).$$

Le changement du travail intérieur est donné par l'équation (70)

$$(84) \qquad U_2 - U_1 = \frac{c}{A}(t_2 - t_1) = \frac{Q}{A}.$$

Cette dernière équation montre que toute la chaleur fournie a été employée pour accroître le travail intérieur; pour les gaz le travail consiste en travail d'oscillation, dont l'augmentation se détermine directement par la température.

Il est évident que ces équations s'appliquent aussi au cas inverse, où il y a abaissement de température avec soustraction de chaleur; alors on a simplement $t_2 < t_1$ et $p_2 < p_1$, et Q est alors négatif ainsi que le changement du travail intérieur.

Soient, par exemple, la température initiale $t_1 = 30°$ et la pression initiale $p_1 = 1\frac{1}{2}$ atmosphère; on veut refroidir le gaz jusqu'à ce que la pression ne soit plus que d'*une* atmosphère :

on a alors, d'après l'équation (82),

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2}{3},$$

et, par suite, il vient pour la température finale

$$t_2 = \frac{p_2}{p_1}(a + t_1) - a = -71^{\circ}.$$

La quantité de chaleur Q est, d'après l'équation (83),

$$Q = 0,16847(-71 - 30) = -17^{cal},015.$$

Le signe — indique qu'il faut ici enlever de la chaleur au gaz.

Le changement (la diminution) du travail intérieur est

$$\frac{Q}{A} = 424 \times 17,015 = 7214^{kgm},4.$$

Problème II. — *Comment se comporte un gaz lorsqu'on lui fournit de la chaleur en maintenant la pression constante?*

L'état initial est caractérisé, comme dans l'exemple précédent, par les quantités p_1, v_1 et t_1, et nous supposons qu'on dilate ou qu'on comprime le gaz à pression constante jusqu'à ce que le volume devienne v_2. En nous servant de l'équation (67), nous trouvons la température finale à l'aide de l'équation

$$\frac{a + t_2}{a + t_1} = \frac{v_2}{v_1}. \tag{85}$$

En faisant $dp = 0$ dans la dernière des équations (65), on a

$$dQ = kc\,dt,$$

d'où l'on déduit la quantité de chaleur nécessaire pour accomplir le changement d'état demandé

$$Q = kc(t_2 - t_1). \tag{86}$$

Le changement du travail intérieur est, d'après l'équation (70),

$$U_2 - U_1 = \frac{c}{A}(t_2 - t_1);$$

et on obtient alors pour le travail extérieur, puisque p_1 est constant,

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv = p_1(v_2 - v_1) = R(t_2 - t_1).$$

Soit, par exemple, $t_1 = 30°$ la température de l'unité de poids d'un gaz, dont le volume v_1 doit être porté à $v_2 = \frac{4}{3} v_1$; d'après l'équation (85), la température finale sera $t_2 = 131°$.

La quantité de chaleur à fournir est, à cause de $kc = 0,23751$,

$$Q = 23^{\text{cal}},9885.$$

Pour le changement du travail intérieur, on a

$$U_2 - U_1 = 7214^{\text{kgm}},4.$$

Enfin on trouve pour le travail extérieur

$$L = 29,272(131 - 30) = 2956^{\text{kgm}},5.$$

L'ensemble de ces deux travaux exprimés en calories est

$$\frac{7214,4 + 2956,5}{424} = 23^{\text{cal}},988.$$

Nous retrouvons ainsi le nombre donné pour la quantité de chaleur à fournir; ce qui devait être, d'après les principes sur lesquels sont fondées les formules écrites ci-dessus.

Problème III. — *Comment se comporte un gaz lorsqu'il satisfait à la relation* $pv^2 =$ const.?

Conservons les notations déjà employées; la variation de la pression et du volume est donnée par l'équation

$$pv^2 = p_1 v_1^2 = p_2 v_2^2,$$

d'où l'on tire

$$\frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = \frac{v_1}{v_2};$$

ou, d'après l'équation (67),

$$\frac{a + t_2}{a + t_1} = \frac{v_1}{v_2},$$

équation qui sert à calculer la température finale t_2. On reconnaît que la dilatation de v_1 à v_2 est accompagnée d'un grand abaissement de température. Le travail qu'effectue le gaz pendant sa dilatation est

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv = p_1 v_1^2 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^2} = p_1 v_1^2 \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right),$$

et en tenant compte de la première des équations écrites ci-dessus, on a

$$L = p_1 v_1 - p_2 v_2;$$

mais on a aussi, d'après l'équation (67),

$$L = R(t_1 - t_2)$$

Le changement du travail intérieur est toujours

$$U_2 - U_1 = \frac{c}{A}(t_2 - t_1);$$

et enfin on a, pour la quantité de chaleur qu'il faut fournir,

$$\begin{aligned} Q &= A(U_2 - U_1) + AL \\ &= -c(t_1 - t_2) + AR(t_1 - t_2), \end{aligned}$$

ou bien, en tenant compte de l'équation (66),

$$Q = c(k - 2)(t_1 - t_2).$$

Cette chaleur et le changement du travail intérieur sont des quantités négatives lorsqu'il y a dilatation, et positives quand il y a compression. On devait s'attendre à trouver de tels résultats, parce que la courbe des pressions donnée se rapproche plus rapidement de l'axe des abscisses que la courbe adiabatique.

Quand la pression change d'après la loi proposée, il faut enlever de la chaleur au gaz pendant son expansion; pour l'air atmosphérique, on a, d'après la dernière équation, avec $c = 0,16847$ et $k = 1,410$,

$$Q = -0,09940(t_1 - t_2).$$

Le travail intérieur diminue donc pour deux raisons: une

partie est directement soustraite au gaz à l'état de chaleur, l'autre partie se transforme en travail extérieur.

Exemple numérique. — L'unité de poids de l'air à la température $t_1 = 30°$ doit se dilater, d'après la loi donnée, de v_1 à $v_2 = \frac{4}{3} v_1$; d'après les équations ci-dessus, la température finale est

$$t_2 = \frac{v_1}{v_2}(a + t_1) - a = -45,75.$$

Le travail extérieur devient alors

$$L = R(t_1 - t_2) = 29,272(30 + 45,75) = 2217^{\text{kgm}},35.$$

Le changement du travail intérieur est

$$U_2 - U_1 = \frac{c}{A}(t_2 - t_1) = -5410^{\text{kgm}},92.$$

Enfin, on a pour la quantité de chaleur,

$$Q = -0,09940(30 + 45,75) = -7^{\text{cal}},530.$$

Le signe — montre que dans le cas de la dilatation, il faut *enlever* au gaz une quantité de chaleur mesurée par $7^{\text{cal}},530$; s'il y avait compression dans les mêmes circonstances, cette quantité de chaleur serait à *fournir*.

Les résultats des problèmes isolés que nous avons traités jusqu'ici peuvent être compris dans des formules générales.

Admettons que la courbe des changements de pression ait pour équation

$$p^m v^n = \text{const.},$$

dans laquelle m et n sont des nombres quelconques entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs; on aura

$$(87) \qquad p^m v^n = p_1^m v_1^n = p_2^m v_2^n.$$

Nous en déduisons

$$p_1 v_1 . v_1^{\frac{n}{m}-1} = p_2 v_2 . v_2^{\frac{n}{m}-1};$$

ou bien, d'après l'équation (67),

$$(88)\qquad \frac{a+t_2}{a+t_1}=\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{n-m}{m}}.$$

Pour le travail effectué par le gaz, nous avons

$$L=\int_{v_0}^{v_2}p\,dv=p_1 v_1^{\frac{n}{m}}\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v^{\frac{n}{m}}}=\frac{m}{n-m}p_1 v_1\left[1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{n-m}{m}}\right].$$

Si nous remplaçons $\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{n-m}{n}}$ par sa valeur donnée par l'équation (88); si, de plus, nous tenons compte de la relation $p_1 v_1 = R(a+t_1)$, nous trouvons

$$L=\frac{m}{n-m}R(t_1-t_2).$$

Enfin nous pouvons remplacer encore R par sa valeur tirée de l'équation (66); il vient alors

$$(89)\qquad L=\frac{m}{n-m}\cdot\frac{c(k-1)}{A}(t_1-t_2).$$

Le changement du travail intérieur est, d'après l'équation (70),

$$(90)\qquad U_2-U_1=\frac{c}{A}(t_2-t_1),$$

et la quantité de chaleur Q qu'il faut fournir au gaz sera

$$Q=A(U_2-U_1+L).$$

En substituant les valeurs trouvées plus haut et en réduisant, il vient

$$(91)\qquad Q=\frac{mk-n}{n-m}c(t_1-t_2).$$

On peut résoudre, à l'aide de ces formules, un grand nombre de problèmes; elles s'appliquent évidemment aux cas particuliers qui précèdent.

Prenons $m = 1$ et $n = 2$; nous retrouvons alors toutes les formules du problème III.

Si $n = 0$, l'équation (87) donne

$$p = p_1,$$

c'est-à-dire le changement de volume a lieu sous une pression constante : nous retombons alors sur les formules du problème II. Lorsqu'on fait $m = 0$, nous sommes dans le cas d'un gaz auquel on fournit de la chaleur en maintenant son volume constant : c'est celui du problème I.

Si l'on pose $\frac{n}{m} = k$, on a, d'après l'équation (91), $Q = 0$; cette hypothèse, introduite dans les autres formules, fait retomber sur les équations qui correspondent à la ligne adiabatique.

Les formules précédentes ne peuvent servir dans le cas où $n = m$; mais alors l'équation (88) montre que, dans cette hypothèse, la température doit rester constante, car elle donne $t_2 = t_1$. Les formules (89) et (91) donnent les quantités indéterminées

$$L = \frac{0}{0} \quad \text{et} \quad Q = \frac{0}{0}.$$

Mais ce cas exceptionnel est celui où la variation de la pression est exprimée par une courbe isothermique et isodynamique, et les vraies valeurs de ces quantités ont été données déjà à la page 120.

Si, en général, nous admettons qu'il y ait dilatation du gaz, l'équation (91) donne pour la quantité de chaleur Q une quantité positive; c'est-à-dire, il faut fournir de la chaleur quand

$$\frac{n}{m} < k.$$

Lorsqu'on a, de plus, $\frac{n}{m} < 1$, l'équation (88) fait voir qu'il y a accroissement de température.

L'équation (91) montre encore que, dans tous les cas, la quantité de chaleur Q est directement proportionnelle à la

variation de la température $t_1 - t_2$. [Ce que nous disons ici de Q a lieu également, d'après les équations (89) et (90), pour le travail extérieur et pour le changement du travail intérieur.] D'après cela, la quantité

$$(92) \qquad \frac{mk - n}{m - n} c$$

de l'équation (91) doit être appelée *la chaleur spécifique du gaz relative au changement d'état exprimé par la loi*

$$p^m v^n = \text{const.}$$

Il est du reste facile de démontrer qu'il n'y a lieu de considérer cette chaleur spécifique, que si les variations de la pression obéissent à la loi indiquée : en d'autres termes, que la quantité de chaleur fournie est proportionnelle à l'élévation de la température *uniquement* dans le cas de la loi mentionnée.

En effet, si nous posons

$$dQ = \lambda dt,$$

relation dans laquelle λ représente une constante, nous aurons, en substituant dans la première des équations (65),

$$dQ = \lambda dt = \frac{c}{R}(v dp + kp dv).$$

Mais l'équation (67) différentiée donne

$$dt = \frac{1}{R}(v dp + p dv);$$

et avec l'équation précédente, il vient

$$v dp(\lambda - c) = p dv(kc - \lambda).$$

Divisons par pv, nous aurons

$$(\lambda - c)\frac{dp}{p} = (kc - \lambda)\frac{dv}{v},$$

et l'intégration de cette dernière équation, où λ, c et k sont

des constantes, nous fait retomber sur l'équation

$$p^m v^n = \text{const.},$$

lorsqu'on pose $m = \lambda - c$ et $n = \lambda - kc$.

Si, maintenant, on substitue ces valeurs dans l'expression (92), on trouve, comme cela devait être,

$$\frac{mk - n}{m - n} c = \lambda.$$

Pour toute autre hypothèse relative à la loi qui régit la variation de pression, la quantité de chaleur Q n'est plus proportionnelle à la variation de température; en général, la quantité Q se présente alors comme une fonction de t et de v, ou de t et de p.

VII. — *Comment se comportent les gaz quand ils changent d'état suivant un trajet non réversible.*

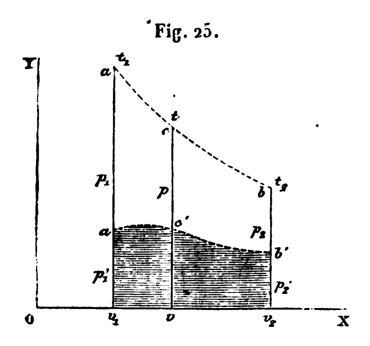
Nous avons admis précédemment que, dans sa dilatation, le gaz doit surmonter une résistance égale à chaque instant à sa force expansive. Cela arrive toujours quand la dilatation se fait avec une lenteur suffisante.

Lorsque la pression extérieure est *plus petite* que la force expansive du gaz, et c'est le seul cas que nous ayons à examiner, les résultats changent, comme nous l'avons déjà dit dans la première Section, p. 85 et suivantes; alors les équations fondamentales ne sont plus applicables, et on ne peut pas, en général, suivre pas à pas le changement d'état; il est seulement possible de trouver, en faisant certaines hypothèses, l'état final du gaz, c'est-à-dire l'état où il se trouve quand l'équilibre est rétabli.

Nous supposons que l'unité de poids du gaz soit renfermée dans un cylindre au moyen d'un piston *sans poids*, et qu'elle ait la pression p_1, le volume v_1. Nous admettons, en outre, que le gaz soit en repos, et que le piston soit d'abord chargé d'un poids p_1 par unité de surface, pour que l'équilibre puisse être maintenu. On fait en sorte que la pression extérieure prenne

subitement une valeur p'_1 inférieure à p_1 : alors le gaz se dilatera, le piston sera repoussé, et le gaz aura à vaincre la pression extérieure p' (*fig.* 25), qui peut être variable ou con-

Fig. 25.



stante. Lorsque le volume du gaz est devenu v_2, qui correspond à la pression extérieure p'_2, on arrête subitement le piston; à ce moment, le gaz possède nécessairement un mouvement giratoire sensible; il ne rentrera que peu à peu au repos, et pendant ce temps, son mouvement se transformera en un mouvement moléculaire, c'est-à-dire en chaleur. Par suite, la pression que le gaz exerce sur le piston augmente rapidement en passant de la valeur p'_2 à la valeur p_2, et comme le piston doit rester stationnaire, il faudra augmenter la pression extérieure dans la même proportion. Si l'équilibre est rétabli au moment où le gaz possède la pression p_2 et le volume v_2, le passage de l'état initial a à l'état final b s'est effectué d'une tout autre manière que dans les cas traités jusqu'ici : la quantité de chaleur Q fournie au gaz pendant ce passage n'a aucune relation ni avec le changement de la pression extérieure, ni avec le travail extérieur. Dans les cas précédents, la connaissance de la loi suivant laquelle la pression variait avec le volume conduisait, au moyen des équations (65), à la loi qui réglait l'introduction de la chaleur. Ici la solution de la question exige une autre donnée.

Supposons que les états initial et final soient déterminés respectivement par les quantités p_1, v_1, t_1, et p_2, v_2, t_2, et que, de plus, la loi d'après laquelle la pression extérieure p' varie

avec le volume soit donnée : la variation du travail intérieur est indépendante de la manière dont le passage s'est effectué, et il y a équilibre au commencement et à la fin de l'opération. On a donc toujours

$$U_2 - U_1 = \frac{c}{A}(t_2 - t_1);$$

mais le travail extérieur est

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p'\,dv;$$

par suite, on a, pour la quantité de chaleur Q fournie pendant le changement d'état,

$$Q = A(U_2 - U_1) + AL,$$

ou bien

(93) $$Q = c(t_2 - t_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p'\,dv.$$

Cette équation ne diffère de l'équation (73) que par le changement de p en p'; mais les valeurs initiale et finale p'_1 et p'_2 de la pression extérieure sont indépendantes des valeurs t_1 et t_2 de la température : on conclut de là qu'on n'a pas à s'occuper de la manière dont la chaleur a été introduite, et qu'il s'agit uniquement de déterminer la valeur totale Q de la quantité de chaleur fournie.

L'équation (93) suffit pour résoudre les problèmes relatifs au cas actuel. Étant donnés l'état final $(t_2\, v_2\, p_2)$ et la loi qui détermine le changement de la pression extérieure p' pendant la dilatation du gaz, on peut calculer la quantité de chaleur Q introduite pendant l'opération; au contraire, étant donnés Q et le rapport de dilatation $\frac{v_2}{v_1}$, si on peut calculer le travail extérieur, l'état final du gaz (quand l'équilibre est rétabli) se déterminera par l'équation (93); mais il faut toujours que les conditions $p'_1 < p_1$ et $p'_2 \leqq p_2$ soient remplies. Appliquons les résultats que nous venons d'obtenir à quelques cas particuliers.

Problème I. — *On suppose que l'état a de l'unité de poids du gaz soit déterminé par les valeurs p_1, v_1, t_1 (fig. 25). Le gaz doit se dilater et acquérir le volume v_2 en surmontant une pression constante $p' < p_1$, sans qu'il y ait ni introduction ni soustraction de chaleur; on demande l'état final du gaz.*

Il faut faire $Q = 0$ dans l'équation (93), et comme p est constant, on a

$$c(t_2 - t_1) + Ap'(v_2 - v_1) = 0. \tag{94}$$

Pour le travail extérieur du gaz, on a

$$- L = p'(v_2 - v_1) = \frac{c}{A}(t_2 - t_1). \tag{95}$$

La température finale t_2 se détermine au moyen de l'équation (94), et comme v_2 est supposé connu, la pression finale p_2 se déduira de l'équation

$$p_2 v_2 = R(a + t_2).$$

Si l'on donnait la pression finale p_2 au lieu du volume v_2, on joindrait à la dernière équation la suivante :

$$p_1 v_1 = R(a + t_1),$$

et ces deux équations, combinées avec les équations (66) et (94), donneraient

$$v_2 = v_1 \frac{p_1 + (k-1)p'}{p_2 + (k-1)p'}. \tag{96}$$

Ensuite, la température finale t_2 se calculerait d'après l'équation

$$a + t_2 = \frac{p_2 v_2}{R},$$

et, enfin, en substituant la valeur de v_2 dans l'équation (95), on trouverait le travail extérieur L :

$$L = p' v_1 \frac{p_1 - p_2}{p_2 + (k-1)p'}. \tag{97}$$

Dans le cas limite où la pression finale p_2 est égale à la

pression extérieure p', les équations précédentes donnent, pour le rapport de la détente,

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1 + (k-1)p_2}{kp_2} = \frac{1}{k}\left(\frac{p_1}{p_2} + k - 1\right),$$

et le travail extérieur devient

$$L = \frac{(p_1 - p_2)v_1}{k}.$$

Supposons que, dans ce cas, la pression initiale du gaz soit de $\frac{1}{2}$ atmosphère, que la température initiale soit $t_1 = 30^\circ$; on veut que le gaz, en surmontant une pression extérieure égale à une atmosphère, se dilate jusqu'à ce que sa force expansive finale soit aussi d'une atmosphère. On aura

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{1,410}\left(\frac{1,5}{1} + 0,410\right) = 1,3546.$$

La température finale se déduit de la formule

$$a + t_2 = \frac{p_2 v_2}{R} = \frac{p_2}{p_1}\frac{v_2}{v_1}(a + t_1), \quad \text{d'où} \quad t_2 = +0,629.$$

Pour le travail extérieur, on aura

$$L = \frac{(p_1 - p_2)v_1}{k} = \frac{p_1 - p_2}{kp_1} R(a + t_1) = 2096^{\text{kgm}},78.$$

Cette dernière valeur donne en même temps la diminution du travail intérieur.

Problème II. — *Étant donné l'état initial* (p_1, v_1, t_1) *de l'unité de poids du gaz, on suppose que le gaz se dilate et prenne le volume v_2 sans que le gaz surmonte aucune pression extérieure, et sans qu'il y ait ni introduction, ni soustraction de chaleur; on demande l'état final du gaz.*

Dans ce cas, il faut faire $p' = 0$ et $Q = 0$ dans l'équation (93); on a alors

$$c(t_2 - t_1) = 0,$$

ou bien

$$t_2 = t_1,$$

et, par suite,

$$p_2 = \frac{p_1 v_1}{v_2}.$$

On conclut de là un résultat très-remarquable : dans les conditions indiquées, la température finale (lorsque l'équilibre est rétabli) est égale à la température initiale.

Ce cas se réalise quand on réunit un vase rempli de gaz à un espace vide; après l'expansion du gaz, et lorsqu'il est rentré au repos, la température doit être celle du commencement. Les expériences de M. Joule (*) ont confirmé ce théorème. On avait disposé, dans un calorimètre à eau, deux ballons de cuivre réunis par un tube qui pouvait être fermé au moyen d'un robinet; l'un des ballons contenait de l'air à la pression de 21 atmosphères, l'autre était vide. Ayant ouvert le robinet, on laissa l'équilibre se rétablir dans les ballons, et on ne constata dans le calorimètre aucun changement de la température.

Nous reviendrons plus tard sur cette expérience pour examiner aussi les changements qui se produisent dans chacun des ballons. Pour le moment il suffisait de vérifier qu'il n'y a pas eu de changement de température dans l'ensemble du système.

Les problèmes que nous venons de traiter expliquent suffisamment l'usage de l'équation (93); reprenons maintenant, pour les appliquer au gaz, les propositions relatives aux cycles non réversibles, qui ont été établies (p. 89).

Nous avons déjà remarqué que généralement, dans les problèmes de ce genre, on n'a pas besoin de savoir de quelle manière se fait l'introduction de la chaleur pendant le passage du gaz d'un état d'équilibre à un autre. C'est l'équation (93) qui répond à la question que l'on se pose ordinairement, en faisant connaître l'état final du gaz, lorsqu'on connaît la chaleur totale qui a été fournie ou enlevée au gaz pendant l'opération.

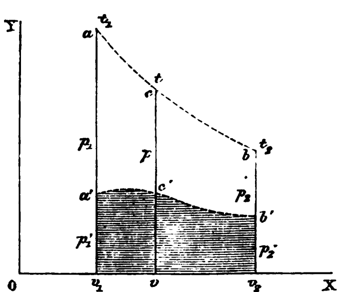
Mais il y a des cas où il faut indiquer *de quelle manière* la

---

(*) Joule, *Phil. Mag.*, t. XXVI, 1848.

chaleur doit être fournie; il existe pour cela un moyen très-simple. Soient p_1, v_1 et t_1 les valeurs qui déterminent l'état initial *a* d'un gaz qui doit passer à l'état final *b* (p_2, v_2, t_2) en surmontant une pression extérieure p' dont les variations sont réglées par la courbe *a' b'* (*fig.* 26). Interrompons subitement

Fig. 26.



par la pensée l'introduction de la chaleur et la dilatation au moment où le volume v_1 est devenu v; à partir de cet instant, la pression augmente de p' à p, tandis que le gaz rentre au repos. D'après les valeurs p et v de la pression et du volume, on connaît la température t à l'état *c*, ainsi que l'accroissement du travail intérieur $U - U_1$, et par suite la quantité de chaleur qui a été fournie au gaz dans le trajet *a' c'*. On reconnaît par là que la courbe *acb* indique comment la chaleur est introduite, et que, pour un cycle non réversible, il faut avoir deux courbes telles que *acb* et *a' c' b'* pour pouvoir suivre complétement le changement d'état du corps. La courbe *a' c' b'* indique comment varie la pression extérieure p', et par suite elle donne le travail extérieur. Ces deux courbes coïncident lorsque le cycle est réversible.

Dans la suite nous désignerons par t la température d'un corps à un certain moment de son changement d'état; ce sera *la température que le corps posséderait, si en ce moment on arrêtait subitement la dilatation et l'introduction de la chaleur et si le corps rentrait au repos.*

Admettons que l'équilibre soit rétabli au moment où le volume atteint la valeur v, et que le travail extérieur (aire

$v_1\,a'\,c'\,v$) soit désigné par L, on aurait alors l'équation

$$Q = A(U - U_1) + AL.$$

Si, au contraire, l'interruption avait lieu pour le volume $v + dv$, on aurait

$$Q + dQ = A(U + dU - U_1) + A(L + dL).$$

En retranchant membre à membre, il vient

$$dQ = A(dU + dL),$$

ou bien, parce qu'on a $dL = p'\,dv$,

$$dQ = A(dU + p'\,dv);$$

ou enfin

$$dQ = A(dU + p\,dv) - A(p - p')dv.$$

Dans cette équation le terme $A(dU + p\,dv)$ exprime la quantité de chaleur qu'il faudrait fournir au corps pendant la dilatation dv, si les changements d'état se faisaient suivant le trajet réversible acb; désignons cette quantité par dQ', il vient alors

$$(98)\qquad dQ = dQ' - A(p - p')dv.$$

On pourrait appliquer ici à la quantité dQ' les équations générales (III) (p. 76) ou les équations (65) lorsqu'il s'agit des gaz; mais il faut interpréter les valeurs de la pression p et de la température t dans le sens indiqué ci-dessus.

Divisons les deux membres de l'équation précédente par $AS = A(a + t)$, nous aurons, pour la dilatation totale de v_1 à v_2,

$$(99)\qquad \int \frac{dQ}{A(a+t)} = \int \frac{dQ'}{A(a+t)} - \int_{v_1}^{v_2} \frac{(p - p')dv}{a + t}.$$

Nous avons montré aux pages 82 et 132, que l'intégrale

$$\int \frac{dQ'}{A(a+t)}$$

conserve la même valeur P de quelque manière que le corps

passe de l'état initial (p_1, v_1) à l'état final donné (p_2, v_2), *lorsque le passage s'effectue suivant un trajet réversible;* la même chose a lieu ici, puisque cette intégrale est indépendante du mode d'introduction de la chaleur.

Mais cela n'a plus lieu pour la seconde intégrale du deuxième membre de l'équation (99).

Puisque d'après nos hypothèses on a $p > p'$, cette intégrale est toujours positive; on en conclut que, dans un trajet non réversible, l'intégrale

$$\int \frac{dQ}{A(a+t)}$$

est toujours plus petite que P, résultat auquel nous sommes déjà arrivé (p. 90) par une tout autre voie.

Lorsqu'on ramène le corps à l'état initial suivant un trajet quelconque (ce qui peut se faire seulement sur un trajet réversible, parce qu'il y a alors compression), on a pour toute la durée du cycle *non* réversible $P = 0$, et, par suite,

$$\int \frac{dQ}{A(a+t)} = -\int_{v_1}^{v_2} \frac{(p-p')\,dv}{a+t}:$$

c'est cette valeur que nous avons désignée par N dans l'équation (50) de la page 92.

Les équations précédentes s'appliquent à tous les corps; si nous nous occupons spécialement des gaz, l'équation (99) peut s'écrire, à cause de la relation

$$pv = R(a+t),$$

de la manière suivante :

$$(100) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{dQ}{A(a+t)} &= P - \int_{v_1}^{v_2} R\left(1 - \frac{p'}{p}\right)\frac{dv}{v}, \\ &= P - R \log\text{nép} \frac{v_2}{v_1} + R\int_{v_1}^{v_2} \frac{p'}{p}\frac{dv}{v}. \end{aligned} \right.$$

Pour ce cycle non réversible, il faudrait faire $P = 0$, si l'on

ramenait le gaz à son état initial; on aurait alors

$$\int \frac{dQ}{A(a+t)} = -R \log \text{nép} \frac{v_2}{v_1} + R \int_{v_1}^{v_2} \frac{p'}{pv} dv.$$

Lorsque la dilatation se fait sans que le gaz ait à surmonter aucune pression extérieure, on a $p' = 0$, et

$$\int \frac{dQ}{A(a+t)} = -R \log \text{nép} \frac{v_2}{v_1} \ (*).$$

L'équation (100) peut se mettre sous différentes formes. Pour les gaz en général on a trouvé, d'après l'équation (81),

$$P = \frac{c}{A} \log \text{nép} \frac{p_2 v_2^k}{p_1 v_1^k}.$$

Si l'on tient encore compte de l'équation (66) 65

$$R = \frac{c}{A}(k-1),$$

on trouve, toutes réductions faites,

$$(101) \quad \int \frac{dQ}{A(a+t)} = \frac{c}{A} \log \text{nép} \frac{a+t_2}{a+t_1} + \frac{c}{A}(k-1) \int_{v_1}^{v_2} \frac{p'\,dv}{pv}.$$

Lorsqu'on ne fournit ou qu'on n'enlève pas de chaleur au gaz (cas qui se présente très-souvent), on a $dQ = 0$; l'équation (101) devient alors

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{p'\,dv}{pv} = \frac{1}{k-1} \log \text{nép} \frac{a+t_1}{a+t_2}.$$

Il faut encore faire disparaître de l'intégrale le dénominateur pv. Pour cela, remarquons que, d'après l'équation (93), on a ici

$$c(t-t_1) + A \int_{v_1}^{v} p'\,dv = 0,$$

(*) Ce dernier résultat a été donné aussi par M. Clausius; Mémoire V, p. 165.

ou bien

$$\frac{c}{R}(pv - p_1 v_1) + A\int_{v_1}^{v} p'\,dv = 0.$$

On peut déduire de là la valeur de pv et la substituer dans l'équation ci-dessus; on obtiendra alors, après quelques réductions très-simples, la valeur suivante du travail extérieur,

$$\int_{v_1}^{v_2} p'\,dv = \frac{c}{A}(t_1 - t_2).$$

On aurait pu écrire ce résultat sans faire aucun calcul; car dans le cas actuel le *travail extérieur* doit être égal *au changement du travail intérieur,* puisque $dQ = 0$.

Pour donner encore un exemple, nous supposerons que la dilatation se fasse suivant un trajet non réversible, et que la température reste constante pendant l'introduction de la chaleur : il s'agit de la température relative à l'état d'équilibre. On a, dans le cas actuel,

$$a + t_1 = a + t = a + t_2 = \frac{pv}{R}:$$

l'équation (101) donne immédiatement

$$\int \frac{dQ}{A(a+t)} = \frac{c}{AR}\frac{(k-1)}{a+t}\int_{v_1}^{v_2} p'\,dv;$$

ou, d'après la valeur de AR donnée par l'équation (46),

$$Q = A\int_{v_1}^{v_2} p'\,dv,$$

résultat qui est d'ailleurs évident, puisque le travail intérieur ne change pas quand on suppose la température constante.

Ces exemples montrent suffisamment qu'il ne faut pas attribuer une trop grande valeur aux équations (99) et (101) de la théorie mécanique de la chaleur. Pour résoudre les problèmes ordinaires relatifs à la dilatation d'un gaz suivant un trajet non réversible, l'équation

$$(102) \qquad dQ = c\,dt + A p'\,dv$$

suffit complétement. Dans cette équation t désigne la température relative à l'état d'équilibre et p' la pression qui lui correspond. Lorsque la courbe *acb* de cette pression et la courbe *a' c' b'* (*fig.* 26) de la pression extérieure sont données, on peut résoudre facilement, au moyen de l'équation (102), un grand nombre de problèmes. En divisant les deux membres de cette équation par $A(a+t)$, on retombe sur l'équation (101); celle-ci n'est donc qu'une forme un peu simplifiée de l'équation générale (102).

Quand les corps ne sont pas gazeux, on écrit l'équation (102) de la manière suivante :

$$dQ = A(dU + p'\,dv).$$

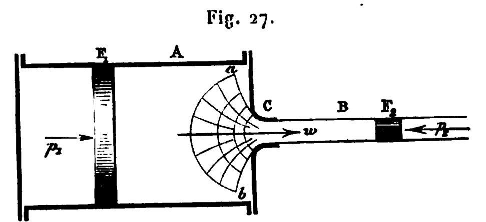
Dans cette équation U désigne le travail total intérieur, la variation de ce travail dU peut se décomposer en trois parties : la première correspond à l'augmentation du travail d'oscillation, la deuxième au changement de position relative des molécules, la troisième au changement de la force vive, c'est-à-dire du mouvement *visible* du corps.

VIII. — *De l'écoulement des fluides.*

L'écoulement des gaz, et plus généralement des fluides, peut être considéré comme un cas particulier du passage d'un corps d'un état à un autre par un trajet non réversible. Le fluide se dilate en surmontant une résistance égale à sa force expansive en même temps que de la chaleur lui est fournie ou soustraite, et une portion du travail accompli pendant la dilatation est employée à produire le mouvement visible du fluide. Nous supposerons constantes la pression dans le réservoir d'où sort le fluide, la pression à l'orifice et la pression dans l'espace où le fluide s'écoule, et nous admettrons la continuité du mouvement. En outre, l'orifice est percé dans une simple paroi, et le fluide le traverse en filets parallèles; enfin il n'y a pas de solution de continuité dans le fluide : cette hypothèse se fait généralement dans les problèmes d'hydraulique. On réaliserait ces conditions de la manière suivante.

Le réservoir A (*fig.* 27) d'où sort le fluide est un cylindre de section F_1 dans lequel se meut un piston dont la face exté-

Fig. 27.



rieure supporte la pression p_1 par centimètre carré; ce piston est poussé en avant pendant l'écoulement par la force $F_1 p_1$. L'écoulement se fait par un ajutage cylindrique B dont la section F_2 est égale à celle de l'orifice c, et dans lequel se meut (sans frottement) un piston, dont la face extérieure est pressée par la force p_2 pour chaque unité de surface. Ce piston se meut avec une vitesse w égale à celle que possède le fluide à l'orifice c.

Admettons qu'au bout d'un certain temps le piston F_1 ait avancé de la quantité s_1 et que le piston F_2 ait rétrogradé de s_2, alors le fluide a évidemment gagné dans le cylindre A le travail $F_1 p_1 s_1$ et a dépensé dans l'ajutage B le travail $F_2 p_2 s_2$. Pendant ce temps, on a donc communiqué au fluide le travail

$$F_1 p_1 s_1 - F_2 p_2 s_2.$$

$F_1 s_1$ représente le volume du fluide qui est sorti du réservoir A, et $F_2 s_2$ le volume de la même quantité de fluide entrée dans le cylindre B. S'il s'est écoulé précisément l'unité de poids du fluide, le produit $F_1 s_1$ représentera le volume spécifique dans le cylindre A et $F_2 s_2$ le volume spécifique dans le cylindre B. En appelant v_1 et v_2 ces quantités, on aura

$$F_1 p_1 s_1 - F_2 p_2 s_2 = p_1 v_1 - p_2 v_2.$$

Cette différence représente alors *le travail que l'unité de poids a gagné pendant l'écoulement.*

A mesure que le fluide gagne l'orifice, la pression passe de la valeur p_1 à la valeur p_2, et le volume spécifique de la valeur v_1 à la valeur v_2; mais en même temps la vitesse passe de

la valeur zéro à la valeur w, qui correspond à l'orifice. Ces changements ne se font pas brusquement; il se forme à partir de l'orifice un entonnoir qui s'étend dans le cylindre A jusqu'à une certaine surface *ab*, sur laquelle le fluide commence à se mettre en mouvement et où la pression est encore p_1; dans le trajet depuis cette surface jusqu'à l'orifice, le mouvement s'accélère rapidement, et la diminution de la pression se fait d'après une loi particulière. En suivant un seul élément de fluide dans son trajet à travers l'entonnoir, on trouve qu'à cause de la diminution de pression, il doit se dilater en agissant toujours *sur les éléments voisins par sa force expansive*, comme si cet élément entouré d'une enveloppe se dilatait à l'état de repos en surmontant une résistance égale à sa force expansive.

A chaque unité de poids du fluide correspond dans ce passage un travail

$$\int_{v_1}^{v_2} p\,dv.$$

Mais, comme les pressions p_1 et p_2 sont maintenues constantes, le fluide a gagné le travail

$$p_1 v_1 - p_2 v_2.$$

Le travail total qui a été gagné ou qui est devenu libre est donc

$$p_1 v_1 - p_2 v_2 + \int_{v_1}^{v_2} p\,dv,$$

et c'est ce travail qui est employé pour créer la vitesse d'écoulement.

En désignant par w la vitesse avec laquelle les molécules du fluide traversent l'orifice, on a pour le travail gagné par unité de poids

$$\frac{w^2}{2g},$$

g désignant l'accélération de la pesanteur; et on a en général, pour l'écoulement sous une pression constante, l'é-

quation

$$(103)\qquad \frac{w^2}{2g} = p_1 v_1 - p_2 v_2 + \int_{v_1}^{v_2} p\,dv.$$

Lorsqu'on différentie cette équation, il vient

$$(103')\qquad d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -d(pv) + p\,dv,$$

ou, en effectuant la différentiation indiquée dans le deuxième membre,

$$(103'')\qquad d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -v\,dp.$$

Ces équations montrent facilement que la question telle que nous l'avons posée est indéterminée. L'intégration indiquée dans l'équation (103) ne peut être effectuée que si l'on connaît la loi suivant laquelle la pression p du fluide varie avec le volume v à mesure qu'il chemine vers l'orifice. Comme on peut faire un nombre infini d'hypothèses relativement à cette loi, il y a un nombre infini de formules dont chacune donne une valeur particulière pour la vitesse d'écoulement. Mais dans chaque cas particulier, cette hypothèse n'est nullement arbitraire, car elle dépend du mode d'introduction ou de soustraction de la chaleur. Il faut donc pour résoudre le problème actuel faire aussi usage de l'équation fondamentale (9)

$$dQ = A(dU + p\,dv).$$

Dans cette équation dQ représente la quantité de chaleur fournie à l'unité de poids du fluide au point de son parcours vers l'orifice où il se dilate de dv sous la pression p, et dU est l'accroissement du travail intérieur relatif à ce même point, qui ne comprend pas le travail correspondant au mouvement *visible*. La quantité dU a ici la signification que nous lui avons attribuée en établissant les équations fondamentales, lorsque nous supposions que les changements d'état du corps avaient lieu suivant un cycle non réversible.

La solution du problème de l'écoulement exige donc l'emploi de *deux* équations [(9) et (103)] et en outre la connais-

sance de la loi suivant laquelle le fluide reçoit ou cède de la chaleur dans son trajet vers l'orifice (*).

On peut combiner ces équations en portant dans l'équation (103′) la valeur de $p\,dv$ tirée de l'équation (9), il vient alors

$$(104) \qquad d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -d(pv) - dU + \frac{dQ}{A},$$

et dans cette dernière équation il faut employer pour les quantités dQ et dU les valeurs données précédemment, qui sont applicables à tous les corps.

Les formules précédentes conviennent à tous les fluides; faisons encore quelques remarques avant de les appliquer aux gaz. En nous servant de la *fig.* 27, nous avons supposé que la pression était p_2 dans le plan de l'orifice et que le fluide se répandait dans un tuyau B dont la section était celle de l'orifice, et dans lequel un piston reculait avec la vitesse w devant le fluide. Dans la réalité les choses se passent un peu autrement; l'ajutage s'ouvre généralement dans un réservoir plus grand que celui d'où sort le fluide, et l'on suppose qu'on y maintienne également la pression constante. Si le fluide est un gaz ou une vapeur, le jet s'étale à partir de l'orifice C en affectant aussi dans le second réservoir la forme d'un entonnoir, et les molécules du fluide passent peu à peu de la vitesse w à une vitesse nulle. La pression dans le second vase est ordinairement connue, mais elle n'est évidemment pas égale à la pression p_2 (c'est seulement pour les liquides que l'on peut supposer ces pressions égales); il suit de là que la pression p_2 et, par conséquent, le volume v_2 dans le plan de l'orifice sont inconnus et ne sont pas déterminés par la connaissance seule de la pression dans le second vase. Cette cir-

(*) C'est dans un ouvrage intitulé : *Das Locomotivenblasrohr*, Zurich, 1863, que j'ai appelé, pour la première fois, l'attention sur la connexion des équations (103), qui sont connues depuis longtemps, avec les équations auxquelles conduit la théorie mécanique de la chaleur. Les équations qui sont données ici sont développées autrement dans cet ouvrage, et leur application à l'écoulement des fluides y est donnée dans plusieurs cas.

constance introduit une nouvelle indétermination dans les équations établies ci-dessus; en nous appuyant sur certaines expériences relatives à l'écoulement des vapeurs, dont nous parlerons plus tard, nous pouvons admettre que la pression dans le second réservoir soit la même jusqu'à une très-petite distance de l'orifice. Lorsqu'on désigne par p_2 la pression dans ce réservoir et lorsqu'on emploie cette valeur p_2 dans l'équation (103), on ne trouve pas pour w rigoureusement la valeur de la vitesse d'écoulement, c'est-à-dire de la vitesse dans le plan de l'orifice, mais on obtient la vitesse des molécules du fluide arrivées à une certaine section de l'entonnoir, en dehors de l'orifice, section à partir de laquelle la pression devient p_2. Nous admettons que cette section soit située très-près de l'orifice; alors l'épanouissement du jet de gaz ou de vapeur se fait sous une pression constante p_2; le volume spécifique et la température passent des valeurs v_2, t_2, relatives à cette section particulière, aux valeurs v'_2 et t'_2, qui correspondent à l'état de repos du fluide dans le second réservoir, parce que le travail $\frac{w^2}{2g}$ contenu dans l'unité de poids du fluide se transforme en chaleur dans le passage au repos.

Des expériences précises peuvent seules donner des éclaircissements complets sur ces questions; pour le moment nous nous bornerons à ces considérations.

Pour les gaz on peut mettre l'équation (104) sous une forme plus simple; à cause des équations (67) et (69), p. 117 et suiv., on trouve

$$A\,d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -AR\,dt - c\,dt + dQ,$$

ou bien, d'après la relation (66),

$$(105) \qquad A\,d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -kc\,dt + dQ,$$

dans laquelle dQ doit être déterminé d'après les équations (65).

On pourrait appliquer ces formules à un très-grand nombre

de cas particuliers (*); nous ne traiterons ici que le plus important.

Lorsqu'un gaz se rend d'un premier réservoir où sa pression p_1 est constante dans un second réservoir où la pression p_2 reste aussi constante, il arrive très-rarement qu'on lui envoie ou qu'on lui enlève de la chaleur dans son trajet vers l'orifice; nous n'étudierons l'écoulement que dans le cas où il n'y a pendant l'écoulement, *ni introduction, ni soustraction de chaleur.*

L'équation (105) devient, puisque $dQ = 0$,

$$A\,d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -kc\,dt, \tag{106}$$

et l'équation (65) donne, dans la même hypothèse,

$$v\,dp + kp\,dv = 0.$$

De cette formule nous avons déjà déduit (p. 127) l'équation

$$\frac{a+t}{a+t_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Désignons, comme on a l'habitude de le faire, par T la température absolue $a + t$ (cette quantité a été appelée S dans la première Section); alors nous pourrons remplacer dans toutes les formules dt par dT.

Si l'on désigne par T_1 la température absolue dans le premier réservoir et par T_2 celle du plan de l'orifice (ou plutôt celle d'une section située très-près de cet orifice), on a

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}, \tag{107}$$

puisque dans cet endroit on doit avoir une pression égale à p_2. En intégrant l'équation (106) et en supposant qu'à l'intérieur du premier réservoir la vitesse soit nulle et qu'elle soit w à

(*) Voyez *Das Locomotivenblasrohr*, p. 68-74.

l'orifice, on trouve

$$(108) \qquad A\frac{w^2}{2g} = kc(T_1 - T_2).$$

Les deux dernières équations résolvent le problème proposé.

Substituons dans l'équation (108) la valeur de T_2 tirée de l'équation (107), on a pour la vitesse d'écoulement

$$(109) \qquad w = \sqrt{2g\frac{kc}{A}T_1\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}.$$

Cette équation a été établie pour la première fois, mais par une marche différente, par M. Weisbach (*).

La diminution de température $T_1 - T_2$ qui se fait depuis l'intérieur du premier réservoir jusqu'au plan de l'orifice se détermine par l'équation (108), quand w a été trouvé par la formule (109).

Le volume spécifique v_2 du gaz dans le plan de l'orifice se déduit de l'équation (67)

$$(110) \qquad v_2 = \frac{RT_2}{p_2}.$$

Enfin l'équation

$$(111) \qquad Gv_2 = Fw$$

donne le poids G de la quantité de gaz qui arrive à l'orifice pendant une seconde, quand la section de l'orifice est égale à F.

Hors de l'orifice, le jet d'air s'épanouit, d'après notre hypothèse, sous la pression constante p_2; il n'y a pas de chaleur introduite, mais le travail $\frac{w^2}{2g}$ qui correspond à la vitesse w se transforme en chaleur, et les choses se passent comme si le gaz recevait en rentrant au repos la quantité de chaleur $A\frac{w^2}{2g}$, sous la pression constante p_2. Soit T'_2 la température du gaz

(*) WEISBACH, *Ingenieur-und Maschinenmechanik*, 3e édit., t. I, p. 821; Brunswick, 1855.

dans le second réservoir lorsqu'il est rentré au repos; on a, d'après l'équation (86),

$$A\frac{w^2}{2g} = kc(T'_2 - T_2).$$

La comparaison de cette équation avec l'équation (108) fournit le résultat très-simple

$$T'_2 = T_1,$$

c'est-à-dire la température est la même dans les deux réservoirs; ainsi, lorsqu'un gaz permanent s'écoule d'un réservoir dans un autre sans qu'on lui fournisse ni qu'on lui enlève de la chaleur et que la pression reste constante dans chaque réservoir, il n'y a *pas de changement de température;* ou, plus exactement, la température est à la sortie, après l'épanouissement, la même que la température initiale. Mais, d'après l'équation (107), la température du gaz dans le plan de l'orifice est toujours moindre. Le passage du gaz de la vitesse w à la vitesse zéro est accompagné, non-seulement d'un accroissement de la température, mais encore d'une augmentation du volume spécifique; la valeur de v_2 [équation (111)] devient, comme on le voit facilement,

$$v'_1 = \frac{RT_1}{p_2}.$$

Les expériences faites sur l'écoulement des gaz ne confirment pas entièrement un certain nombre des résultats précédents; pour faire coïncider les résultats donnés par nos formules avec le résultat déduit des expériences, il faut faire certaines corrections que nous allons indiquer.

On sait qu'il y a toujours perte de vitesse dans l'écoulement par des orifices en mince paroi; la véritable vitesse est plus petite que celle que donne le calcul, et le rapport de ces deux vitesses est appelé *coefficient de vitesse*. Désignons par φ ce rapport, par w_e la vitesse effective et par w la vitesse théorique donnée par l'équation (109), on aura

$$w_e = \varphi w.$$

Pour l'écoulement de l'unité de poids de fluide, il y a donc, comme on le démontre dans l'hydraulique, une perte de travail dont l'expression est

$$L = \frac{w^2 - w_e^2}{2g} = (1 - \varphi^2)\frac{w^2}{2g},$$

et, dans le cas simple que nous considérons (écoulement par un orifice en mince paroi), ce travail perdu est considéré comme le travail nécessaire pour vaincre les frottements dans l'orifice. On peut conserver cette interprétation pour l'étude des phénomènes d'écoulement dans la théorie mécanique de la chaleur; mais on peut expliquer plus clairement comment ce travail est employé. Quand les particules du gaz passent le long des parois de l'orifice, il y a évidemment création de chaleur par suite du frottement.

Le gaz et les parois de l'orifice absorbent cette chaleur; mais à cause de la mobilité du fluide, on peut penser qu'il prend presque la totalité de cette chaleur, et qu'une quantité négligeable se porte sur les parois de l'orifice. La chaleur créée se manifeste dans le jet de gaz comme mouvement des molécules, dont l'accroissement produit une augmentation de la température; on peut dire que, dans l'écoulement d'un gaz, les résistances produisent non pas une perte de travail proprement dit, mais seulement une diminution de la force vive du mouvement visible. Le travail qui correspond à cette diminution se transforme en travail *intérieur*, et l'accroissement du travail intérieur se manifeste simplement dans le gaz comme augmentation de la température. Un gaz s'écoule donc par suite des résistances avec une vitesse *plus petite* que celle que donne l'équation (109), tandis que la température T_2 dans l'orifice est plus élevée que celle qu'on déduit de la formule (108). La somme du travail intérieur et du travail qui correspond au mouvement visible *n'est point* changée par les frottements. La même chose arrive évidemment quand l'écoulement d'un gaz se fait par des orifices quelconques (sans addition ni soustraction de chaleur), par exemple, par des tuyaux de conduite horizontaux, qui présentent des élargissements, des rétrécis-

sements, des courbes, des coudes, etc.; chacune des résistances produit une diminution de la force vive du mouvement visible; mais pour les gaz il produit en même temps une augmentation de la température qui correspond à cette diminution, et pour les autres fluides un accroissement égal du travail intérieur.

Revenons à notre exemple; la vitesse effective avec laquelle le gaz quitte l'orifice sera d'après l'équation (109)

$$(112) \qquad w_e = \varphi \sqrt{2g \frac{kc}{A} T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right]^{\frac{k-1}{k}}}.$$

La température absolue effective T_2 du gaz dans l'orifice est donnée d'après l'équation (108) par la relation

$$(113) \qquad T_1 - T_2 = \frac{A}{kc} \frac{w_e^2}{2g}.$$

Le volume spécifique du gaz dans l'orifice se calcule d'après l'équation (110), dans laquelle on substitue la valeur de T_2 tirée de l'équation (113); et enfin le poids G du gaz qui arrive pendant une seconde à l'orifice est donné par la formule

$$G v_2 = \alpha F w_e = \alpha\varphi F w,$$

dans laquelle F est la section de l'orifice, qui a été multipliée ici par le coefficient α (coefficient de contraction), parce que la section du jet à l'endroit où la pression est devenue égale à la pression extérieure p_2 est en général différente de celle de l'orifice, et parce que, dans l'écoulement d'un gaz par un orifice en mince paroi, il se produit des contractions semblables à celles qu'on observe dans l'écoulement de l'eau.

Remplaçons dans l'équation précédente w et v_2 par leurs valeurs tirées des équations (109) et (110), il viendra

$$(114) \qquad G = \alpha\varphi \frac{F p_2}{RT_2} \sqrt{2g \frac{kc}{A} T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}.$$

Il faudrait mettre pour T_2 dans cette formule sa valeur tirée de l'équation (113).

Le produit $\alpha\varphi$ est appelé ordinairement *le coefficient d'écoulement.*

Les résistances ne modifient pas la température que possède le gaz hors de l'orifice, quand il est rentré au repos; cette température est finalement la même que la température initiale, et on a, à cette époque, pour le volume spécifique,

$$v'_2 = \frac{RT_1}{p_2},$$

et pour le volume V_2 de la quantité de gaz qui s'écoule dans une seconde, volume mesuré sous la pression extérieure,

$$V_2 = G v'_2.$$

Les meilleures valeurs à adopter pour les coefficients φ et $\alpha\varphi = \mu$, quand il s'agit des gaz, sont les résultats fournis par les expériences de M. Weisbach (*). D'après les corrections introduites par M. Grashof (**), ces expériences ont fourni les résultats suivants.

En prenant un ajutage ayant la forme du jet contracté et 10 millimètres de largeur, on trouva pour un excès de pression $p_1 - p_2$ mesuré par une colonne mercurielle variant de 180 à 850 millimètres, la valeur moyenne

$$\varphi = \mu = 0{,}981$$

(car ici $\alpha = 1$, parce qu'il n'y a pas de contraction).

Avec des orifices circulaires en mince paroi de 10 à 24 millimètres de diamètre et avec une *charge* $p_1 - p_2$ de 50 à 850 millimètres, on a, en posant $\varphi = 0{,}98$,

$$\mu = 0{,}555 \text{ à } 0{,}795,$$

cette valeur augmentant avec la charge.

(*) WEISBACH, *Résultats d'expériences sur l'écoulement de l'air et de l'eau sous une forte pression : Civilingenieur*, t. V, p. 1; *Ingenieur-und Maschinenmechanik*, Brunswick, 1863, 4e édit., t. I, p. 911.

(**) GRASHOF, *Sur le mouvement permanent des gaz dans les conduites et dans les canaux (Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure)*, t. VII, p. 243 et 280.

Avec des ajutages cylindriques très-courts de 10 à 24 millimètres de diamètre, on a trouvé entre les mêmes limites de charge

$$\mu = \varphi = 0,737 \text{ à } 0,839.$$

Il est à remarquer que ces valeurs s'écartent peu de celles qu'on a trouvées pour l'écoulement de l'eau; ce fait est déjà connu d'ailleurs d'après les expériences plus anciennes de Koch, d'Aubuisson et Pequeur, et par les calculs de MM. Buff et Poncelet.

Exemple. — Admettons que de l'air atmosphérique contenu dans un réservoir s'écoule dans l'air libre par un ajutage convenable et sous une pression constante de $1\frac{1}{2}$ atmosphère; on a alors $p_1 = 1\frac{1}{2}$ atmosphère et $p_2 = 1$ atmosphère. La température t_1 de l'air dans le réservoir est 30 degrés; donc

$$T_1 = 273 + 30 = 303.$$

On a d'abord

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{0,41}{1,41}} = 0,88878.$$

L'équation (109) donne

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{kc}{A} T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] = 3394,1,$$

avec $A = \frac{1}{424}$ et $c = 0,16847$.

Comme $g = 9^m,81$, on a trouvé pour la vitesse théorique

$$w = 258^m,05,$$

d'où l'on déduit la vitesse effective, en faisant $\varphi = 0^m,981$,

$$w_e = \varphi w = 253^m,15,$$

et, par suite,

$$\frac{w_e^2}{2g} = 3266^m,4.$$

En substituant cette dernière valeur dans l'équation (113),

on a pour la température absolue de l'air dans l'orifice

$$T_2 = 270,57,$$

et en centigrades

$$t_2 = -2^\circ,43.$$

Si l'on faisait abstraction des résistances (c'est-à-dire pour $\varphi = 1$), on aurait $t_2 = -3^\circ,7$. Les résistances produisent ainsi une légère augmentation de température. Le poids de la quantité d'air qui passe à travers l'orifice dans une seconde s'obtient au moyen de l'équation (114), qui donne, à cause de $\alpha = 1$, $R = 29,272$ et $p_2 = 10334$,

$$G = 330^{\text{kil}},31\ F.$$

F étant exprimé en mètres carrés. (Si on fait abstraction des frottements, on trouve $G = 338,30\ F$.)

Après l'épanouissement hors de l'ajutage, l'air a repris la température initiale $t_1 = 30^\circ$; le volume des G kilogrammes d'air mesuré sous la pression extérieure est

$$V_2 = G v'_2 = \frac{GRT_1}{p_2} = 283^{\text{mc}},49\ F.$$

Ce volume mesuré sous la pression intérieure serait

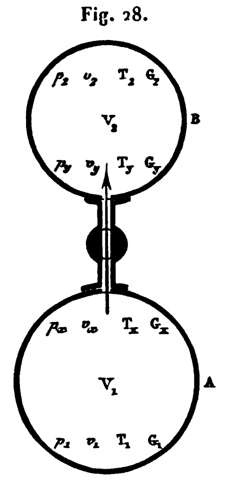
$$V_1 = \frac{p_2}{p_1} V_2 = 188^{\text{mc}},99.$$

Malgré l'importance que présentent dans la pratique les recherches sur l'écoulement et le mouvement des gaz, nous croyons devoir nous borner à ces détails et renvoyer le lecteur aux excellents Mémoires de M. Grashof, cités plus haut, dans lesquels le mouvement des gaz dans les conduites a été traité complétement, conformément aux principes de la théorie mécanique de la chaleur.

IX. — *Écoulement d'un gaz d'un réservoir dans un autre, lorsque les volumes de ces réservoirs sont invariables* (*).

Soient deux réservoirs A et B (*fig.* 28) réunis au moyen

Fig. 28.



d'un tuyau à robinet, et remplis d'un même gaz; dans le premier dont le volume est V_1, il y a avant l'écoulement G_1 kilogrammes d'air à la pression p_1 ayant un volume spécifique v_1 et une température T_1; le second, de volume V_2, contient au commencement G_2 kilogrammes du même gaz, dont la tension, le volume spécifique et la température sont p_2, v_2 et T_2, et de plus on suppose $p_2 < p_1$.

L'orifice d'écoulement dont la section est F doit rester ouvert jusqu'à ce qu'un poids G de gaz ait passé de A en B, et il faut déterminer à ce moment l'état du gaz dans les deux réservoirs.

Le poids du gaz qui reste à cet instant dans le premier ré-

(*) Ce problème a été résolu pour la première fois par M. Bauschinger, dans un Mémoire intitulé : *Théorie de l'écoulement des gaz parfaits*, et publié dans le *Journal de Mathématique et de Physique* de M. Schlœmilch, t. VIII, p. 81.

servoir est $G_1 - G$; la tension, le volume spécifique et la température ont évidemment changé, et nous désignerons leurs valeurs actuelles par p_x, v_x et T_x. Il y a au même instant dans l'autre réservoir un poids de gaz $G_2 + G$: soient p_y, v_y et T_y la tension, le volume spécifique et la température qui lui correspondent.

Supposons que la quantité G soit donnée et que les deux réservoirs soient imperméables à la chaleur, le problème consiste à déterminer les six inconnues p_x, v_x, T_x et p_y, v_y, T_y.

D'après les lois de Mariotte et Gay-Lussac, on a

$$p_x v_x = RT_x \quad \text{et} \quad p_y v_y = RT_y,$$

on n'a donc plus que quatre équations à trouver entre quatre des inconnues, par exemple, entre p_x, p_y, T_x et T_y.

Imaginons que l'on ferme le robinet au moment où le réservoir A a perdu le poids G de gaz et que les quatre quantités ci-dessus se rapportent à l'instant où l'équilibre est rétabli dans les deux réservoirs. Quand certaines conditions sont remplies, il n'est même pas nécessaire de fermer le robinet; en effet, pendant l'écoulement la veine gazeuse prend de part et d'autre de l'orifice des formes semblables à des entonnoirs dont les petites ouvertures se trouvent à l'orifice. En admettant que les capacités des réservoirs soient suffisamment grandes, on peut négliger le poids de la quantité de gaz qui se meut dans les espaces occupés par les entonnoirs par rapport au poids du gaz compris dans les réservoirs. On peut alors supposer que l'équilibre existe dans les deux vases même pendant l'écoulement, et les valeurs p_x et p_y donnent la loi des variations de la tension, et T_x et T_y celle des variations de la température pendant le passage du gaz.

Étudions d'abord les changements survenus dans le réservoir A. Au moment où le poids G est sorti, le poids $G_1 - G$ de gaz resté occupe le volume V_1; avant l'écoulement, ces $G_1 - G$ kilogrammes occupaient le volume

$$(G_1 - G)v_1 = G_1 v_1 - G v_1 = V_1 - G v_1,$$

puisqu'on a $V_1 = G_1 v_1$.

On peut donc dire que pendant l'écoulement le poids $G_1 - G$ s'est dilaté en passant du volume $V_1 - Gv_1$ au volume V_1 et de la pression p_1 à la pression p_x et, comme cette dilatation s'effectue sans perte ni gain de chaleur, on a, d'après la loi de Poisson [équation (76)],

$$\frac{p_x}{p_1} = \left(\frac{V_1 - Gv_1}{V_1}\right)^k.$$

Remplaçons V_1 par sa valeur $G_1 v_1$, on a

$$(115) \qquad p_x = p_1 \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^k.$$

La température absolue T_x est d'après l'équation (78)

$$\frac{T_x}{T_1} = \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

En substituant la valeur de $\frac{p_x}{p_1}$ tirée de l'équation (115), on a

$$(116) \qquad T_x = T_1 \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{k-1}.$$

Le volume spécifique v_x se détermine à l'aide de la formule

$$p_x v_x = RT_x,$$

qui donne, quand on remplace p_x et T_x par leurs valeurs,

$$v_x = \frac{RG_1 T_1}{p_1(G_1 - G)} = \frac{G_1 v_1}{G_1 - G},$$

résultat qu'on aurait pu d'ailleurs écrire immédiatement.

L'état du gaz dans le réservoir A, au moment où G kilogrammes en sont sortis, est donc entièrement déterminé.

Le travail que le gaz a effectué dans ce réservoir pendant la sortie des G kilogrammes se trouve de la manière suivante.

Posons $G_1 - G = G_x$; le volume et la tension de ce poids sont respectivement $G_x v_x$ et p_x; dans l'instant qui suit, le volume spécifique v_x change de dv_x et le volume entier $G_x v_x$

change de $G_x\,dv_x$; la différentielle du travail est par conséquent

$$dL_1 = G_x\,p_x\,dv_x.$$

Mais on a

$$v_x = \frac{G_1 v_1}{G_x},$$

par conséquent

$$dv_x = -\frac{G_1\,v_1\,dG_x}{G_x^2}.$$

Or, l'équation (115) devient ici

$$p_x = p_1\left(\frac{G_x}{G_1}\right)^k.$$

En substituant les valeurs de dv_x et de p_x dans la valeur de dL_1 et en réduisant, on a

$$(117') \qquad dL_1 = -\frac{p_1\,v_1}{G_1^{k-1}}\,G_x^{k-1}\,dG_x.$$

Intégrons cette équation et remarquons qu'au commencement de l'écoulement $G_x = G_1$ et qu'à la fin la valeur de G_x peut se remplacer par $G_1 - G$; on a alors

$$(117) \qquad L_1 = G_1\frac{p_1\,v_1}{k}\left[1 - \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^k\right],$$

ou bien, si on suppose que p_x soit déjà déterminé par l'équation (115),

$$(118) \qquad L_1 = G_1\frac{v_1(p_1 - p_x)}{k}.$$

Cette expression de L est excessivement simple (*voyez* le problème I de la page 147), mais elle se distingue essentiellement de celle qu'on a obtenue plus haut [équation (80)], dans le cas où un gaz se détend en produisant du travail sans addition ni soustraction de chaleur. Cette différence provient de ce que dans ce cas le poids de gaz qui produisait du travail restait constant, tandis qu'ici le poids de gaz contenu dans le réservoir A se réduit à $G_1 - G$ à cause de la sortie du poids G.

Examinons l'état du gaz dans le réservoir B. Nous avons trouvé plus haut [équation (69)], pour l'accroissement du tra-

vail intérieur de l'unité de poids du gaz qui correspond à l'accroissement de température dt,

$$dU = \frac{c}{A}\,dt.$$

Mettons dT à la place de dt et intégrons, nous aurons pour le travail intérieur total à la température absolue T

$$U = C + \frac{c}{A}T,$$

relation dans laquelle la constante C représente le travail intérieur du gaz à la température du zéro absolu. Appliquons ici cette formule; au commencement de l'écoulement, le travail intérieur des G_1 kilogrammes de gaz dans le réservoir A est

$$G_1\left(C + \frac{c}{A}T_1\right),$$

et celui des G_2 kilogrammes de gaz dans le réservoir B est

$$G_2\left(C + \frac{c}{A}T_2\right).$$

Le travail intérieur total contenu dans les deux quantités de gaz est par suite

$$U = C(G_1 + G_2) + \frac{c}{A}(G_1T_1 + G_2T_2).$$

Mais on peut trouver une autre expression pour U. Lorsque G kilogrammes de gaz sont écoulés, il y a dans le premier réservoir $G_1 - G = G_x$ kilogrammes à la température T_x, et dans le second $G_2 + G = G_y$ kilogrammes à la température T_y; le travail intérieur du poids G_x a pour valeur

$$G_x\left(C + \frac{c}{A}T_x\right),$$

et celui de G_y est

$$G_y\left(C + \frac{c}{A}T_y\right).$$

Le travail intérieur total de ces deux quantités de gaz est

par suite

$$U = C(G_x + G_y) + \frac{c}{A}(G_x T_x + G_y T_y);$$

cette valeur de U est égale à celle que nous avions précédemment, puisqu'il n'y a aucun travail extérieur effectué, aucune quantité de chaleur perdue ni gagnée dans l'ensemble des deux réservoirs. En égalant ces deux valeurs de U et en remarquant que le poids total du gaz n'a pas changé, c'est-à-dire que $G_1 + G_2 = G_x + G_y$, on trouve

$$G_1 T_1 + G_2 T_2 = G_x T_x + G_y T_y.$$

On a d'ailleurs

$$RT = pv,$$

d'où l'on tire

$$G_1 v_1 p_1 + G_2 v_2 p_2 = G_x v_x p_x + G_y v_y p_y.$$

Mais d'après les notations adoptées, on a aussi

$$V_1 = G_1 v_1 = G_x v_x,$$
$$V_2 = G_2 v_2 = G_y v_y,$$

et, par suite,

$$G_1 v_1 p_1 + G_2 v_2 p_2 = G_1 v_1 p_1 \frac{p_x}{p_1} + G_2 v_2 p_2 \frac{p_y}{p_2},$$

et si l'on introduit de nouveau la température

$$\frac{p_y}{p_2} = 1 + \frac{G_1 T_1}{G_2 T_2}\left(1 - \frac{p_x}{p_1}\right).$$

Dans cette dernière équation, on peut remplacer p_x par sa valeur tirée de l'équation (115), et on a pour la tension p_y du gaz dans le réservoir B

$$(119) \qquad p_y = p_2 \left\{ 1 + \frac{G_1 T_1}{G_2 T_2}\left[1 - \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^k\right]\right\}.$$

La température T_y dans l'ajutage se détermine de la manière suivante.

D'après les lois de Mariotte et Gay-Lussac, on a

$$p_y v_y = RT_y.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par

$$G_y = G_2 + G,$$

et tenons compte de la relation

$$G_y v_y = G_2 v_2 = V_2.$$

nous aurons

$$T_y = \frac{G_2 v_2 p_y}{R(G_2 + G)}.$$

Remplaçons encore R par sa valeur tirée de l'équation $p_2 v_2 = RT_2$, nous trouverons alors

$$T_y = \frac{G_2 T_2}{G_2 + G} \frac{p_y}{p_2}.$$

Mais la tension p_y est déjà déterminée par l'équation (119), nous substituerons sa valeur dans la formule précédente, et nous aurons finalement

$$(120) \qquad T_y = \frac{G_2 T_2}{G_2 + G} + \frac{G_1 T_1}{G_2 + G}\left[1 - \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^k\right].$$

C'est d'après cette formule qu'on calculera directement T_y quand on donne le poids G de gaz qui a passé de l'un des réservoirs dans l'autre.

Il faut déterminer maintenant le travail total que le gaz absorbe dans le réservoir B, puisqu'il y a compression. Au moment où G kilogrammes de gaz sont arrivés, il y a G_x kilogrammes dans le réservoir A et G_y dans l'autre. Dans l'instant qui suit, le travail dL_1 dans le premier réservoir est déterminé par l'équation (117'); ce travail est absorbé en premier lieu par le gaz du réservoir B; mais en même temps la quantité de gaz dG s'y précipite, et passe en produisant du travail de la tension p_x à la tension p_y. Ce changement de pression correspond d'après l'équation (80) à un travail exprimé par

$$\frac{c}{A} T_x dG\left[1 - \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right].$$

Remplaçons T_x par sa valeur donnée par l'équation (78) qui

devient ici

$$\frac{T_x}{T_1}=\left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

nous aurons alors

$$\frac{c}{A}T_1\,dG\left[\left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}-\left(\frac{p_y}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right].$$

On déduit de là pour le travail total L_2, absorbé dans le réservoir depuis le commencement de l'écoulement,

(121) $$L_2=L_1+\frac{cT_1}{A}\int\left[\left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}-\left(\frac{p_y}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]dG,$$

formule dans laquelle L_1 est déterminé d'après une des équations (117) et (118).

On aurait à remplacer maintenant sous le signe $\int$ les quantités p_x et p_y par leurs valeurs données par les équations (115) et (119), et à effectuer ensuite l'intégration entre les limites o et G. En faisant ce calcul on trouve une série : il vaut donc mieux conserver la formule (121) et en faire l'intégration à part dans chaque cas particulier. Il reste à chercher quel est l'état du gaz dans l'un et dans l'autre réservoir *à la fin de l'écoulement.* L'écoulement cesse évidemment aussitôt que $p_x=p_y$; admettons qu'à ce moment la quantité de gaz écoulé soit G_0, on a, d'après les équations (115) et (119),

$$p_1\left(1-\frac{G_0}{G_1}\right)^k=p_2\left\{1+\frac{G_1T_1}{G_2T_2}\left[1-\left(1-\frac{G_0}{G_1}\right)^k\right]\right\}.$$

Cette équation détermine la quantité G_0; mais on a, comme on sait,

$$\frac{G_1T_1}{G_2T_2}=\frac{G_1v_1p_1}{G_2v_2p_2}=\frac{V_1p_1}{V_2p_2}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, et la résolvant par rapport à G_0, on trouve

(122) $$G_0=G_1\left[1-\left(\frac{V_1p_1+V_2p_2}{(V_1+V_2)p_1}\right)^{\frac{1}{k}}\right].$$

Pour connaître l'état final du gaz dans les deux réservoirs, il suffira de mettre cette valeur de G_0 à la place de G dans les formules écrites plus haut.

Remarquons que la vitesse d'écoulement w est variable, et qu'elle diminue d'après une loi bien déterminée que l'on trouve aisément. La formule (109) appliquée au moment où G kilogrammes de gaz se sont écoulés, donne

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{hc}{A} T_x \left[1 - \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right],$$

ou, en remplaçant T_x par sa valeur en fonction de p_x, tirée de l'équation (78),

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{hc}{A} T_1 \left[\left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} - \left(\frac{p_y}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

En substituant dans cette équation les valeurs de p_x et p_y, tirées des équations (115) et (119), on obtient une formule qui détermine la vitesse w correspondant à chaque valeur de G ; cette formule générale est

$$(123)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{w^2}{2g} = \frac{hcT_1}{A} \Bigg(&\left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{k-1} \\ &- \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \left\{ 1 + \frac{G_1 T_1}{G_2 T_2} \left[1 - \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{k} \right] \right\}^{\frac{k-1}{k}} \Bigg). \end{aligned} \right.$$

A la fin de l'écoulement on a évidemment $w = 0$.

Ces équations ont été établies pour la première fois par M. Bauschinger, bien qu'en partie sous une autre forme et par une autre méthode. Elles fournissent la solution d'un grand nombre de problèmes très-intéressants, dont nous allons examiner les deux plus importants.

Problème I. — *On a, dans un réservoir, dont le volume est* V_1, G_1 *kilogrammes d'air comprimé à la pression* p_1 *et à la température* T_1 ; *on laisse sortir de la chaudière* G *kilogrammes par un orifice, et on le ferme. Quel est l'état de l'air à l'intérieur*

du réservoir au moment de la fermeture pendant l'écoulement; il n'y a ni introduction, ni soustraction de chaleur.

p_2 représente ici la pression extérieure, la pression atmosphérique; en admettant qu'au commencement la température de l'air du réservoir soit égale à la température de l'air extérieur, on a $T_1 = T_2$. Le poids G_2 de l'air qui reçoit le jet gazeux est infiniment grand : c'est celui de l'atmosphère.

En faisant $G_2 = \infty$ et $T_2 = T_1$ dans les équations (115), (116), (119) et (120), on trouve les formules

$$(124)\quad \begin{cases} (\alpha) & p_x = p_1\left(1 - \dfrac{G}{G_1}\right)^k, \\ (\beta) & T_x = T_1\left(1 - \dfrac{G}{G_1}\right)^{k-1}, \\ & p_y = p_2, \\ & T_y = T_2 = T_1. \end{cases}$$

Les deux dernières formules sont évidentes; la pression et la température de l'air extérieur ne changent pas.

Admettons que V_1 égale 1 mètre cube, que la pression de l'air intérieur soit égale à 5 atmosphères, et sa température $t_1 = 30°$, par suite, $T_1 = 303°$; on a, pour le poids G_1 de cette quantité d'air,

$$G_1 = \frac{V_1}{v_1} = \frac{V_1 p_1}{RT_1} = 5^{\text{kil}},8256,$$

car $p_1 = 5 \times 10334$, et $R = 29,274$.

Si l'on fait sortir la moitié de l'air du réservoir, on a

$$G = \frac{1}{2} G_1;$$

et, d'après l'équation (124 α), il vient

$$\frac{p_x}{p_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1,410} = 0,3763.$$

La pression p_x mesurée en atmosphères qui a lieu au moment de la fermeture de l'orifice est donc

$$1^{\text{at}},881.$$

L'équation (124β) donne

$$\frac{T_x}{T_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0,410} = 0,7526,$$

d'où l'on déduit la valeur de $T_x = 228,04$; ou, en centigrades, $t_x = -44°,96$.

Lorsqu'on suppose l'orifice très-grand, l'air extérieur ne peut pas fournir de la chaleur à l'air intérieur à cause de l'extrême rapidité de l'écoulement; un manomètre mis en communication avec le réservoir fera connaître les pressions p_1 et p_x.

Quand on observe de cette manière la valeur de p_x, on peut déterminer inversement, d'après l'équation (124α), le poids d'air G qui s'est écoulé, et, par suite, la quantité d'air $G_1 - G$ qui est restée dans le réservoir.

L'exemple précédent montre qu'il y a un refroidissement considérable de l'air intérieur; la température T_x, au moment de la fermeture, ne peut être observée directement, mais on peut la déduire des indications du manomètre.

Mettons la valeur $p_x = 1^{at},881$ dans l'équation (118), et faisons $G_1 v_1 = 1$, d'après notre hypothèse; on trouve alors, pour le travail effectué dans le réservoir pendant l'écoulement,

$$L_1 = G_1 v_1 \frac{(p_1 - p_x)}{k} = \frac{(5 - 1,881)\,10334}{1,41} = 22859^{kgm}.$$

Le travail opéré dans l'atmosphère se détermine au moyen de l'équation (121), dans laquelle on remplace p_y par p_2 et p_x par sa valeur donnée par l'équation (124α); il vient alors

$$L_2 = L_1 + \frac{cT_1}{A}\int\left[\left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{k-1} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] dG.$$

Remplaçons encore L_1 par sa valeur tirée de l'équation (117), et effectuons l'intégration indiquée entre les limites o et G; nous trouverons, après avoir réduit,

$$L_2 = \frac{G_1 v_1 p_1}{k-1}\left[1 - \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{k} - \frac{G}{G_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right].$$

En mettant dans cette formule les nombres de notre exemple, on a, pour $\frac{G}{G_1} = \frac{1}{2}$,

$$L_2 = 39139^{\text{kmg}}.$$

L'équation (122) donne pour $V_2 = \infty$ le poids d'air G_0 qui a passé par l'orifice à la fin de l'écoulement. Ce poids est

$$G_0 = G_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}} \right],$$

et on a dans le cas actuel

$$G_0 = 0,68065 . G_1 = 3^{\text{kil}},9652.$$

Faisons encore dans les formules précédentes

$$\frac{G}{G_1} = \frac{G_0}{G_1} = 0,68065,$$

alors, *à la fin de l'écoulement*, la pression p_x est d'*une atmosphère* et la température t_x est de $-83^\circ,25$; on a, pour le travail total de l'air du réservoir, $L = 29136$ kilogrammètres, et pour le travail absorbé par l'air extérieur

$$L_2 = 47129^{\text{kgm}}.$$

Enfin faisons $G_2 = \infty$, dans l'équation (123), la vitesse d'écoulement w sera donnée par la formule

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{kcT_1}{A} \left[\left(1 - \frac{G}{G_1} \right)^{k-1} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

Pour chaque valeur de G on peut trouver w; en multipliant w par le coefficient de vitesse φ, on a, pour la vitesse effective à l'instant considéré, $w_e = \varphi w$; la température absolue T'_y pour le même moment dans le plan de l'orifice se déduira, d'après l'équation (113), de la formule

$$T_x - T'_y = \frac{A}{kc} \frac{w_e^2}{2g}.$$

Le cas particulier que nous venons de traiter nous conduit à faire encore une autre étude.

Supposons toujours le réservoir rempli d'air à la pression p_1 et à la température T_1, et muni d'un orifice aussi grand que possible; si on ouvre cet orifice et si on le referme *rapidement*, une partie de l'air s'échappera dans l'atmosphère où la température est également T_1. Au moment de la fermeture, la pression p_x et la température T_x, dans l'intérieur du réservoir, sont déterminées par les équations précédentes. Lorsqu'on a adapté un manomètre au réservoir, on peut lire facilement sur son échelle les pressions p_1 et p_x. La température de l'air baisse considérablement pendant la détente; si on observe le manomètre après la fermeture, on s'aperçoit que la pression ne conserve pas la valeur p_x, mais qu'elle s'accroît d'abord très-rapidement, puis de plus en plus lentement jusqu'à ce qu'elle atteigne une pression limite p_3. Ce phénomène vient de ce que la température de l'air resté dans le réservoir *augmente* peu à peu par l'effet des parois jusqu'à ce qu'elle soit redevenue égale à la température de l'atmosphère.

L'élévation de la température des $G_1 - G$ kilogrammes d'air qui restent dans le réservoir se fait sous un volume constant; le volume spécifique v_x de l'air, au moment de la fermeture, et le volume spécifique v quelque temps après, sont donc égaux, et on a, en appelant p et T la pression et la température qui correspondent au volume v, d'après les lois de Mariotte et de Gay-Lussac,

$$T = T_x \frac{p}{p_x}.$$

Mais, d'après ce qui précède, on a

$$\frac{T_x}{T_1} = \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

et, par suite,

$$T = \frac{p}{p_x}\left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} T_1.$$

Quand on connaît la température initiale T_1 et quand on a

observé la pression initiale p_1, ainsi que la pression p_x, on n'a plus qu'à lire sur le manomètre la pression p à des intervalles de temps égaux pour pouvoir calculer, au moyen de la dernière équation, les températures T de l'air du réservoir qui correspondent aux mêmes intervalles; d'après cela, on pourrait déterminer la loi de l'introduction de la chaleur par les parois.

Après un certain temps, lorsque la température T est devenue égale à la température extérieure T_1, le manomètre reste stationnaire; la pression relative à ce moment ayant été désignée par p_3, on a, en vertu de la dernière équation,

$$\frac{p_x}{p_3} = \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Les trois pressions p, p_x et p_3 s'observent facilement au manomètre, et l'équation précédente fournit par suite un moyen de déterminer la constante k. On a, en effet,

$$\frac{k-1}{k} = \frac{\log p_x - \log p_3}{\log p_x - \log p_1},$$

d'où

(125) $$k = \frac{\log p_1 - \log p_x}{\log p_1 - \log p_3}.$$

C'est de cette manière que MM. Hirn et Weisbach ont obtenu la valeur k (*voyez* p. 110).

M. Weisbach (*) a trouvé, dans une première expérience, en millimètres de mercure,

$$p_1 = 1452,2, \quad p_x = 1323,2 \quad \text{et} \quad p_3 = 1359,2;$$

avec ces valeurs, l'équation (125) donne

$$k = 1,405.$$

Dans une deuxième expérience, il obtint

$$p_1 = 1332,8, \quad p_x = 892,7 \quad \text{et} \quad p_3 = 1018,2,$$

(*) *Civilingenieur*, t. V, p. 45.

ce qui donna

$$k = 1{,}400.$$

Dans ces expériences, il est très-important d'avoir un grand orifice, et de ne l'ouvrir que pendant un instant. A cause du grand abaissement de la température de l'air, les parois de la chaudière, qui sont relativement beaucoup plus chaudes, cèdent rapidement de la chaleur à l'air; voilà pourquoi on obtient pour p_x un nombre un peu trop fort, et la valeur de k devient, par suite, trop petite si la durée de l'ouverture n'est pas excessivement petite.

Ceci résulte très-clairement des deux expériences de M. Weisbach; d'après les pressions observées, on voit qu'il a dû tenir l'orifice plus longtemps ouvert dans la deuxième expérience que dans la première, et cette différence se retrouve sur les valeurs de k. Les deux valeurs de k sont d'ailleurs un peu trop petites : cela provient probablement de ce que l'orifice de la chaudière, dont la capacité était de $4\frac{2}{3}$ mètres cubes, n'ayant qu'un diamètre de 4 centimètres, la durée de l'écoulement était relativement trop grande. L'erreur due à ce que l'écoulement dure trop longtemps se trouve, il est vrai, diminuée par une autre circonstance lorsqu'on se sert d'un manomètre à mercure : à cause de l'inertie du mercure et de la rapidité de la chute de pression, le niveau du mercure descend un peu plus bas que cela ne devrait être, pour qu'il correspondît exactement à la pression de l'air, et on lit par suite, pour p_x, une valeur trop faible. Ces deux erreurs se compensent donc en partie.

Gay-Lussac et Welter (*) ont déjà employé cette méthode pour déterminer k; seulement ils laissèrent continuer l'écoulement jusqu'au moment où la pression intérieure p_x était devenue égale à la pression de l'atmosphère.

D'après les raisons indiquées ce procédé devait donner pour k des valeurs notablement trop petites. Laplace trouva à l'aide de ces expériences, $k = 1{,}372$; il est vrai que la for-

---

(*) LAPLACE, *Mécanique céleste*, t. V.

mule qu'il employa n'était qu'approchée, et devait également contribuer à diminuer k.

La formule de Laplace est

$$k = \frac{p_1 - p_x}{p_1 - p_3},$$

et elle se déduit de l'équation (125) quand on y substitue, pour

$$\log \text{nép} \frac{p_x}{p_1} \quad \text{et} \quad \log \text{nép} \frac{p_3}{p_1},$$

les valeurs approchées suivantes :

$$\log \text{nép} \frac{p_x}{p_1} = \log \text{nép} \left(1 + \frac{p_x - p_1}{p_1}\right) = \frac{p_x - p_1}{p_1},$$

$$\log \text{nép} \frac{p_3}{p_1} = \log \text{nép} \left(1 + \frac{p_3 - p_1}{p_1}\right) = \frac{p_3 - p_1}{p_1} \text{ (*)}.$$

Problème II. — *On a dans un réversoir, dont le volume est* V_2, G_2 *kilogrammes d'air raréfié sous la pression* p_2 *et à la température* T_2; *le réservoir est muni d'un orifice qui le fait communiquer avec l'atmosphère, dont la pression est* p_1 *et la température* T_1. *On ouvre l'orifice pendant un temps très-court,* G *kilogrammes d'air se précipitent alors dans le réservoir. Il s'agit de déterminer l'état de l'air intérieur au moment de la fermeture de l'orifice, en supposant qu'il n'y ait eu ni introduction ni soustraction de chaleur.*

Les formules générales données plus haut résolvent cette question quand on y fait $V_1 = \infty$ et $G_1 = \infty$.

(*) M. Cazin a donné une méthode qui permet de reconnaître si la fermeture de l'orifice s'effectue au moment précis où la pression intérieure commence à égaler celle de l'atmosphère. Il a aussi reconnu une difficulté d'un autre genre. Lorsque l'excès de pression initiale est peu considérable, le gaz oscille de part et d'autre de l'orifice, et si l'on ferme pendant la période d'oscillation, on a des valeurs de p_2 tantôt beaucoup trop petites, tantôt beaucoup trop grandes. L'emploi de sa méthode met à l'abri de ces causes d'erreur; il a trouvé pour l'air : $k = 1,41$. (*Essai sur la détente et la compression des gaz* : *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LXVI.)

Les équations (115) et (116) donnent alors

$$p_x = p_1 \quad \text{et} \quad T_x = T_1;$$

d'où nous concluons que la pression et la température de l'atmosphère ne changent pas dans cette opération, résultat qui devait être prévu.

Les autres formules qui donnent la pression p_y, la température T_y et le travail effectué, subissent des changements d'une autre nature.

Les équations (117), (119) et (120) contiennent la quantité

$$G_1 T_1 \left[1 - \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^k\right],$$

qui prend la valeur indéterminée $0 \times \infty$ quand on y fait $G_1 = \infty$; mais la vraie valeur de cette expression se trouve aisément si, avant de faire $G_1 = \infty$, on développe en série le facteur

$$\left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^k$$

par la formule de Newton; on a

$$\begin{aligned} G_1 T_1 \left[1 - \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^k\right] &= G_1 T_1 \left\{1 - \left[1 - k\frac{G}{G_1} + \frac{k(k-1)}{1.2}\left(\frac{G}{G_1}\right)^2 + \ldots\right]\right\} \\ &= kGT_1 - \frac{k(k-1)}{1.2}\frac{G^2}{G_1}T_1 + \ldots. \end{aligned}$$

Faisons maintenant $G_1 = \infty$, nous trouvons simplement

$$G_1 T_1 \left[1 - \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^k\right] = kGT_1;$$

par suite, les équations (119) et (120) deviennent

$$(126) \qquad \left\{ \begin{aligned} p_y &= p_2\left(1 + \frac{kGT_1}{G_2 T_2}\right), \\ T_y &= \frac{G_2 T_2 + kGT_1}{G_2 + G}. \end{aligned} \right.$$

La première de ces équations donne la pression, la seconde la température du réservoir au moment de la fermeture de l'orifice. Le travail de l'*air extérieur* se trouve facilement à l'aide de l'équation (117); on a

$$L_1 = Gp_1 v_1 = RGT_1. \tag{127}$$

Le travail absorbé par l'air intérieur est donné par l'équation (121), dans laquelle on remplace p_x par p_1, p_y et L_1 par leurs valeurs tirées des équations (126) et (127); mais il vaut mieux transformer d'abord l'équation (126). Divisons membre à membre les équations $p_1 v_1 = RT_1$ et $p_2 v_2 = RT_2$, nous aurons

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1 v_1}{p_2 v_2}.$$

Mais on a aussi $G_2 v_2 = V_2$. La substitution de ces valeurs dans l'équation (126) donne

$$p_y = p_2 + \frac{kGp_1 v_1}{V_2}. \tag{126'}$$

En portant cette dernière valeur dans l'équation (121), on trouve pour le travail cherché

$$L_2 = RGT_1 + \frac{cT_1}{A}\int\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} + \frac{kGv_1}{V_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]dG.$$

Intégrons entre les limites o et G et réduisons, il viendra

$$(128)\quad \left\{ L_2 = \frac{V_2 p_1}{k-1}\left\{\frac{kGv_1}{V_2} - \frac{1}{2k-1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1} + \frac{kGv_1}{V_2}\right)^{\frac{2k-1}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2k-1}{k}}\right]\right\}.\right.$$

La vitesse théorique de l'air qui entre se déduit de l'équation (123), dans laquelle on fait $G_1 = \infty$; on trouve, de cette manière,

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{kcT_1}{A}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} + \frac{kGv_1}{V_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]. \tag{129}$$

L'air cesse d'entrer dès que $p_y = p_x = p_1$; en désignant par G_0 le poids de la quantité d'air entrée à ce moment, on a, d'après la première des équations (126'),

$$p_1 = p_2 + \frac{k G_0 p_1 v_1}{V_2};$$

d'où l'on tire

$$(130) \qquad G_0 = \frac{V_2 (p_1 - p_2)}{k RT_1}.$$

En mettant cette valeur de G_0 à la place de G, successivement dans les équations (126), (127) et (128), on obtient la température dans le réservoir, le travail de l'air extérieur, et le travail absorbé par l'air intérieur au moment où l'air cesse d'entrer.

Exemple numérique. — Le volume V_2 de la chaudière est de 1 mètre cube, la pression p_2 de l'air dans ce vase est de $\frac{1}{2}$ atmosphère, et la température est égale à 20 degrés, c'est-à-dire $T_2 = 293°$; supposons la température de l'air extérieur également de 20 degrés, et, par conséquent, $T_1 = T_2$, sa pression évaluée en atmosphères étant égale à 1.

Pour le poids G_2 de l'air contenu dans le réservoir, on a

$$G_2 = \frac{V_2}{v_2} = \frac{V_2 p_2}{RT_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10334}{29,272 \times 293} = 0^{kg},6024.$$

Le volume spécifique de l'air extérieur est

$$v_1 = \frac{RT_1}{p_1} = 0^{mc},830.$$

Ouvrons l'orifice pendant le temps nécessaire pour que la pression intérieure atteigne la pression extérieure; la quantité d'air entrée se calculera d'après l'équation (130). Il vient alors

$$G_0 = \frac{10334\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{1,41 \times 29,272 \times 293} = 0^{kg},4272.$$

L'équation (126) donne, pour le même moment, la tempéra

ture de l'air intérieur

$$T_y = 353{,}06, \quad \text{qui vaut} \quad +80{,}06 \text{ degrés centigrades},$$

tandis que la température initiale était de 20 degrés.

Si l'on *n'avait pas* fermé l'orifice, il y aurait eu, à partir du moment où les pressions étaient égales, un refroidissement de l'air intérieur par les parois de la chaudière, par suite une diminution de pression, et, à cause de cela, il serait entré dans le réservoir une certaine quantité d'air.

Le travail extérieur L_1 effectué jusqu'au moment de la fermeture est, d'après l'équation (127),

$$L_1 = 3664^{\text{kgm}};$$

et, pour le travail que l'air intérieur a absorbé, l'équation (128) donne

$$L_2 = 4414^{\text{kgm}}.$$

En portant successivement dans les formules précédentes un certain nombre de valeurs différentes de G, toutes comprises entre o et G_0, on pourrait représenter facilement la loi des accroissements de la pression p_y et de la température T_y dans le réservoir.

Admettons encore qu'après l'entrée de G kilogrammes d'air on ait fermé l'orifice, et qu'ensuite on ait attendu que la température de l'air intérieur fût redescendue à sa valeur initiale, par suite du refroidissement opéré par les parois; alors la pression de l'air intérieur sera descendue de p_y à p_4, et, comme l'abaissement de la température de T_y à T_1 s'est effectué sous un volume constant, on a, d'après les lois de Mariotte et de Gay-Lussac,

$$\frac{p_y}{p_4} = \frac{T_y}{T_1}.$$

Mais on trouve d'un autre côté, en faisant $T_1 = T_2$ dans les deux équations (126) et en éliminant G entre elles,

$$\frac{T_y}{T_1} = \frac{kp_y}{kp_2 + p_y - p_2};$$

égalons ces deux valeurs de $\frac{T_y}{T_1}$, il vient

$$k = \frac{p_y - p_2}{p_1 - p_2}.$$

On conclut de là qu'on peut déterminer la quantité k de la manière suivante. Raréfions l'air d'un ballon jusqu'à ce que sa pression soit devenue p_2, et attendons que la température de cet air ait atteint celle de l'air atmosphérique. Ouvrons un orifice pour laisser pénétrer dans le ballon une certaine quantité d'air extérieur, et observons au manomètre la pression p_y de l'air intérieur au moment de la fermeture du ballon; puis, attendons encore que la température soit redevenue celle de l'air extérieur, ce que l'on reconnaît au manomètre, qui reste stationnaire à la pression p_1. C'est de cette manière que Clément et Désormes ont déterminé pour la première fois la valeur de k; ils trouvèrent $p_y - p_2 = 13,81$ et $p_1 - p_2 = 10,199$ millimètres de mercure; ils en déduisirent $k = 1,354$, nombre trop petit, il est vrai. Cela vient sans doute de ce que l'orifice est resté trop longtemps ouvert dans cette expérience (ils laissaient entrer l'air jusqu'à ce que la pression fût égale à la pression atmosphérique), et de ce que déjà, pendant l'entrée de l'air, il y a eu un refroidissement, et, par suite, une diminution de la pression : la pression observée était par conséquent trop petite.

Lorsqu'on admet que le ballon dans lequel on fait entrer l'air extérieur est *vide d'air* au commencement de l'expérience, on arrive facilement à des résultats très-remarquables qui ont été signalés par M. Bauschinger. Il suffit de faire $p_2 = 0$ et $G_2 = 0$ dans les formules précédentes.

Alors les équations (126') et (126) donnent

$$(131) \qquad \begin{cases} p_y = \dfrac{kGp_1 v_1}{V_2}, \\ T_y = kT_1. \end{cases}$$

La dernière équation montre que la température de l'air entré dans le ballon acquiert subitement la valeur kT_1, *et rest*

constante tant que l'entrée de l'air se fait sans perte ni gain de chaleur.

Supposons, comme ci-dessus, que la température de l'air extérieur soit 20 degrés, et qu'alors $T_1 = 293°$; on aura

$$T_\gamma = 413{,}13,$$

c'est-à-dire que la température à l'intérieur du vase qui était d'abord vide d'air sera de 140,13 degrés centigrades, température qui ne change pas pendant que l'air continue à entrer.

Ouvrons l'orifice seulement pendant un instant, et observons les pressions p_γ et p_4 au moment de la fermeture; lorsque l'égalité de la température est rétablie, nous aurons

$$k = \frac{p_\gamma}{p_4}.$$

En faisant $p_2 = 0$, on trouvera également pour les équations (127) et (128) des formes plus simples.

X. — *Écoulement d'un gaz d'un réservoir dans un autre, lorsque les volumes des réservoirs changent tandis que la température reste constante.*

Le problème que nous venons de traiter est un cas particulier d'un problème plus général. Nous avons, en effet, supposé que les volumes des réservoirs restaient constants, et qu'il n'y avait ni introduction, ni soustraction de chaleur pendant l'écoulement du gaz d'un des réservoirs dans l'autre.

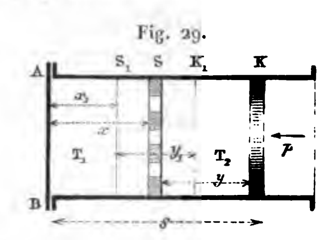
Le problème général serait celui-ci : Examiner les changements d'état du gaz dans chaque réservoir lorsque, pendant l'écoulement, les deux vases changent de volume d'après une loi donnée, et que, par suite, le gaz produit ou absorbe du travail extérieur, quand on introduit ou on soustrait de la chaleur au gaz, d'après une loi déterminée.

Lorsqu'on essaye de résoudre ce problème dans toute sa généralité, on arrive à des formules tellement compliquées, qu'on juge bientôt préférable de traiter les cas particuliers

que l'on peut rencontrer dans la pratique. Je traiterai ici u cas qui me paraît particulièrement important, parce qu fournit, comme on le verra dans la suite, une formule trè simple au moyen de laquelle on peut calculer le travail de nouvelle machine à air chaud du capitaine Ericsson.

Considérons un cylindre muni de deux pistons S et (*fig.* 29). Appelons *piston alimentaire* le premier S, celui q

Fig. 29.



est situé le plus près du fond AB du cylindre, et *piston m teur* le second K; les espaces limités par les pistons co tiennent de l'air. Supposons qu'à un moment donné il y a G_x kilogrammes dans l'espace compris entre le fond AB du c lindre et le piston S, et G_y kilogrammes entre les deux pistor Supposons encore que le piston S soit muni d'une série d'o vertures par lesquelles les deux espaces communiquent ent eux. Soient T la température absolue de l'air compris ent les deux pistons dont la distance est y, et T_1 celle de l'a compris entre le fond AB et le piston S; supposons $T_1 > T$ et appelons x la distance du piston S au fond AB du cylindr Comme les deux espaces communiquent entre eux, la for expansive p de l'air y sera la même, et l'équilibre sera mai tenu si on charge le piston K extérieurement avec une pre sion p par unité de surface. Fixons par la pensée le piston et supposons qu'il ne puisse pas être traversé par la chaleu il n'y aura pas d'écoulement de gaz d'un espace à l'autre cause de l'égalité de la pression, ou, au moins, on peut a mettre que l'échange se fasse d'une manière très-lente à t vers les ouvertures du piston S, attendu que l'air en rep conduit très-mal la chaleur.

Déplaçons le piston S d'une quantité infiniment petite (

gauche à droite) : une quantité d'air infiniment petite se rendra de l'espace moins chaud à l'espace plus chaud, où elle augmentera de température. La force expansive de l'air croîtra par suite, en premier lieu dans l'espace plus chaud, et en second lieu aussi dans l'espace moins chaud, à cause de la rentrée d'une partie de l'air qui s'en était échappé, et un nouvel équilibre s'établira. Mais, à cause de l'augmentation de pression dans les deux espaces, la distance du piston K au fond AB deviendra $S + dS$, et le travail effectué par le gaz pour vaincre la pression extérieure p sera

$$dL = Fp\,ds,$$

F étant la section du piston.

Si les températures T_1 et T_2 n'ont pas changé parce qu'on a fourni et soustrait des quantités convenables de chaleur, on peut déterminer l'augmentation $F\,ds$ du volume total, de la manière suivante.

Au moment où l'équilibre est rétabli, la quantité d'air G_x, qui se trouve entre le piston S et le fond AB du cylindre, se trouve augmentée de dG_x; et, comme cette dernière quantité a éprouvé une élévation de température, il y a eu une augmentation de volume $F\,ds = (v_x - v_y)\,dG_x$, en désignant par v_x et v_y les volumes spécifiques des quantités d'air G_x et G_y.

D'après l'équation

$$pv = RT,$$

on a ici

$$v_x = \frac{RT_1}{p} \quad \text{et} \quad v_y = \frac{RT_2}{p};$$

par suite,

$$F\,ds = \frac{R}{p}(T_1 - T_2)\,dG_x,$$

et l'expression du travail dL transmis au piston moteur K sera

$$dL = R(T_1 - T_2)\,dG_x.$$

Cette équation peut s'intégrer, puisque, d'après notre hypothèse, T_1 et T_2 sont constants; mais il vaut mieux, pour ce qui va suivre, transformer cette équation avant de l'intégrer.

Le poids de la quantité totale d'air renfermé dans les de espaces étant constant, on a la relation

$$G_x + G_y = \text{const.},$$

d'où, en différentiant,

$$dG_x = - dG_y;$$

et, comme on a d'après la figure

$$G_y v_y = F_y,$$

il vient

$$G_y = \frac{Fp_y}{RT_2}.$$

D'après cela, on a aussi

$$dG_x = - \frac{F}{RT_2} d(py).$$

En substituant cette valeur de dG_x dans l'expression de d on trouve

$$dL = - F\frac{T_1 - T_2}{T_2} d(py).$$

Admettons qu'à l'état initial la position du piston S soit que sa distance au fond du cylindre soit alors x_1, que la po tion correspondante du piston moteur soit K_1, et sa distan au piston alimentaire y_1, et qu'enfin p_1 désigne la pression i tiale. L'intégration de l'équation précédente donne alo lorsque l'on suppose que les pistons S et K se sont déplac respectivement des quantités $x - x_1$ et $y - y_1$, l'expressi du travail que le piston moteur fournit au dehors, à savoir :

$$(132) \qquad L = F\frac{T_1 - T_2}{T_2}(p_1 y_1 - py).$$

Imaginons que la pression initiale p_1 soit donnée; dans cas, on n'a plus qu'à déterminer la pression finale p, ce qui fait de la manière suivante.

On a, d'après les notations adoptées,

$$G_x v_x = Fx, \quad \text{et} \quad G_y v_y = Fy.$$

En désignant par G le poids total de l'air qui se trouve de part et d'autre du piston S et en substituant à v_x et v_y les valeurs écrites plus haut, on a

$$G = G_x + G_y = \frac{Fpx}{RT_1} + \frac{Fpy}{RT_2},$$

ou bien

$$G = \frac{Fp}{R}\left(\frac{x}{T_1} + \frac{y}{T_2}\right).$$

Mais au commencement de l'expérience, on a $x = x_1$, $y = y_1$ et $p = p_1$, et, par conséquent,

$$(33) \qquad G = \frac{Fp_1}{R}\left(\frac{x_1}{T_1} + \frac{y_1}{T_2}\right).$$

En égalant les deux valeurs de G et en réduisant, on a

$$(34) \qquad p = p_1 \frac{x_1 T_2 + y_1 T_1}{x T_2 + y T_1}.$$

Enfin l'équation (132) donne, lorsqu'on y substitue cette valeur de p,

$$(35) \qquad L = Fp_1(T_1 - T_2)\frac{xy_1 - yx_1}{xT_2 + yT_1}.$$

Machine à air chaud d'Ericsson. — Les formules que nous venons de trouver permettent de calculer le travail de la machine d'Ericsson, telle qu'on la construit actuellement, et de donner la théorie de cette machine comme application de ces formules.

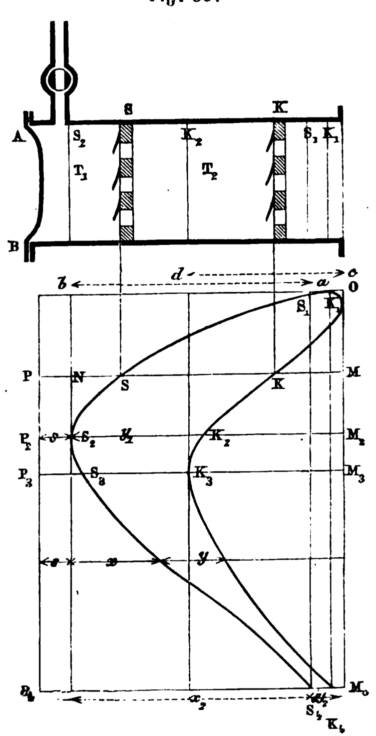
La partie supérieure de la *fig.* 30 représente le cylindre de la machine; il est ouvert d'un côté et fermé de l'autre par le couvercle AB qui est en même temps la paroi postérieure de la chambre à feu.

Deux pistons S et K, l'un alimentaire, l'autre moteur, se meuvent dans le cylindre; ils sont munis d'ouvertures recouvertes de clapets qui s'ouvrent toutes de droite à gauche (*);

(*) Il est évident que la *fig.* 30 du texte est théorique. Pour la construction pratique de cette machine, voyez l'excellente Notice de M. Boëtius : *Die Erics-*

il y a encore près du fond un tuyau de dégagement muni d'un robinet. L'air atmosphérique pénètre par les ouvertures du piston moteur K dans l'espace compris entre les deux pistons et y possède à peu près la température T_2 de l'air extérieur.

Fig. 30.



Mais l'air qui, par suite du mouvement du piston S vers l droite, a pénétré à travers ce piston dans l'espace AS y pos sède une température T_1 bien supérieure à T_2, parce qu'il es échauffé par le foyer. A cause de la rapidité de la marche de l

son'sche calorische Maschine, 2e édit., Hambourg, 1861. *Voyez* aussi : *Les nouvelles machines motrices de Lenoir et d'Ericsson*, par M. Lipowitz, Leipsig; 186 *Théorie de la machine à feu d'Ericsson*, par M. Grashof : *Revue de la Société des Ingénieurs allemands*, t. IV, p. 292.

achine, on peut considérer cette température T_1 comme con-
ante dans l'espace AS.

On comprend aisément le jeu de la machine, que nous sup-
osons connue dans ce qu'elle a d'essentiel, à l'inspection
un diagramme représenté par la partie inférieure de la
g. 30.

La verticale OM_0 représente la longueur de la circonférence
écrite par le bouton de la manivelle. Partons d'une certaine
osition initiale du bouton de la manivelle : quand ce bouton
ura parcouru l'arc dont la longueur est OM, les deux pistons
trouveront à des distances MK et MS de l'extrémité droite
 cylindre. En réunissant par un trait continu les différentes
ositions de chaque piston, on obtiendra deux courbes : la
ourbe (S_1SS_4) donne la loi du mouvement dn piston alimen-
ire, et l'autre courbe (K_1KK_4) donne la loi du mouvement du
ston moteur; l'ensemble de ces deux courbes représente
ès-clairement le mouvement relatif des deux pistons, et fait
nnaître leurs positions relatives à un instant quelconque,
nsi que les changements de volume des espaces KS et SP,
ui contiennent respectivement l'air froid et l'air chaud.

Lorsque le bouton de la manivelle a décrit l'arc OM, la dis-
nce des deux pistons est SK (c'est la quantité y de la *fig.* 29)
le piston S est éloigné de SN de l'extrémité de sa course à
uche. Au moment où il atteint cette extrémité, il reste en-
re un espace entre lui et le fond AB du cylindre : on l'ap-
lle *espace nuisible;* et sa dimension dans le sens de l'axe du
lindre est $PN = s$ (*). La course entière du piston S est ab,
celle du piston K est $cd = M_3K_3$.

Supposons que le bouton de la manivelle parte du point O :
ce moment les deux pistons ont les positions S_1 et K_1;
ntervalle qui les sépare est $S_1K_1 = S_4K_4 = y_2$; cet intervalle

(*) On pourrait produire le mouvement des deux pistons, dont la loi est re-
sentée par les deux courbes du diagramme, au moyen de différents méca-
mes; mais on ne saurait imaginer un mécanisme plus simple et plus parfait
celui de M. Ericsson, qui fait agir les deux pistons sur une même mani-
le, au moyen de leviers et de bielles.

contient de l'air à la température extérieure T_2, l'espac $S_4 P_4 = x_2 + s$ contient de l'air chauffé à la température T. Pendant que la manivelle décrit l'arc OM_2, le piston alimentair marche rapidement vers l'extrémité de sa course (courb $S_1 SS_2$), ses clapets restent fermés, et il pousse au dehors, à tr vers le tuyau, tout l'air chaud qui se trouve devant lui, attend que le robinet est alors ouvert; le piston moteur parcourt e même temps un chemin représenté par la courbe $K_1 KK_2$, allan d'abord un peu à droite, puis suivant le piston alimentaire ver la gauche, mais avec un mouvement plus lent; dès lors l'es pace compris entre les deux pistons augmente continuelle ment; les clapets du piston moteur s'ouvrent par suite d l'excès de la pression atmosphérique; de l'air pénètre don dans l'espace compris entre les deux pistons.

Lorsque le piston alimentaire a parcouru sa course entièr et que le piston moteur est arrivé au point K_2, la pression at mosphérique p_1 s'exerce sur les deux faces de ce dernier; donc pendant que la manivelle parcourt l'arc OM_2, il n'y a aucu travail produit ou dépensé, abstraction faite des frottements cette opération forme la période d'alimentation de la machine

A la fin de cette période on ferme le robinet du tuya de dégagement; alors le volume de l'espace nuisible sera F (F étant la section du piston) et sa température sera T_1, tandi que l'air compris entre les deux pistons aura la température T et le volume Fy_1 (*fig.* 30). Pendant que la manivelle décr ensuite la courbe $M_2 M_3$, le diagramme montre que le pisto alimentaire rétrograde suivant $S_2 S_3$, et que le piston moteu atteint dans le sens direct, suivant $K_2 K_3$, la fin de sa course; cette opération correspond la période de compression; le clapets du piston moteur sont fermés dans cette période, ceu de l'autre piston sont ouverts; l'air est comprimé, et une parti de cet air passe de l'espace froid dans l'espace chaud.

La période du travail commence seulement au moment o la manivelle part du point M_3 pour revenir par le chemin $M_3 M$ à sa position initiale; pendant ce temps les deux pistons re viennent par les chemins $S_3 S_4$ et $K_3 K_4$ à leurs premières pos tions; leur distance mutuelle diminue continuellement,

ir est chassé peu à peu de l'espace froid dans l'espace chaud. machine dépense du travail dans la période de compres- on M_2M_3, et elle en produit dans la période M_3M_0.

Le travail total gagné se détermine facilement au moyen de équation (135). La distance du piston alimentaire au fond du lindre et celle des deux pistons étaient respectivement s y_1 au commencement de la compression ; à la fin la longueur l'espace rempli d'air chaud est $s+x_2$ et la distance des ux cylindres est y_2; de sorte que si, dans l'équation (135), us mettons les quantités s, $s+x_2$ et y_2 respectivement à la ace de x_1, x et y, nous trouvons la quantité de travail effec- é par l'air du cylindre, savoir :

$$L = Fp_1(T_1 - T_2)\frac{y_1(x_2+s) - y_2 s}{(x_2+s)T_2 + y_2 T_1}.$$

Mais ce n'est pas le travail total transmis à la manivelle pen- nt un tour.

En effet, pendant que le piston moteur parcourt le chemin $K_2 - M_0K_4 = x_2 + y_2 - y_1$, et que sa distance à l'extrémité oite de sa course passe de M_2K_2 à M_0K_4, il faut vaincre pression Fy_1 de l'air extérieur. Du travail précédent il faut nc retrancher le travail dépensé

$$Fp_1(x_2 + y_2 - y_1).$$

Le travail théorique total L_e, gagné pendant un tour, sera fin

$$L_e = Fp_1\left[(T_1 - T_2)\frac{y_1x_2 + s(y_1 - y_2)}{(x_2+s)T_2 + y_2T_1} - (x_2 + y_2 - y_1)\right],$$

bien, en appelant L_s le travail de la machine dans une se- nde, exprimé en kilogrammètres, on aura, pour n tours par inute de la manivelle,

$$(136)\quad L_s = \frac{Fp_1 n}{60}\left[(T_1 - T_2)\frac{y_1x_2 + s(y_1 - y_2)}{(x_2+s)T_2 + y_2T_1} - (x_2 + y_2 - y_1)\right].$$

Le poids G de la quantité d'air que la machine aspire par conde se trouve de la manière suivante :

Le volume d'air, sous la pression et à la température de l'atmosphère, aspiré pendant un tour est

$$F(y_1 - y_2),$$

et son poids a pour expression

$$\frac{F(y_1 - y_2)p_1}{RT_2};$$

par suite le poids G sera

(137) $$\frac{y_1 - y_2}{RT_2}\,\frac{Fp_1 n}{60}.$$

En divisant l'équation (136) par la précédente, on obtient la relation qui a lieu entre le travail de la machine et le poids de l'air employé; le travail est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnel à G, ce qui était évident.

Comme application nous prendrons l'exemple donné par M. Boëtius (ouvrage déjà cité).

Les dimensions de la machine à feu et les données étaient les suivantes :

$$F = 0^{mq},165; \quad s = 0^m,084 \ (\textit{voyez fig. } 30);$$
$$y_1 = 0^m,275; \quad x_2 = 0^m,418; \quad y_2 = 0^m,025;$$

la température de l'air extérieur était de 10° et celle de l'air chaud de 300°, c'est-à-dire $T_2 = 283$ et $T_1 = 573$. Lorsqu'on suppose $p = 10\,334$ (une atmosphère) on a, d'après l'équation (136),

$$L_s = 869,048\,\frac{Fn}{60};$$

l'équation (137) donne, pour le poids de l'air aspiré par seconde,

$$G = 0,31187\,\frac{Fn}{60};$$

d'où l'on tire

$$L_s = 2786,571\ G.$$

Ainsi dans cette machine, à chaque kilogramme d'air aspiré par seconde correspondent $2786^{kgm},571$.

La machine faisait $n = 45$ tours : en mettant ce nombre et a valeur numérique de F dans les expressions précédentes, on a

$$L_s = 107^{kgm},544$$

et

$$G = 0^{kgm},03859.$$

L'essai au frein a donné pour le travail 68 kilogrammètres; e rendement de la machine (dans le sens ordinaire) serait par conséquent

$$\frac{68}{107,544} = 0,632.$$

M. Boëtius arrive par une autre formule à un travail qui diffère peu du précédent; car il trouve 101 kilogrammètres; mais sa formule est très-compliquée, de même que celle de M. Grashof (ouvrage déjà cité), et elle ne se prête pas à la discussion à cause de sa forme logarithmique.

Bien que notre équation fondamentale ne soit qu'approchée, elle a l'avantage d'être simple et de faire connaître le travail de la machine quand on connaît seulement les positions des pistons au commencement de la compression et à la fin de la période du travail; enfin sa discussion signale les points principaux sur lesquels l'attention du constructeur doit être appelée.

Supposons par exemple que la longueur s de l'espace nuisible soit nulle et qu'à la fin de la période du travail les deux pistons se trouvent l'un à côté de l'autre, c'est-à-dire que $y_2 = 0$, on aura, d'après l'équation (136),

$$L_s = \frac{F p_1 n}{60}\left(\frac{T_1}{T_2} y_1 - x_2\right)$$

ou bien, en vertu de l'équation (137),

$$(138) \qquad L_s = RG\left(T_1 - T_2 \frac{x_2}{y_1}\right) (*).$$

(*) Cette formule s'accorde avec une formule empirique que M. Grashof a déduite des expériences qu'il a faites sur plusieurs de ces machines. (*Revue de la Société des Ingénieurs allemands*, t. V, p. 138.)

Cette équation montre que ce sont principalement les quantités x_2 et y_1, T_1 et T_2 qui ont de l'influence sur la puissance de ces machines.

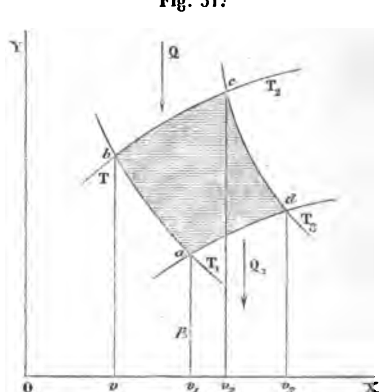
Il n'entre pas dans notre programme de développer davantage cette question.

XI. — *Théorie des machines thermiques fermées; application aux gaz permanents des théorèmes relatifs aux cycles.*

Dans les machines thermiques fermées, l'air renfermé dans un espace clos est successivement comprimé, dilaté, échauffé, refroidi, de telle sorte qu'il se trouve ramené périodiquement à son état initial et qu'il y ait gain de travail extérieur. Les circonstances qui se présentent sont simplement celles qui accompagnent un cycle complet d'opérations, et nous pouvons, par conséquent, leur appliquer directement les théorèmes établis dans le premier Chapitre.

Une machine à feu contient l'unité de poids d'un gaz qui possède dans l'état a (*fig.* 31) le volume v_1, la pression p_1 et

Fig. 31.



la température absolue T_1; menons deux courbes adiabatiques ab et cd, dont la première passe par le point a, et deux

ourbes *ad* et *bc* appartenant à la même famille caractérisée ır l'équation

$$p^m v^n = \text{const.},$$

ıns laquelle *m* et *n* sont des nombres quelconques, entiers ı fractionnaires, positifs ou négatifs.

En prenant le genre particulier de courbes défini par l'éıation précédente on ôte, il est vrai, aux théorèmes établis ɔur les cycles complets un peu de leur généralité; mais pour problème actuel cela n'a lieu qu'en apparence, car on verra ıns la suite que tous les cycles qu'on a pu jusqu'à présent ɔpliquer à une machine admettent pour les courbes *ad* et *bc* équation $p^m v^n = \text{const.}$

Nous avons montré à la page 141 que la quantité de chaleur ı'il faut fournir ou enlever au gaz, lorsque la pression et le ɔlume changent d'après la manière indiquée, est *directement roportionnelle à la variation de la température;* nous avons ɔsé

39) $$dQ = \lambda dt = \lambda dT,$$

ıuation dans laquelle la constante

40) $$\lambda = \frac{mk - n}{m - n} c$$

été appelée : *la chaleur spécifique du gaz pour un changeent qui suit la loi*

$$p^m v^n = \text{const.}$$

Supposons que les opérations qui s'accomplissent dans notre achine à feu soient les suivantes :

1° On comprime le gaz à partir de l'état *a* sans fournir ni ɔustraire de la chaleur, jusqu'à ce que sa température soit evenue T; le gaz passe donc dans son trajet sur une courbe liabatique de l'état *a* à l'état *b*.

2° A partir du point *b* le gaz, dont le volume est v, se dilate endant son trajet sur la courbe *bc* (construite d'après la loi ɔnnée) jusqu'au point *c*, où son volume est devenu v_2 et sa mpérature T_2; d'après l'équation (139) il faudra lui fournir

la quantité de chaleur donnée par la relation

(141) $$Q = \lambda(T_2 - T).$$

3° Le gaz continue à se dilater sans introduction ni sous-traction de chaleur, suivant la ligne adiabatique *cd*, et la température tombe de T_2 à T_3. Le point *d* est choisi de la manière suivante.

4° Lorsqu'on comprime le gaz suivant la courbe *da*, il se retrouve au point *a* dans son état initial; pendant ce temps on doit lui enlever la quantité de chaleur

(142) $$Q_1 = \lambda(T_3 - T_1).$$

On sait que pendant le parcours du cycle on a gagné un travail L qui est mesuré par la surface *abcd*; et en vertu de l'équation (22) on a la relation

(143) $$AL = Q - Q_1.$$

On peut trouver une autre expression de Q_1 qui nous permettra de transformer l'équation (143).

On a démontré plus haut (pages 82 et suivantes) que, pour tout passage d'un corps d'un point situé sur une courbe adiabatique donnée à un point d'une seconde courbe adiabatique l'intégrale

$$P = \int \frac{dQ}{AS}$$

est constante; dans cette égalité la quantité S n'était autre chose que $a + t = T$, c'est-à-dire la température absolue. En remplaçant S par T et dQ par λdT d'après l'équation (139), on a pour le passage de *b* à *c* (*fig.* 31):

$$P = \int_T^{T_2} \frac{\lambda dT}{AT} = \frac{\lambda}{A} \log \text{nép} \frac{T_2}{T},$$

et pour le passage de *a* à *d* :

$$P = \int_{T_1}^{T_3} \frac{\lambda dT}{AT} = \frac{\lambda}{A} \log \text{nép} \frac{T_3}{T_1}.$$

En égalant les deux valeurs de P on trouve la relation remar-
quable

(144) $$\frac{T_3}{T_1} = \frac{T_2}{T}.$$

Tirons la valeur de T_3 de cette égalité et substituons-la dans
l'équation (142), nous aurons

$$Q_1 = \lambda \frac{T_1}{T} (T_2 - T),$$

et à cause de l'équation (141)

(142') $$Q_1 = \frac{T_1}{T} Q.$$

Je porte enfin cette valeur de Q_1 dans l'équation (143) et je
trouve pour le travail L

(145) $$L = \frac{Q}{AT} (T - T_1).$$

Cette équation exprime la loi suivante qui, du reste, est
vraie pour un corps quelconque :

*Dans un cycle simple et reversible, dans lequel la chaleur
fournie ou soustraite pendant les trajets ad et bc est proportion-
nelle à l'accroissement de la température, le travail produit
s'obtient simplement au moyen de la quantité de chaleur* Q *et
des températures* T_1 *et* T *qui correspondent à la première
courbe adiabatique ab*; LES COURBES *ad* ET *bc* SONT ARBITRAIRE-
MENT CHOISIES DANS TOUTES CELLES QUI OBÉISSENT A LA LOI DONNÉE.

Dans les gaz cette loi est caractérisée par l'équation

$$p^m v^n = \text{const}.$$

D'après ce que nous venons de dire les valeurs des nombres
m et n sont arbitraires.

La forme de l'équation (145) est la même que celle de l'é-
quation (29); mais cette dernière est moins générale parce
qu'en l'établissant nous supposions que les courbes *ad* et *bc*
fussent des courbes isothermiques, c'est-à-dire que la dilata-

tion se fît sur le trajet *bc* à la température constante T et que la compression eût lieu sur le trajet *da* à la température constante T_1.

Dans l'équation (145) on peut encore remplacer Q par sa valeur donnée par l'équation (141), ce qui donne

$$(146)\qquad L = \frac{\lambda}{A}\,\frac{(T_2 - T)(T - T_1)}{T}.$$

Supposons que λ soit positif, cette hypothèse comprend également tous les cas qui se présentent dans la pratique; d'après l'équation (140), cela revient à poser $mk > n$ ou $k > \frac{n}{m}$.

Nous concluons de là

$$T_3 > T_1 \quad \text{et} \quad T_2 > T,$$

et, par suite, dans notre machine à feu, les températures minima et maxima pendant le cycle sont respectivement T_1 et T_2.

Mais dans la pratique nous sommes limités pour ces températures extrêmes que nous désignerons par t_1 et t_2, en les supposant exprimées en degrés centigrades. En effet, on ne peut abaisser la température de l'air intérieur au-dessous de celle de l'air extérieur; et alors en employant pendant l'hiver la neige et la glace pour opérer le refroidissement (on ne peut employer dans la pratique d'autres réfrigérants), on aura t_1 égal à 0°, et par suite

$$T_1 = 273°.$$

D'un autre côté on ne peut construire des machines dans lesquelles les différentes pièces, et surtout les organes principaux, comme les pistons et les tiroirs, se trouvent à des températures supérieures à 300°; et si $t_2 = 300°$, on aura $T_2 = 573°$; quelques constructeurs considèrent même, et peut-être avec raison, cette limite comme trop élevée.

L'équation (146) montre que le travail L, gagné par une machine à feu fermée, est d'autant plus grand que T_2 est plus grand et que T_1 est plus petit, ou en d'autres termes que l'intervalle de température $T_2 - T_1$ est lui-même plus grand. Mais

uisque nous sommes renfermés probablement pour toujours ans les limites indiquées, nous devons chercher, quand il agira d'avoir l'effet maximum d'une machine à feu, quelle aleur doit avoir la température intermédiaire T qui est à otre disposition dans l'établissement de la machine.

Il faut chercher alors la valeur de T qui rend le travail L aximum. L'équation (146) peut s'écrire

$$L = \frac{\lambda}{A}\left(T_2 + T_1 - T - \frac{T_1 T_2}{T}\right) (*),$$

t on obtient, en différentiant par rapport à T, le maximum de , au moyen de la valeur

$$47) \qquad T = \sqrt{T_1 T_2}.$$

Si les limites inférieures et supérieures de la température ont données, comme cela a réellement lieu ici, on obtient e maximum du travail de la machine lorsqu'on continue la ompression sur le trajet *ab* (*fig.* 31) jusqu'à ce que la tem-érature ait monté de T_1 à $T = \sqrt{T_1 T_2}$.

La température T_3, dans l'état *d*, s'obtient à l'aide de l'é-uation (144), et on a

$$48) \qquad T_3 = \frac{T_1 T_2}{T} = \sqrt{T_1 T_2} = T.$$

Nous tirons de là une conséquence très-importante pour appréciation de la machine : pour que sa marche soit bonne,

---

(*) Cette équation se présente sous la forme indéterminée

$$L = \infty \times 0,$$

l'on fait $T = T_2$ ou aussi $T_3 = T_1$, à cause de l'équation (144); alors les deux urbes *bc* et *ad* (*fig.* 31) sont deux courbes isothermiques pour lesquelles on a $= n$ (*voyez* p. 141). La chaleur spécifique λ devient d'après l'équation (140), $= \infty$.

Dans ce cas particulier très-important, le travail gagné se calcule à l'aide e l'équation (145) lorsqu'on y fait $T = T_2$, et qu'on désigne par Q la quantité e chaleur introduite sur le trajet *bc* à la température constante T_2. On ne peut us considérer cette quantité de chaleur comme une fonction de la tempéra-ure, mais il faut l'exprimer au moyen des volumes initiaux et finaux ou des ressions initiales et finales. Nous reviendrons plus loin sur ce cas particulier.

il faut qu'il y ait entre les températures la relation précédente en d'autres termes, *le point d doit être situé sur la courb isothermique bd qui passe par le point b.*

L'introduction de la chaleur commence sur le trajet *bc* à l température T et se continue jusqu'à ce que la températur ait atteint T_2, tandis que la soustraction de la chaleur com mence sur le trajet *da* à la même température T et dure jus qu'au moment où elle atteint la valeur plus petite T_1. La sous traction de la chaleur a lieu par conséquent sur *tout* le traje *da* à une température inférieure à celles qui correspondent l'introduction de chaleur sur le trajet *bc*; la quantité de cha leur Q_1 ne peut donc être employée ni tout entière ni mêm en partie dans la même opération. En un mot les régénéra teurs, sur lesquels on a compté beaucoup lors de leur inven tion pour perfectionner la machine à air, ne produisent *aucu effet* (*).

Nous pouvons sans doute emmagasiner quelque part dan un régénérateur la quantité de chaleur Q_1, mais elle ne peu servir pour la machine elle-même. Dans le cas seulement où la machine ne produit pas le maximum de travail, lorsque par exemple la dilatation sur la courbe *cd* n'est pas poussée suffisamment loin, c'est-à-dire quand à la fin $T_3 > T$ on pourrait recueillir une partie de la chaleur dans un ré-générateur pour l'employer sur le trajet *bc*; mais lorsque $T_3 = T = \sqrt{T_1 T_2}$, c'est-à-dire dans le cas du maximum de travail, l'établissement d'un régénérateur ne servirait à rien.

En mettant dans les équations (145) et (146) la valeur de T tirée de la relation (147), on obtient les deux expressions suivantes du travail maximum que nous désignerons par L_m:

$$(149) \qquad L_m = \frac{Q}{A} \frac{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}},$$

$$(150) \qquad L_m = \frac{\lambda}{A} (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})^2.$$

(*) C'est M. Hirn qui, le premier, a fait remarquer que les régénérateurs ne peuvent produire un effet utile dans les machines à feu qui travaillent convenablement. (HIRN, *Théorie mécanique de la chaleur.*)

C'est là le travail maximum de l'unité de poids de l'air; s'il a M kilogrammes d'air dans la machine, on a

$$(151)\qquad L_m = \frac{\lambda}{A} M (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})^2,$$

Q désigne, dans l'équation (149), toute la quantité de chaleur qu'il faut fournir à chaque opération; cette équation montre encore que l'effet maximum ne dépend que de Q et des températures limites T_1 et T_2, mais qu'il est indépendant de la loi particulière qui concerne les courbes *ad* et *bc*, c'est-à-dire des valeurs m et n de l'équation (140), aussi bien que de la pression p_1 du gaz au commencement du cycle.

Pour que l'on obtienne le travail maximum il faut que les rapports $\frac{v_1}{v}$ et $\frac{v_3}{v_1}$ qui correspondent à la compression et les rapports $\frac{v_2}{v}$ et $\frac{v_3}{v_2}$, qui sont relatifs à l'expansion, aient des valeurs déterminées. Comme *ab* et *cd* sont des courbes adiabatiques, on a ici, d'après l'équation (77),

$$\frac{v_1}{v} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad \text{et} \quad \frac{v_3}{v_2} = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

ou bien, à cause de la relation (148),

$$(152)\qquad \frac{v_1}{v} = \left(\frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{v_3}{v_2}.$$

L'équation

$$p^m v^n = \text{const.},$$

qui donne les changements de pression sur les courbes *ad* et *bc* (*fig.* 31), prend la forme

$$pv^r = \text{const.},$$

quand on pose $\frac{m}{n} = r$; elle nous fournit, lorsque nous tenons compte de la loi de Mariotte et Gay-Lussac, les formules

suivantes :

(153) $$\frac{p_y}{p_x} = \left(\frac{v_x}{v_y}\right)^r = \left(\frac{T_y}{T_x}\right)^{\frac{r}{r-1}}.$$

Pour le cas actuel, il vient par conséquent

$$\frac{v_2}{v} = \left(\frac{T}{T_2}\right)^{\frac{1}{r-1}} \quad \text{et} \quad \frac{v_3}{v_1} = \left(\frac{T_1}{T_3}\right)^{\frac{1}{r-1}}.$$

Lorsque le travail est maximum on doit donc avoir, à cause de l'équation (148),

(154) $$\frac{v_2}{v} = \left(\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}}\right)^{\frac{1}{r-1}} = \frac{v_3}{v_1}.$$

Les pressions du gaz dans les quatre états a, b, c, d se déterminent d'une manière analogue, lorsqu'on connaît la pression p_1 pour l'état initial a.

Prenons pour les températures minima et maxima les limites extrêmes de la pratique, c'est-à-dire $t_1 = 0$ et $t_2 = 300°$ ou bien $T_1 = 273$ et $T_2 = 573$. Quand on met dans l'équation (149) les valeurs

$$\sqrt{T_2} = \sqrt{573} = 23,9374,$$
$$\sqrt{T_1} = \sqrt{273} = 16,5227$$

et

$$A = \frac{1}{424},$$

on trouve pour le travail maximum de la machine

$$L_m = 131,335\,Q^{\text{kgm}}.$$

Supposons que la machine doive fournir au maximum une force de N chevaux-vapeurs, et appelons Q_h la quantité de chaleur qu'il faut donner à la machine par heure, on a alors

$$L_m = 3600.75\,N = 131,335\,Q_h,$$

d'où l'on tire

$$\frac{Q_h}{N} = 2058.$$

Ce dernier chiffre indique la quantité de chaleur qu'il faut voyer du foyer à la machine *par heure et par cheval.* Mulions cette valeur par $\frac{T_1}{T}$, ou, ce qui est la même chose, en tu de l'équation (147), par $\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}} = 0,6902$, on aura, d'après quation (142'),

$$\frac{Q'_h}{N} = 1420,$$

nbre qui représente la quantité de chaleur qu'il faut enle- à la machine *par heure et par cheval.* Suivant le foyer ployé on trouvera, au moyen du premier de ces nombres, quantité de combustible dont on a besoin, tandis que le ond donne la quantité d'eau qu'il faut employer pour opé- le refroidissement. On doit considérer ces deux nombres nme des valeurs minima, dont il faut s'approcher autant possible; ils supposent qu'il n'y ait pas de pertes de cha- r et que la machine marche de la manière la plus avanta- ise possible; en d'autres termes, les rapports correspon- t à la compression et à l'expansion ont été choisis de ma- re que les températures intermédiaires fussent conformes équation (148), c'est-à-dire que

$$t = t_3 = 122^\circ,51.$$

Les valeurs précédentes sont d'ailleurs entièrement indé- ndantes de la loi qui régit les courbes *bc* et *ad*, c'est-à-dire valeurs de m et de n de l'équation (140), à l'exception du où $m = n$. Mais les diverses machines à feu construites qu'à présent ne diffèrent que par *ces courbes;* d'où l'on clut que, théoriquement, aucune d'elles ne l'emporte sur autres.

Mettons aussi les valeurs numériques de T_1, T_2 et A trous ci-dessus dans l'équation (151), où M désigne le poids l'air qui fonctionne dans la machine, nous aurons

$$L_m = 23310,6 . \lambda M^{\text{kgm}}$$

ur le travail maximum par tour.

Si la machine fait u tours par minute, pour un travail de chevaux-vapeur, il viendra

$$uL_m = 60.75.N.$$

La valeur de L_m tirée de cette dernière égalité et portée da l'équation qui la précède donne, pour le poids de l'air,

$$(155) \qquad M = 0,19304 \frac{N}{u\lambda} \text{ kgm.}$$

Désignons par V_1 le volume de cette quantité d'air da l'état a (*fig.* 31) au commencement du cycle, et par p_1 la pre sion correspondante, on aura

$$M = \frac{V_1 p_1}{RT_1}.$$

En portant cette valeur de M dans l'équation (155), et prenant $T_1 = 273$, $R = 29,272$, on aura, si p_1 est évalué atmosphères,

$$(156) \qquad V_1 = 0,14928 \frac{N}{\lambda u p_1}.$$

Le volume V correspondant au moment de la plus gran compression (état b, *fig.* 31) se détermine à l'aide de l'équ tion (152) :

$$(157) \quad V = V_1 \left(\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}}\right)^{\frac{1}{k-1}} = V_1 (0,69024)^{\frac{1}{k-1}} = 0,4049.V_1,$$

et le volume V_3, qui se rapporte au moment de la plus gran expansion (état d, *fig.* 31), se trouve, au moyen de l'équ tion (154) :

$$(158) \qquad V_3 = V_1 \left(\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}}\right)^{\frac{1}{r-1}}.$$

Les dernières formules nous renseignent sur les dime sions de la machine, car elles indiquent les volumes q prend l'air dans les différents états du cycle; mais les fo mules générales montrent que la grandeur de la machine d pend des valeurs de λ et r, c'est-à-dire de la loi qui régit

ıngements de pression sur les trajets *ad* et *bc* (*fig.* 31). La ındeur de la machine dépend encore, d'après l'équan (156), de u, p_1 et N, et elle sera d'autant moins encomınte, *qu'elle fait plus de tours par minute, que la pression l'air est plus grande et que sa force est moindre.*

Il est évident que la grandeur de la machine doit augmenter ec sa force; quant au nombre de tours par minute, nous nmes limités dans la pratique, parce que les résistances gmentent très-rapidement avec une marche plus rapide rtout les résistances qui s'opposent au mouvement de l'air avers les différents organes de la machine, à travers les aux, etc.); il est vrai que, d'après les expériences de Combes et d'autres, l'absorption et l'admission de la char se font très-rapidement.

Pour que des machines à air d'une grande force n'exigent des dimensions exorbitantes, il n'y a donc qu'un moyen : *aut donner à la pression initiale p_1 la plus grande valeur sible.*

e conclus de là qu'aucune machine à feu qui commence cycle avec de l'air à la pression atmosphérique (et ceci à ı dans toutes celles qui après chaque tour rejettent l'air et irent une nouvelle quantité d'air à la pression atmosphéıe) n'a de l'avenir, et que de telles machines ne remplaont jamais les machines à vapeur, *lorsqu'il s'agit de dévever de grandes forces.*

Les personnes qui s'occupent de la question du perfectionnent des machines à feu doivent donc uniquement s'attar aux machines *fermées*, dans lesquelles agit toujours la me quantité d'air. Avant de mettre la machine en marche, ıut fortement comprimer l'air. Ce n'est pas l'augmentation la pression de l'air renfermé dans la machine qui a de l'innce sur sa force, nous le répétons; ce sont seulement ses ıensions qui se trouvent réduites par là; mais c'est cette constance, qu'il faut donner des dimensions colossales à machines à air de grande force, qui a tant diminué les érances conçues sur ces machines.

Les machines à air, qui jusqu'ici ont été proposées et exé-

cutées se distinguent principalement par la loi qui caractéris les deux courbes *ad* et *bc* (*fig.* 31). Nous allons examiner i la question des dimensions pour les deux systèmes princ paux.

1. *Système Stirling.* — Dans ce système, le *volume res constant* pendant l'introduction et la soustraction de la ch leur; les deux courbes *ad* et *bc* (*fig.* 31) sont des lign droites parallèles à l'axe des ordonnées OY.

Dans l'équation

$$p^m v^n = \text{const.},$$

il faut faire $m = 0$; on a par suite, d'après l'équation (140),

$$\lambda = c = 0,16847.$$

D'ailleurs

$$r = \frac{n}{m} = \infty.$$

Pour de pareilles machines, le poids de l'air renfermé es d'après l'équation (155),

$$\mathbf{M} = 1,1458 \frac{\mathrm{N}}{u},$$

et on trouve, à l'aide de l'équation (156), le volume V_1, q est ici égal au volume V_3,

$$V_1 = V_3 = 0,8861 \frac{\mathrm{N}}{up_1}.$$

Le volume V correspondant à la plus forte compression, l quel est égal à V_2, est d'après l'équation (157),

$$V = V_2 = 0,4049 V_1.$$

2. *Système Éricsson* (machine ancienne). — L'introducti et la soustraction de la chaleur se font sous une *pression co stante;* les courbes *ad* et *bc* sont encore des lignes droite mais elles sont parallèles à l'axe des abscisses OX.

On a dans ce cas $n = 0$; par suite, d'après l'équation (14

$$\lambda = kc = 0,23751,$$

puis

$$r = \frac{n}{m} = \infty.$$

)n trouve ici, au moyen de l'équation (155), pour le poids la quantité d'air qui fonctionne,

$$M = 0,81276 \frac{N}{u},$$

ıntité un peu moins grande que dans le premier système, tes choses égales d'ailleurs.

.e volume V_1 relatif au commencement du cycle est, d'as l'équation (156),

$$V_1 = 0,62854 \frac{N}{up_1}.$$

ır le volume V qui correspond au moment de la plus :e compression, on trouve, à l'aide de l'équation (157),

$$V = 0,25449 \frac{N}{up_1};$$

ɔour le volume V_3 correspondant à la plus grande expanı, d'après l'équation (158),

$$V_3 = 0,91060 \frac{N}{up_1}.$$

lalgré le poids d'air plus petit qui travaille dans cette mane, elle exige des dimensions un peu plus grandes que la chine du système Stirling.

.a soustraction de la chaleur a lieu sous une pression conıte p_1; mais pendant l'introduction de la chaleur la presı p_2 se détermine par l'équation (78), dans laquelle on t à la place de $a + t$ la valeur $T_2 = \sqrt{T_1 T_2}$ qui correspond à 'et maximum; on a alors

$$p_2 = p_1 \left(\frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 3,5785 p_1.$$

'our une force de $N = 100$ chevaux-vapeur, avec $u = 10$

tours par minute (ce dernier chiffre est cependant déjà tro fort), et avec une pression initiale $p_1 = 1$ atmosphère, o trouve, d'après l'équation écrite ci-dessus,

$$V_3 = 9^{mc},106,$$

pour la capacité que le cylindre moteur doit offrir à l'air la fin de l'expansion; dans une pareille machine il faudra que, pendant la période de la compression, la pression f portée de $p_1 = 1$ à $p_2 = 3^{at},578$, et le volume d'air de $6^{mc},285$ à $2^{mc},5449$. Si l'on ne faisait travailler la même machin qu'entre les limites p_1 et $p_2 = 2p_1$ atmosphères, on déterm nerait la température intermédiaire T au moyen de l'équatio

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

et on aurait

$$T = 1^{\circ},2233, \quad T_1 = 333^{\circ},96;$$

le travail par tour serait, d'après l'équation (146),

$$L = 53,6992\,M;$$

ou, si la machine donnait pour u tours par minute N_1 chevau vapeur, c'est-à-dire si l'on avait

$$L = 75.60\,\frac{N_1}{u},$$

il viendrait

$$M = 0,8380\,\frac{N_1}{u};$$

tandis qu'on a trouvé plus haut pour l'effet maximum

$$M = 0,81276\,\frac{N}{u}.$$

Lorsque la quantité d'air et le nombre de tours sont l mêmes, on a, en divisant membre à membre,

$$N_1 = 0,9698\,N.$$

Quand on n'a pas bien choisi le rapport de la compressi

comme nous l'avons supposé, le cylindre moteur est plus
nd que dans le cas du travail maximum.

Même pour l'effet maximum, les dimensions de ce cylindre
it déjà colossales; dans une machine à vapeur de la même
ce (à moyenne pression, à détente et à condensation), la
acité du cylindre à vapeur serait d'environ $1^{mc},2$.

Admettons que nous ne voulions pas donner au cylindre
teur de notre machine à air une plus grande capacité que
le de ce cylindre à vapeur; alors pour une force de N égale
oo chevaux-vapeur et *u* égale à 10 tours, la pression de
r pendant la soustraction de la chaleur doit être, d'après
xpression de V_3 donnée plus haut,

$$p_1 = \frac{0,9106 \times 100}{1,2 \times 10} = 7^{at},588,$$

la pression pendant l'introduction de la chaleur

$$p_2 = 7,588 \times 3,5785 = 27^{at},154.$$

Ce sont là des résultats qui n'encouragent pas à chercher
elle est la construction d'une machine à air de grande force
i puisse faire espérer un succès pratique.

Les choses ne sont plus les mêmes pour des machines de
yenne et de petite force. De telles machines que l'on peut
re travailler avec une grande vitesse seront sans doute beau-
ip et diversement employées : seulement elles doivent être
istruites pour de fortes pressions et de telle sorte, que
r emprisonné dans la machine parcoure, autant que pos-
le, les différentes périodes du cycle, de la manière indiquée
is haut pour la production du travail maximum.

Pour terminer, généralisons davantage les formules relatives
cycle d'une machine à air fermée. Nous avons supposé
is haut que les deux courbes *ab* et *cd* (*fig.* 31) fussent des
irbes adiabatiques, et qu'il n'y eût par conséquent suivant
s trajets ni introduction, ni soustraction de chaleur. Cette
pothèse se réalise approximativement dans les machines
idiées jusqu'ici.

Supposons à présent que les deux couples de courbes *ab*, *cd* et *bc*, *da* soient assujetties à la loi

$$p^m v^n = \text{const.},$$

seulement les valeurs de m et de n seront différentes pour l'un et pour l'autre couple.

Posons

$$\frac{n}{m} = r_1$$

pour le couple *ab*, *cd*, et

$$\frac{n}{m} = r_2$$

pour le couple *bc*, *da*.

Les capacités calorifiques correspondantes, calculées à l'aide de l'équation (140), seront désignées par λ_1 et λ_2.

La quantité de chaleur qu'il faut fournir dans le trajet *abc* sera alors

$$(159) \qquad Q = \lambda_1 (T - T_1) + \lambda_2 (T_2 - T),$$

et pour le trajet *cda*

$$(160) \qquad Q_1 = \lambda_2 (T_3 - T_1) + \lambda_1 (T_2 - T_3);$$

le travail L gagné dans cette opération se déduit encore de l'équation

$$(161) \qquad AL = Q - Q_1.$$

Mais il y a ici une relation simple entre les quatre températures T_1, T, T_2, T_3.

La valeur de l'intégrale

$$P = \int \frac{dQ}{AT}$$

est constante quelle que soit la manière dont le passage du point *a* au point *c* s'est effectué.

On trouve pour le trajet *abc*

$$AP = \int_{T_1}^{T} \frac{\lambda_1 \, dT}{T} + \int_{T}^{T_2} \frac{\lambda_2 \, dT}{T} = \lambda_1 \log \text{nép} \frac{T}{T_1} + \lambda_2 \log \text{nép} \frac{T_2}{T}$$

pour le trajet *adc*

$$\text{AP} = \int_{T_1}^{T_3} \frac{\lambda_2 dT}{T} + \int_{T_3}^{T_2} \frac{\lambda_1 dT}{T} = \lambda_2 \log\text{nép} \frac{T_3}{T_1} + \lambda_1 \log\text{nép} \frac{T_2}{T_3}.$$

Égalons ces deux valeurs de AP, il vient

$$\left(\frac{T}{T_1}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{T_2}{T}\right)^{\lambda_2} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\lambda_1},$$

d'où l'on tire

(162) $$\frac{T_3}{T_1} = \frac{T_2}{T},$$

équation qui coïncide avec l'égalité (144). Si l'on met dans l'équation (160) la valeur de T_3 tirée de cette dernière égalité, on aura

$$Q_1 = \lambda_1 \frac{T_2}{T}(T - T_1) + \lambda_2 \frac{T_1}{T}(T_2 - T).$$

Remplaçons, dans l'équation (161), Q par sa valeur donnée par l'équation (159), et Q_1 par l'expression précédente; on a, pour le travail de l'unité de poids de l'air pendant une opération,

(163) $$L = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{AT}(T - T_1)(T_2 - T),$$

équation qui devient, quand on multiplie et quand on divise par Q,

(164) $$L = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{AT} \cdot \frac{Q(T - T_1)(T_2 - T)}{\lambda_1(T - T_1) + \lambda_2(T_2 - T)}.$$

En faisant $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$ dans les équations (163) et (164), nous retombons respectivement sur les équations (145) et (146), qui sont relatives aux cas particuliers examinés plus haut.

Si M est le nombre de kilogrammes d'air qui travaillent dans la machine, on a, d'après l'équation (163), pour le travail par heure,

(165) $$L = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{AT} M(T - T_1)(T_2 - T).$$

Lorsque λ_1 et λ_2 sont supposés tous les deux positifs, on

aura $T > T_1$ et $T_2 > T$; par suite T_1 représentera la plus petite et T_2 la plus forte température. Si ces valeurs de T sont déterminées d'avance, comme cela a lieu dans la pratique, il faut encore choisir la température intermédiaire T de telle sorte, que cette dernière valeur de L soit un maximum.

Mais la formule (165) peut encore s'écrire

$$L = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{A} M \left(T_2 + T_1 - \frac{T_1 T_2}{T} - T\right),$$

et alors la parenthèse sera un maximum pour

$$T = \sqrt{T_1 T_2}.$$

En vertu de l'équation (162), on a aussi

(166) $$T_3 = \sqrt{T_1 T_2} = T,$$

même résultat que plus haut. On conclut de là que la valeur la plus avantageuse des températures intermédiaires T et T_3 est indépendante de la loi des courbes qui, dans la *fig.* 31, limitent la surface *abcd*, pourvu toutefois que chaque couple satisfasse à l'équation

$$p^m v^n = \text{const.},$$

dans laquelle *m* et *n* diffèrent l'un de l'autre. La substitution des valeurs de T et de T_3 dans l'expression du travail L donne la valeur du travail maximum L_m; on a ainsi

(167) $$L_m = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{A} M \left[\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right]^2.$$

Les équations précédentes constituent pour moi les équations fondamentales des machines à air; elles peuvent s'appliquer à un nombre infini de systèmes différents. Pour un système déterminé, il suffit de calculer les valeurs de λ_1 et λ_2 correspondant aux deux couples de courbes qui limitent la surface *abcd*. Pour les systèmes proposés jusqu'ici on a, il est vrai, $\lambda_1 = 0$, et les cas les plus importants de ces systèmes ont été traités plus haut; néanmoins, on peut imaginer des machines à air dans lesquelles, à cause de leur construction

rticulière, λ_1 soit différent de zéro, c'est-à-dire dans les-
ielles les deux courbes *ab* et *cd* ne soient pas des lignes
iabatiques.

Supposons par exemple que le changement d'état du gaz se
sse suivant les trajets *ab* et *cd* sous un volume constant, et
ivant les trajets *bc* et *da* sous une pression constante; alors
$= c$ et $\lambda_2 = kc$ en vertu de l'équation (140), et dans ce cas il
udrait faire

$$\lambda_2 - \lambda_1 = c(k-1)$$

ns les formules précédentes. La surface *abcd* serait alors
ie surface rectangulaire.

Pour les applications on transformerait les équations (165)
(167) en exprimant le travail de la machine en che-
ux (N), et en introduisant le nombre de tours (u) faits
ns une minute, c'est-à-dire on y remplacerait L et L_m par
$\times 75 \frac{N}{u}$; le poids M de la quantité d'air qui travaille dans
machine serait, comme plus haut, exprimé en fonction de
p_1 et T_1 à l'aide de la relation

$$M = \frac{V_1 p_1}{R T_1},$$

ii correspond à l'état initial *a* (*fig.* 31); pour les autres états-
mites *b*, *c* et *d*, on déterminerait facilement le volume et la
ession au moyen de l'équation (153), les températures étant
nnues.

Le problème étant très-facile à résoudre, nous nous dispen-
ns de donner des exemples numériques.

Si les machines à air acquéraient réellement de l'importance
ns l'industrie, on aurait maintenant, pour une certaine
asse au moins, des équations fondamentales propres à les
umettre au calcul.

XII. — *Du travail disponible et du rendement des machines thermiques.*

On appelle *rendement d'une machine* le rapport du travail utile au travail disponible, c'est-à-dire au travail mis pendant le même temps à notre disposition par le moyen de la machine. Ce rapport est évidemment toujours une fraction; plus cette fraction se rapprochera de l'unité, plus la machine sera parfaite.

Nous avons cherché plus haut les formules relatives au calcul de l'effet des machines thermiques, en faisant abstraction, il est vrai, des pertes de chaleur et d'air, mais en distinguant les différentes espèces de cycles qui correspondent aux divers systèmes.

Comment peut-on déterminer en général le travail disponible dans une machine à air? Le premier moyen qui se présente à l'esprit consiste à exprimer en travail la chaleur totale Q qu'on fournit à la machine par seconde, c'est-à-dire à calculer la valeur $\frac{Q}{A}$ et à la prendre pour mesure du travail disponible; la machine devrait utiliser la plus grande partie possible de ce travail.

Mais on peut partir aussi d'un autre point de vue. Nous produisons la chaleur que nous envoyons à une machine à air en brûlant du combustible dans le foyer, et nous connaissons la chaleur de combustion des divers combustibles, c'est-à-dire la quantité de chaleur produite par la combustion de l'unité de poids du combustible employé; nous pouvons donc exprimer en travail la quantité de chaleur que la combustion dans le foyer rend libre dans une seconde et considérer ce travail comme disponible, comme susceptible d'être réellement rendu utile dans la pratique; on jugerait d'après ce travail la valeur des machines thermiques dans lesquelles on peut comprendre par extension les machines à vapeur.

Quelques auteurs, et, si je ne me trompe, M. Redtenbacher le premier, ont choisi ce dernier mode pour déterminer le

avail disponible ; ils sont arrivés par ce moyen à un résultat
eu rassurant, en concluant que nos machines à vapeur ac-
elles et les machines à air dilaté se présentent à nous, au
oint de vue mécanique, comme les plus *imparfaites* de toutes
s machines *motrices;* car ils ont trouvé pour les machines à
apeur un rendement de 0,04 à 0,06 (*), et pour les meilleures
achines de ce genre un rendement maximum de 0,07.

Dans les meilleures roues hydrauliques et turbines ce ren-
ement s'élève, comme on sait, jusqu'à 0,80; la comparaison
e ces machines avec les machines à vapeur montrerait ainsi
u'on emploie le combustible dans ces dernières d'une ma-
ère impardonnable. C'est à cause de cela que les hommes
ui s'occupent de mécanique éprouvent de la répugnance à
aiter la question du rendement des machines à vapeur, de
es machines qui ont si puissamment contribué aux progrès
e notre époque ; aussi M. Redtenbacher a-t-il dit, dans plu-
eurs de ses écrits, que les améliorations nouvelles intro-
uites dans la construction des machines à vapeur ne sauraient
quérir une grande importance tant que l'on n'aurait pas dé-
ouvert une nouvelle manière d'utiliser la vapeur et la chaleur
n général.

Ces jugements reposent heureusement sur des suppositions
exactes et sont les conséquences d'une détermination *fausse*
u travail mis à notre disposition par la chaleur qui provient
e la combustion des corps employés. Je démontrerai dans
e qui suit que les machines thermiques (comprenant les
achines à vapeur) sont des machines beaucoup plus parfaites
u'on ne l'a cru jusqu'à présent.

Considérer dans une machine à feu la quantité de chaleur
u'on lui fournit exprimée en travail comme le travail dispo-
ble reviendrait, comme je le montrerai, à déterminer le tra-
ail disponible pour une roue hydraulique ou pour une turbine
n multipliant le poids de la quantité d'eau qui tombe dans

(*) Redtenbacher, *Der Maschinenbau;* Mannheim, 1863, t. II, p. 592. L'auteur
déjà rendu un jugement semblable dans la première édition de cet ouvrage,
123.

une seconde, non pas par la hauteur de chute mesurée du niveau supérieur au niveau inférieur, mais par la *hauteur comptée à partir du niveau supérieur jusqu'au niveau de la mer.*

D'autre part, prendre pour le travail disponible toute la chaleur évaluée en travail qui est mise en liberté dans le foyer de la machine, c'est agir de la même manière que si l'on comptait dans une roue hydraulique la hauteur de chute disponible *du niveau de la* SOURCE *du cours d'eau au niveau de la mer!*

Mesurer d'une telle manière le travail disponible donnerait naturellement un rendement extrêmement petit, même pour la meilleure roue hydraulique. Est-il possible d'attribuer ce résultat à une mauvaise construction de la roue hydraulique et à un mauvais emploi de la force que donne l'eau?

Quoique cela puisse paraître étrange, on est justement tombé dans une semblable erreur, lorsqu'on a voulu apprécier les machines à vapeur.

Ma comparaison n'est nullement superficielle, car je me servirai pour calculer le travail disponible des machines thermiques de la formule même que l'on emploie dans le calcul des machines hydrauliques. Dans l'un et l'autre cas le travail se mesure par le produit d'un certain poids par une certaine hauteur.

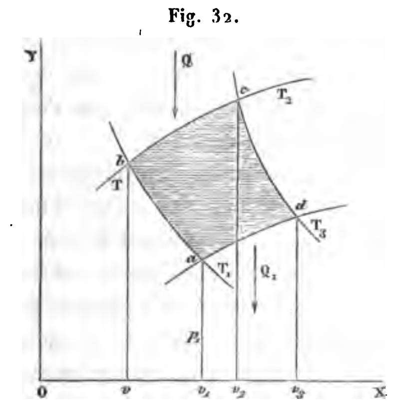
Il est, sans nul doute, très-important de démontrer *mathématiquement* que les machines à air chaud et à vapeur utilisent *bien plus* que 5 pour 100 du travail disponible, et d'établir la limite que nous pouvons atteindre dans le perfectionnement de la machine à vapeur, afin que nous ne poursuivions pas un fantôme et que nos efforts ne soient pas illusoires.

Revenons au cycle qui nous a servi de base pour les recherches sur les machines thermiques (p. 200).

Supposons que l'unité de poids du gaz soit caractérisée dans l'état a (*fig.* 32) par le volume v_1, la pression p_1 et la température T_1; menons les courbes adiabatiques ab et cd et les deux courbes bc et ad qui obéissent à la loi $p^m v^n = \text{const.}$ Le gaz a parcouru dans la machine le cycle $abcd$; sur le trajet bc on a fourni la quantité de chaleur Q, et sur le trajet da on

fourni la quantité de chaleur Q_1. Soient T_1 la plus basse et T_2

Fig. 32.



plus haute température du cycle, T et T_3 les températures termédiaires qui sont liées par la relation (144), quand T_1 et sont déterminées d'avance; autrement une de ces valeurs st arbitraire, T par exemple, ou en d'autres termes, nous pouvons choisir arbitrairement les deux courbes *bc* et *ad*.

Le travail L, gagné dans ce cycle, est donné par l'équaon (145).

Lorsque la quantité de chaleur Q est donnée d'avance (ainsi ue T_1 et T_2), on choisira évidemment l'opération de telle orte que le travail soit maximum, et on disposera pour cela es températures intermédiaires T et T_3.

L'équation (145) peut s'écrire

$$L = \frac{Q}{A}\left(1 - \frac{T_1}{T}\right),$$

t l'on voit que le travail maximum que l'on peut gagner avec quantité de chaleur Q correspond au maximum de T, c'est-dire à $T = T_2$. On a dans ce cas $T_3 = T_1$, et le maximum abolu du travail que nous désignons par L_a est par conséquent

$$(168) \qquad L_a = \frac{Q}{A T_2}(T_2 - T_1).$$

Ce travail est précisément *le travail disponible de la machine*

thermique; comme nous sommes limités dans la pratiq pour les températures T_1 et T_2 (nous avons plus haut fixé c limites à $t_1 = 0$ et $t_2 = 300°$, c'est-à-dire $T_1 = 273°$ et $T_2 = 573$ la valeur du travail qu'on peut retirer en employant la c leur Q, c'est-à-dire celle de L_a donnée par l'équation (168), *plus grande qu'on puisse atteindre.*

Nous voyons ainsi que nous pourrions atteindre ce trav total (nous faisons abstraction des pertes d'air et de chale et des résistances passives), en faisant $T = T_2$ et $T_3 = T_1$, c'e à-dire lorsque les deux courbes *bc* et *ad* sont des courb isothermiques; il faudrait pour cela fournir de la chaleur s le trajet *bc*, en maintenant le gaz à la température constan maxima T_2, et en retirer sur le trajet *da*, en conservant la te pérature minima T_1. *Le cas exceptionnel où $m = n$ cond par conséquent au maximum* ABSOLU *du travail.*

Mais lorsque les courbes *bc* et *ad* suivent la loi $p^m v^n = \text{cons}$ ce qui a lieu pour les machines à air chaud construites ju qu'ici, le travail fourni par la machine est toujours moind que celui que donne l'équation (168). Le travail correspo dant à une température intermédiaire quelconque T est don par l'équation (145), et le travail maximum de cette machi est exprimé par l'équation (149).

En divisant chacune de ces formules par la formule (16 on trouve, pour le rendement η de la machine corresponda à une température intermédiaire T :

$$(169) \qquad \eta = \frac{T_2}{T}\frac{(T - T_1)}{(T_2 - T_1)},$$

et pour le rendement maximum :

$$(170) \qquad \eta_{max} = \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}}.$$

Ces formules s'appliquent à *toutes* les machines à feu, quell que soient les valeurs de *m, n,* λ relatives à la loi des courb *bc* et *ad* (le cas $m = n$ excepté).

En prenant toujours les limites extrêmes $T_2 = 573$

= 273, on trouve

$$\eta_{max} = 0,5910\,(^*);$$

ais avec cette valeur il faut prendre pour la température in-
rmédiaire, d'après l'équation (148),

$$T = T_3 = 395,51,$$

ı bien

$$t = 122^{\circ},51.$$

Si cette température intermédiaire était seulement $T = 333,96$
ı $t = 60,96$ (*voyez* p. 214), on aurait, d'après l'équation (169),
ur le rendement

$$\eta = 0,3486.$$

Le travail disponible est (168)

$$L_a = 0,5235\,\frac{Q}{A}.$$

Ces nombres montrent que les systèmes de machines à feu
nployés jusqu'ici peuvent déjà utiliser la chaleur d'une ma-
ère assez satisfaisante, mais il importe que tout le cycle
it disposé de manière que les températures intermédiaires T
ennent les valeurs qui permettent d'atteindre le rendement
aximum.

Nous pouvons encore conclure de ce qui précède que le
ul moyen d'augmenter le rendement de ces machines est de
ndre plus grande la différence entre les températures limites
et T_2; admettant par exemple que nous puissions prendre
ur la limite supérieure de la température $t_2 = 500^{\circ}$, au lieu

(*) M. Hirn a, le premier, déterminé le rendement maximum des machines
eu d'après des principes exacts (*Théorie mécanique de la chaleur*, p. 288); il
ait le calcul de ce rendement spécialement pour le système *Stirling* et pour
système *Éricsson*, et (par suite d'une erreur de calcul) il a trouvé des rende-
nts différents pour ces deux machines. Il n'a donc pu reconnaître que le
ıdement dépend *uniquement* des températures limites.

M. Cazin a déterminé un peu plus tard (*Théorie élémentaire des machines à
chaud*, Paris, Gauthier-Villars, 1865), par une méthode graphique, le ren-
ment maximum de différents systèmes de machines à feu. Cette voie, qui lu
ait faire un grand détour, n'a pu le conduire à notre loi.

Nos formules sont tellement simples, que nous les croyons préférables à la
thode de M. Cazin.

de 300°; en conservant pour la limite inférieure $T_1 = 273$, faudrait faire dans l'équation (170) $T_2 = 773$, et le rendemen maximum théorique serait alors

$$\eta_{max} = \frac{\sqrt{773}}{\sqrt{773} + \sqrt{273}} = 0,6272;$$

on obtiendrait dans ce cas une augmentation qui, il est vra serait relativement peu considérable.

Les rendements donnés ne sont encore que théoriques leurs valeurs réelles seraient beaucoup plus petites; car nou ne parviendrons jamais à réaliser exactement les cycles su lesquels sont basés nos calculs; jamais nous ne pourrons, e outre, faire disparaître les pertes d'air et de chaleur.

Les considérations précédentes pourraient nous faire con clure, que dans tous les cas les machines à feu utilisent moin bien le travail qui peut provenir de la chaleur, que les roue hydrauliques qui utilisent le travail disponible dans une chut d'eau. Mais cette conclusion ne serait pas juste; car il faut re marquer que, malgré toute la généralité de mes développe ments, lesquels s'appliquent à une machine thermique quel conque, les formules que j'ai obtenues et notamment la formul (170), qui fait apprécier le degré de *perfection* de la machine souffrent une certaine restriction. Les courbes *bc* et *ad* (*fig.* 32 du cycle d'une machine fermée étaient assujetties à la loi

$$p^m v^n = \text{const.},$$

équation dans laquelle m et n étaient des constantes arbi traires, le cas $m = n$ étant seul excepté. Dans ces circon stances, la variation de la température du gaz sur le trajet con sidéré est *directement proportionnelle* à la chaleur qui lui été fournie ou soustraite. Les résultats des calculs précédent sont vrais dans cette hypothèse, qui est vérifiée pour les ma chines à feu fermées proposées jusqu'ici.

Quand nous trouvons pour le rendement maximum d'un pareille machine, en prenant les températures limites géné ralement adoptées, le nombre 0,5910, qui paraît trop petit, i ne faut donc pas en rejeter la faute sur les machines à feu e général, mais bien sur les systèmes pour lesquels nous avon

it les calculs, c'est-à-dire sur les systèmes employés jusqu'à résent, et notamment sur le système Éricsson (ancienne achine). De pareilles machines sont à rejeter en principe; ur défaut vient de ce que les courbes *bc* et *ad* sont sou- ises à la loi $p^m v^n =$ const.

On ne peut arriver à perfectionner les machines à feu que l'on cesse de faire suivre aux changements de l'air, sur les ajets *bc* et *ad*, la loi $p^m v^n =$ const.; il ne faut donc pas que s changements aient lieu sous un volume constant (Stirling) ı sous une pression constante (Éricsson).

Mais à quelle loi faut-il alors soumettre les deux courbes *bc* *ad*? La réponse à cette question est déjà contenue dans ce ıi précède; car le cas exceptionnel où $m = n$ correspond écisément au seul système de machine à feu que l'on puisse commander. Dans notre cycle, nous devons donc choisir ıur *bc* et *ad* des lignes isothermiques; c'est-à-dire l'introduc- ɔn de la chaleur sur le trajet *bc* doit se faire à la température nstante (maxima) T_2, et sur le trajet *da* il faut retirer de la aleur à la température constante (minima) T_1. En effet, si ns l'équation (169) nous faisons $T = T_2$ et $T_1 = T_3$, nous rons pour le rendement maximum théorique

$$\eta = 1,$$

ıi est la limite supérieure que l'on puisse atteindre; une pa- ille machine utiliserait tout le travail disponible. On com- end qu'on ne peut construire une pareille machine pas plus 'on ne peut construire un moteur hydraulique qui utilise ute la force disponible de l'eau; mais on connaît au moins but vers lequel il faut tendre.

Disons, pour résumer, qu'*en principe les machines ther- iques dans lesquelles les deux courbes ab et cd du cycle ig. 32) sont des courbes adiabatiques et les courbes bc et ad s lignes isothermiques sont les seules bonnes* (*). *Toute*

---

*) On peut déjà remarquer ici que nos machines à vapeur sont, en réalité, machines à feu du système le plus avantageux; je reviendrai sur ce point ns les recherches sur les vapeurs. Nous y trouvons, en effet, le cycle que us avons reconnu comme le plus parfait.

courbe d'une autre nature donne déjà théoriquement un rendement moindre.

Prenons une machine à feu du système le plus parfait pour y appliquer les équations générales établies plus haut, en les mettant sous la forme qui convient à la pratique.

Le travail d'une telle machine pour un tour serait donné par l'équation (168), qui donne, lorsqu'on y introduit la quantité de chaleur qu'il faut soustraire au gaz dans le trajet *da*,

$$L_a = \frac{Q_1}{AT_1}(T_2 - T_1),$$

en remarquant qu'on a ici, d'après la relation (142'),

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q}{T_2}.$$

Désignons les volumes spécifiques correspondant aux quatre états limites *a*, *b*, *c*, *d* par v_1, v, v_2 et v_3; la quantité de chaleur Q_1 à soustraire dans le trajet *da* à la température constante T_1 et pendant la compression qui fait passer de v_3 à v_1, peut s'écrire, d'après l'équation (74), p. 121,

$$Q_1 = Ap_1 v_1 \log \text{nép} \frac{v_3}{v_1},$$

ou bien encore, avec la relation $RT_1 = p_1 v_1$,

$$Q_1 = ART_1 \log \text{nép} \frac{v_3}{v_1}.$$

En substituant cette valeur de Q_1, dans l'équation qui donne L_a, on obtient

$$L_a = R(T_2 - T_1) \log \text{nép} \frac{v_3}{v_1},$$

formule qui se rapporte à l'unité de poids de l'air. Si l'on a enfermé M kilogrammes dans la machine et si V_1, V, V_2 et V_3 désignent les volumes qui correspondent aux quatre états limites, on trouve, pour le travail de la machine par tour,

$$L_a = RM(T_2 - T_1) \log \text{nép} \frac{V_3}{V_1}.$$

Appelons encore p, p_1, p_2 et p_3 les pressions relatives aux uatre états limites a, b, c, d; les pressions maxima et minima endant le cycle seront alors p_3 et p, tandis que V_3 sera le lus grand et V le plus petit volume.

Le poids de l'air se détermine par la relation

$$M = \frac{V_3 p_3}{RT_1},$$

ont la substitution, dans l'équation précédente, donne

$$L_a = V_3 p_3 \frac{T_2 - T_1}{T_1} \log \text{nép} \frac{V_3}{V_1}.$$

Il convient de remplacer le rapport $\frac{V_3}{V_1}$ par le rapport des ressions maxima et minima. On sait que l'on a

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

t

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{V_3}{V_1};$$

n conclut de là

$$(71) \qquad \frac{V_3}{V_1} = \frac{p}{p_3}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}};$$

enfin par la substitution il vient

$$L_a = V_3 p_3 \frac{T_2 - T_1}{T_1} \log \text{nép} \frac{p}{p_3}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Lorsque la machine fait u tours par minute, pour une force e N chevaux, on a la relation

$$u L_a = 60 \times 75 N.$$

Remplaçons L_a par sa valeur tirée de cette relation, et supposons p et p_3 évalués en atmosphères; nous aurons finalement

$$(72) \qquad V_3 p_3 \frac{T_2 - T_1}{T_1} \log \text{nép} \frac{p}{p_3}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 0{,}43545 \frac{N}{u}.$$

En prenant encore ici pour les limites extrêmes de la tem-pérature $T_1 = 273$ et $T_2 = 573$, on a

$$V_3 p_3 \log \text{nép} \frac{p}{12,8037\, p_3} = 0,39626 \frac{N}{u}.$$

Mettons à la place du logarithme népérien le logarithme vulgaire; nous aurons

$$V_3 p_3 \log \frac{p}{12,8037\, p_3} = 0,172093 \frac{N}{u}.$$

C'est au moyen de cette formule que l'on peut reconnaît les propriétés générales d'une machine thermique parfaite.

Le volume V_3 que le gaz occupe au moment de la pl grande dilatation et qui sert à déterminer les dimensions la machine est d'autant plus petit, que la force de la machi est plus petite, que le nombre u de tours est plus grand, que la pression minimum p_3 est plus grande; ce volume dépend encore, ce qui est particulier à ce système, de la pl grande valeur que la pression p atteint dans l'opération. L quation précédente ne donne une valeur réelle pour V_3 q si l'on a

$$(173) \qquad p > 12,8037 . p_3,$$

et la différence entre des valeurs de p et p_3 doit être au grande que possible. Cette condition conduira en généra des pressions très-fortes.

Prenons par exemple $p_3 = 1$ et $p = 20$ atmosphères; no aurons alors

$$V_3 = 0,88847 \frac{N}{u}.$$

(*Voyez* les exemples des pages 212 et 213.)

La machine prendrait donc pour de grandes forces des mensions encore colossales, malgré la compression de 20 mosphères; le volume d'air correspondant à cette pression d'après l'équation (167),

$$V_1 = 0,64018 V_3.$$

On voit, d'après cela, que les proportions exigées pour

machine à air chaud parfaite ne sont pas très-favorables à l'exécution pratique.

La condition principale (173) ne peut évidemment se réaliser que si p_3 est beaucoup inférieur à la pression atmosphérique, et on doit porter la compression jusqu'à une pression p qui doit être aussi forte que possible, plus forte que celle que l'on a eue dans les machines construites jusqu'à présent.

Les différences de pressions deviennent ici très-considérables, parce qu'on porte la température de l'air sur le trajet ab (*fig.* 32) de o à 300 degrés, au moyen de la compression seulement; dans la pratique on peut à peine réaliser un pareil résultat.

On ne doit pas néanmoins affirmer que les machines à air chaud n'ont pas d'avenir; il est possible que certaines dispositions nouvelles permettent de satisfaire à peu près aux conditions que nous avons établies, surtout pour de petites forces.

Les propositions établies ci-dessus ne font qu'indiquer d'une manière générale les conditions que doit remplir une machine thermique parfaite, et comment se comportent les systèmes adoptés jusqu'ici.

Étudions encore de plus près la signification de la formule générale qui donne le travail disponible [équation (168)] : formule dont nous nous servirons encore dans l'étude des machines à vapeur.

On a, comme on sait,

(174) $$L_a = \frac{Q}{AT_2}(T_2 - T_1)$$

et

(175) $$\frac{Q}{AT_2} = \frac{Q_1}{AT_1}.$$

Les deux courbes bc et ad (*fig.* 32) doivent être des lignes isothermiques, et les courbes ab et cd des courbes adiabatiques. On peut attribuer dans ce cas à l'équation (174) une signification particulière. Revenons à l'interprétation qui a été donnée de cette équation dans la première Section, p. 65 et suivantes, en traitant la question sous une forme qui soit fa-

milière aux praticiens, parce que nous avons surtout en vue l'étude des machines à air et à vapeur.

Supposons que l'eau qui arrive pendant une seconde à une machine hydraulique pèse G kilogrammes; désignons par h_2 et h_1 les hauteurs des niveaux supérieur et inférieur au-dessus du niveau de la mer. La hauteur de chute disponible est alors $h_2 - h_1$, et le travail, qui est à notre disposition avec un tel cours d'eau, sera par seconde

$$L_a = G(h_2 - h_1).$$

Si on pouvait utiliser toute la hauteur h_2 du niveau supérieur au-dessus du niveau de la mer, on aurait, pour le travail W gagné par seconde,

$$W = G h_2;$$

mais tout ce travail n'est pas à notre disposition, il faut restituer l'eau qui est descendue en travaillant de la hauteur h_2 au niveau h_1; le travail W_1 qui reste dans l'eau a donc pour valeur

$$W_1 = G h_1.$$

Les deux dernières égalités donnent

$$G = \frac{W}{h_2} = \frac{W_1}{h_1}, \tag{176}$$

d'où nous tirons, pour le travail La,

$$L_a = \frac{W}{h_2}(h_2 - h_1). \tag{177}$$

Mais les équations (176) et (177) affectent la même forme que les équations (175) et (174); les températures absolues T_2 et T_1 jouent dans ces dernières le même rôle que les hauteurs h_2 et h_1 dans les premières; le zéro absolu y remplace le niveau de la mer, et les rapports égaux $\frac{Q}{AT_2}$ et $\frac{Q_1}{AT_1}$ peuvent représenter des poids thermiques; le premier, celui de la quantité de chaleur Q à la température T_2, le second, celui de l

quantité de chaleur Q_1 à la température T_1. Une certaine quantité de chaleur à une température déterminée peut donc être considérée comme une masse liquide que nous faisons descendre en la faisant travailler d'une certaine hauteur $T_2 - T_1$; *l'introduction de la chaleur à une température constante ressemble à l'arrivée d'une masse liquide à un niveau déterminé, et la soustraction de la chaleur à une température constante inférieure à la première équivaut à la suppression de cette masse à un niveau inférieur.*

On voit clairement par là l'erreur que l'on commettrait si, dans les machines à air ou à vapeur, on exprimait en travail la quantité de chaleur Q introduite dans l'unité de temps, et si on prenait ce travail $\frac{Q}{A}$ pour le travail disponible; c'est comme si l'on prenait pour le travail disponible d'une roue hydraulique, la quantité

$$W = Gh,$$

au lieu de calculer ce travail au moyen de l'équation (177).

Le propriétaire d'une machine à air chaud ou à vapeur se trouve donc dans la même situation que le propriétaire d'une machine hydraulique; ils ne peuvent fournir à leurs machines, pour être utilisé, qu'un certain poids thermique, ou un certain poids d'eau avec une hauteur de chute rigoureusement déterminée, $T_2 - T_1$ ou $h_2 - h_1$. Nous avons indiqué pour le maximum de la hauteur de chute des températures $T_2 - T_1 = 300°$; il est bien moins élevé pour les machines à vapeur, comme nous le verrons plus loin. Lorsque l'introduction et la soustraction de la chaleur ne se font pas à des températures constantes, nous nous trouvons dans le cas d'une machine hydraulique à biefs variables; nous n'utilisons pas alors toute la hauteur de chute du niveau le plus élevé au niveau le plus bas, mais nous pouvons considérer comme disponible une hauteur de chute moyenne. Les choses se passent d'une manière analogue pour le cycle d'une machine thermique.

Lorsque l'introduction de la chaleur dans le passage d'un corps d'une courbe adiabatique à une autre se fait à une tem-

pérature variable, la valeur du poids thermique total sera, d'après ce que nous savons,

$$(179) \qquad P = \int \frac{dQ}{AT}.$$

En admettant que la même quantité de chaleur Q soit introduite à une température constante T_y, entre les mêmes courbes adiabatiques, on arrive à la relation

$$(180) \qquad P = \frac{Q}{AT_y};$$

et pour le retour à l'état initial à une température constante T_x, avec soustraction de la quantité de chaleur Q_1, la relation sera

$$(181) \qquad P = \frac{Q_1}{AT_x}.$$

Le travail gagné sera alors

$$L = \frac{Q - Q_1}{A},$$

ou bien, en vertu des équations (180) et (181),

$$(182) \qquad L = \frac{Q}{AT_y}(T_y - T_x) = P(T_y - T_x).$$

Cette équation fait voir qu'on peut ramener un cycle quelconque au cas normal où la surface qui mesure le travail est limitée par deux courbes isothermiques et par deux courbes adiabatiques; en d'autres termes, on peut expliquer toute espèce de cycle par la descente d'un point thermique P d'une certaine hauteur $T_y - T_x$.

Le même cas se présente dans la construction d'un moteur hydraulique. Lorsque la section du canal d'amont diffère de celle du canal d'aval, il faut faire un calcul tout à fait analogue au précédent pour la détermination exacte du travail disponible; car il ne suffit pas de faire simplement le produit du poids de l'eau qui arrive par seconde par la différence de hauteur des deux biefs, en admettant que nous ne puissions utiliser que la véritable hauteur de chute.

Appliquons à un exemple la réduction d'un cycle quelconque au cas normal à l'aide des formules précédentes.

Conservons les notations de la *fig.* 32, p. 223, et supposons que les deux courbes *bc* et *ad* obéissent à la loi $p^m v^n = \text{const.}$ (le cas $m = n$ est excepté).

Nous avons

$$dQ = \lambda dT;$$

le poids thermique sera, d'après l'équation (179),

$$P = \frac{\lambda}{A} \log\text{nép} \frac{T_2}{T}$$

et

$$Q = \lambda (T_2 - T).$$

En vertu de l'équation (180), on a alors

$$T_y = \frac{T_2 - T}{\log\text{nép}\, T_2 - \log\text{nép}\, T};$$

mais si l'on tient compte de l'équation (142'), l'équation (181) donne

$$T_x = \frac{T_1}{T} \frac{Q}{AP}.$$

Si nous substituons dans cette dernière équation les valeurs de Q et de P écrites ci-dessus, il vient

$$T_x = \frac{T_1}{T} \frac{T_2 - T}{\log\text{nép}\, T_2 - \log\text{nép}\, T}.$$

Le cycle considéré est donc ramené ainsi au cas normal; le travail que l'on gagnerait serait le même que si la chaleur était introduite à la température constante T_y et que si la chaleur était soustraite à la température constante T_x.

La hauteur de chute des températures est pour ce cycle

$$T_y - T_x = \frac{(T_2 - T)(T - T_1)}{T . \log\text{nép} \frac{T_2}{T}}.$$

En substituant cette valeur et celle de P dans l'équation (182), on obtient pour le travail gagné une formule qui est identique à l'équation (146), donnée déjà pour le même cas.

TROISIÈME SECTION.

DES VAPEURS.

Remarques préliminaires.

On appelle *vapeur* une espèce de gaz qu'on obtient ordinairement quand on chauffe un liquide, et qui redevient liquide quand on le refroidit. Tant que les vapeurs sont en contact avec leurs liquides générateurs, elles se comportent autrement que les gaz permanents. Les vapeurs séparées de leurs liquides peuvent seules prendre, à l'aide de la chaleur, de la compression, etc., un état semblable à celui d'un gaz permanent. Le moindre refroidissement donne lieu, pour les vapeurs mêlées d'un excès de liquide, à une condensation partielle, tandis que les vapeurs qui sont sans excès liquide peuvent, dans certaines circonstances, subir une perte de chaleur relativement considérable sans être condensées, même partiellement. Les vapeurs de la première espèce sont appelées *vapeurs saturées,* les autres sont nommées *vapeurs non saturées* ou *surchauffées.*

Une vapeur qui est en présence du moindre excès liquide est *toujours saturée* et se trouve à son point de condensation; on peut néanmoins concevoir une vapeur saturée sans excès liquide, en admettant que, dans la formation de cette vapeur, le dernier élément liquide se soit transformé en vapeur. Une vapeur surchauffée, au contraire, ne peut subsister en contact avec son liquide.

Lorsqu'on enferme dans un réservoir l'unité de poids du mélange d'un liquide et de sa vapeur, la pression spécifique p dépend de la température t, mais non du volume spécifique du mélange; car si l'on augmente ou si l'on diminue la capa-

cité du réservoir en introduisant ou soustrayant de la chaleur, jusqu'à ce que la température initiale soit rétablie, on retrouve aussi la même pression p, pourvu qu'il reste à la fin un excès liquide, c'est-à-dire que la vapeur soit encore saturée.

Lorsqu'on élève ou qu'on abaisse la température t du mélange de liquide et de vapeur, la tension ou pression p augmente ou diminue; la pression reste constante lorsque, comme tout à l'heure, on maintient la température constante, tandis que le volume change; mais si le volume augmente, il y a nécessairement évaporation d'une partie du liquide, tandis que si le volume diminue, une partie de la vapeur se condense.

On conclut de là que la pression p d'une vapeur saturée dépend *uniquement* de la température t, et ne varie pas avec le volume du mélange de liquide et de vapeur; en d'autres termes, que cette pression est indépendante de la proportion des deux éléments du mélange. Nous indiquerons cette proportion par le poids de la vapeur contenue dans l'unité de poids du mélange. Ce poids sera désigné par x et sera appelé la *quantité spécifique de vapeur;* le poids du liquide sera alors évidemment $1 - x$ kilogrammes.

Augmentons le volume du mélange en maintenant la température t constante, à l'aide d'une introduction convenable de chaleur; nous transformerons constamment en vapeur de nouvelles parties liquides, et il arrivera un moment où le dernier élément liquide se vaporisera : à cet instant, la quantité spécifique de vapeur $x = 1$. On aura eu jusqu'alors une pression constante et une vapeur saturée.

Continuons à augmenter le volume, et à introduire la chaleur de manière que la température t reste toujours constante; la vapeur se comportera tout autrement : la pression diminuera à mesure que le volume augmente, et elle ne paraîtra plus fonction de la température seule, elle dépendra en outre du volume spécifique v. Cette vapeur est alors une vapeur surchauffée qui s'éloigne de plus en plus de son point de condensation, et nous pouvons admettre, avec une grande vraisemblance, que ses propriétés finissent par être celles d'un gaz permanent.

Renversons l'expérience. Comprimons la vapeur surchauffée en maintenant la température constante à l'aide d'une soustraction convenable de chaleur; la pression augmentera alors pendant que le volume diminue, jusqu'au moment où la vapeur sera saturée. A partir de cet instant la pression p restera constante, et la compression de la vapeur saturée sera accompagnée continuellement d'une liquéfaction de la vapeur; enfin, quand toute la vapeur sera transformée en liquide, la diminution de volume exigera une augmentation de pression très-considérable, et ne sera même possible que jusqu'à une certaine limite.

On reconnaît donc qu'à une température donnée on ne peut pas augmenter la pression d'une vapeur saturée au delà d'une certaine limite, et qu'à partir de cette limite la compression ne produit plus que la liquéfaction. On dit qu'une vapeur se trouve à sa tension maxima quand elle est saturée, et il n'existe pas de vapeur du même liquide possédant à la même température une pression supérieure. Une vapeur surchauffée, au contraire, a toujours à la même température une pression inférieure à celle de la vapeur saturée, et aussi une température plus élevée sous la même pression : de là vient la dénomination de vapeur *surchauffée.*

Imaginons une vapeur saturée qui ne soit pas mélangée de liquide et dont la température soit t; son volume spécifique v et son poids spécifique γ auront des valeurs déterminées, et pourront, de même que la pression p, être considérés comme des fonctions de la température seule. On voit encore que γ atteint une valeur maxima et v une valeur minima, lorsque la vapeur passe de l'état de surchauffe à l'état de saturation.

Nous avons dit plus haut qu'une vapeur surchauffée se rapproche d'autant plus d'un gaz permanent qu'elle s'éloigne davantage de son point de condensation. Le moment à partir duquel on peut admettre au moins approximativement l'identité d'une vapeur surchauffée et d'un gaz permanent, et par conséquent les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, n'a pu être fixé encore d'une manière suffisamment certaine; on sait seulement que cette identité ne commence pas au point de con-

densation, comme le disaient jusqu'à présent la plupart
Traités de Physique. Ce fait a été démontré pour la premi
fois par M. Clausius dans la théorie mécanique de la chale
nous y reviendrons dans la suite.

Nous avons fait remarquer, p. 98, que l'on ne peut s
mettre au calcul, avec quelque certitude, que les deux é
limites des vapeurs, c'est-à-dire l'état de saturation et c
dans lequel la vapeur peut être considérée comme un
permanent. Ces deux états sont relativement très-éloig
l'un de l'autre, et le passage ne se fait pas d'une mani
brusque. Tous les développements donnés dans la deuxiè
Section s'appliquent au second de ces deux états; nous
connaissons pas malheureusement les constantes les p
importantes pour l'application de nos formules aux vape
très-surchauffées.

Nous examinerons d'abord attentivement les propriétés
vapeurs saturées, puis nous chercherons, autant que nos c
naissances nous le permettent, comment les vapeurs pas
de l'un à l'autre des états limites.

CHAPITRE PREMIER.

DES VAPEURS SATURÉES.

I. — *De la force élastique des vapeurs saturées.*

La force élastique ou pression p des vapeurs saturées est, comme nous l'avons dit plus haut, indépendante du volume et de la proportion du liquide mêlé à la vapeur, et elle doit être considérée comme une fonction de la température seule. Jusqu'à présent, on n'a pas pu déterminer par la théorie la forme de cette fonction $p = F(t)$ pour les différentes vapeurs; la relation qui existe entre p et t a été donnée par la voie expérimentale, et sa connaissance est due surtout aux célèbres expériences de M. Regnault. Les expériences de M. Magnus, qui ont été faites également avec un très-grand soin, ont confirmé les résultats que M. Regnault a obtenus pour la vapeur d'eau.

Les expériences de M. Regnault (*) comprennent un très-grand nombre de vapeurs; mais nous ne signalerons ici que celles qui sont relatives aux vapeurs employées dans la pratique (dans les machines à vapeur) ou qui seront employées probablement dans la suite. M. Regnault a encore étudié ces dernières sous d'autres points de vue, et il a obtenu des résultats dont on se sert pour appliquer à ces vapeurs la théorie mécanique de la chaleur.

Les vapeurs qui, d'après les expériences de M. Regnault, comportent de pareilles recherches, et dont les propriétés sont indiquées par les Tables qui se trouvent à la fin de cet

(*) Regnault, *Relations des expériences, etc.*

Ouvrage sont : les vapeurs saturées d'*eau* (Tables I), d'*éthe*
(Tables II), d'*alcool* (Tables III), d'*acétone* (Tables IV), d
chloroforme (Tables V), de *chlorure de carbone* (Tables VI
de *sulfure de carbone* (Tables VII).

Pour les autres vapeurs il y a certaines quantités qui marquent, comme nous le verrons plus tard; nous avons pris le vapeurs de mercure et d'acide carbonique (Tables VIII et IX à cause de leurs propriétés remarquables. La Table X e relative à la vapeur d'eau comme les Tables I; elle se distingu de cette dernière en ce qu'elle a été disposée particulièreme pour les applications techniques.

Les premières Tables I à VII et les Tables VIII et IX so disposées de la même manière : la colonne 1 donne la temp rature t en degrés centigrades du thermomètre à air; la c lonne 2 donne la température absolue déterminée à l'aide de formule $T = a + t = 273 + t$, de 5 en 5 degrés pour la vape d'eau, et de 10 en 10 degrés pour les autres vapeurs; la c lonne 3 donne, d'après M. Regnault, la pression p de la vape saturée mesurée en millimètres de mercure. Pour connaît la pression *spécifique* (la pression par mètre carré exprim en kilogrammes), on n'a qu'à multiplier les nombres de cet colonne par $\frac{10334}{760}$; en divisant ces mêmes nombres par 76 on obtient la pression en atmosphères. Les pressions de vapeur n'ont pas été obtenues par des observations directe on les a calculées au moyen d'une formule empirique. M. R gnault a en effet représenté graphiquement les résultats ses expériences (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XX en prenant les températures t pour abscisses, et les pressio observées pour ordonnées d'une courbe qu'on trace en jo gnant par un trait continu les points ainsi déterminés; obtient, à l'aide de cette courbe, une pression non observ qui correspond à une valeur quelconque de la températur La loi rigoureuse de cette courbe n'est pas encore connu mais on a indiqué un grand nombre de formules empiriqu (*voyez* les *Annales de Poggendorff*, t. XVIII; *Repertoriu*

Dove, t. I) qui reproduisent cette courbe plus ou moins exactement pour les différentes vapeurs.

Nous indiquerons seulement la formule que M. Regnault a choisie, à l'exemple de Biot, pour représenter ses expériences, et dont nous nous sommes servis aussi pour calculer les nombres de la colonne 3. Cette formule, applicable à toutes les vapeurs saturées, est

(183) $$\log p = a + b\alpha^{\tau} + c\beta^{\tau},$$

dans laquelle $\tau = t - t_0$.

Les quantités a, b, c, α et β sont des constantes qui doivent être déterminées pour chaque vapeur, à l'aide de cinq expériences; leurs valeurs sont rassemblées en tableau dans le Mémoire de M. Regnault (*Relation des expériences*, t. II, p. 651). On a pris les logarithmes ordinaires, et la pression est mesurée en millimètres de mercure; t est la température en degrés centigrades; t_0 est une quantité choisie arbitrairement par M. Regnault : c'est la température de celle des cinq expériences qui correspond à *la plus petite* pression.

La détermination des cinq constantes de l'équation (183) ne peut se faire par le calcul, que si l'on choisit les cinq valeurs de p, qui sont nécessaires, avec des intervalles égaux de température; M. Regnault pouvait facilement remplir cette condition à l'aide de sa représentation graphique.

Admettons que dans une série d'expériences t_0 soit la température de l'expérience qui correspond à la plus petite *pression*, et t_1 la température de l'expérience suivante; on a alors, avec des intervalles égaux de température,

$$\tau = n(t_1 - t_0),$$

formule dans laquelle il faut faire $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$; la substitution dans l'équation (183) donne alors

$$\log p = a + b\alpha^{n(t_1 - t_0)} + c\beta^{n(t_1 - t_0)},$$

ou, si nous posons pour un moment

(184) $$\alpha_1 = \alpha^{t_1 - t_0} \quad \text{et} \quad \beta_1 = \beta^{t_1 - t_0},$$

(185) $$\log p = a + b\alpha_1^n + c\beta_1^n.$$

Posons encore, pour abréger, $\log p = y$, et distinguons les cinq expériences par les lettres

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4;$$

en faisant successivement $n = 0, 1, 2, 3, 4$, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} y_0 &= a + b + c,\\ y_1 &= a + b\alpha_1 + c\beta_1,\\ y_2 &= a + b\alpha_1^2 + c\beta_1^2,\\ y_3 &= a + b\alpha_1^3 + c\beta_1^3,\\ y_4 &= a + b\alpha_1^4 + c\beta_1^4. \end{aligned}$$

Posons encore :

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= \delta y_0,\\ y_2 - y_1 &= \delta y_1,\\ y_3 - y_2 &= \delta y_2,\\ y_4 - y_3 &= \delta y_3. \end{aligned}$$

En combinant convenablement les formules précédentes, on obtient les deux équations suivantes, qui déterminent les constantes α_1 et β_1 :

$$\alpha_1 + \beta_1 = \frac{\delta y_1\, \delta y_2 - \delta y_0\, \delta y_3}{(\delta y_1)^2 - \delta y_0\, \delta y_2},$$

$$\alpha_1 \beta_1 = \frac{(\delta y_2)^2 - \delta y_1\, \delta y_3}{(\delta y_1)^2 - \delta y_0\, \delta y_2},$$

par suite

$$b = \frac{\beta_1\, \delta y_0 - \delta y_1}{(\alpha_1 - 1)(\beta_1 - \alpha_1)},$$

$$c = \frac{\delta y_1 - \alpha_1\, \delta y_0}{(\beta_1 - 1)(\beta_1 - \alpha_1)},$$

$$a = y_0 - b - c;$$

et enfin, en vertu des équations (184),

$$\log \alpha = \frac{1}{t_1 - t_0} \log \alpha_1 \quad \text{et} \quad \log \beta = \frac{1}{t_1 - t_0} \log \beta_1.$$

Valeurs servant au calcul de la formule

$$\log p = a + b\alpha^{\tau} + c\beta^{\tau}.$$

VAPEUR SATURÉE.	VALEURS de a.	SIGNES de $b\alpha^{\tau}$.	SIGNES de $c\beta^{\tau}$.	VALEURS de $\log(b\alpha^{\tau})$.	VALEURS de $\log(c\beta^{\tau})$.
Eau (*) 0 à 100°.	4,7393707	—	+	+ 0,6117408 — 0,003274463 t (**)	— 1,8680093 + 0,006864937 t
Eau (*) 100 à 200°.	6,2640348	—	—	+ 0,6593123 — 0,001656138 t	+ 0,0207601 — 0,005950708 t
Éther..............	5,0286298	—	+	+ 0,4414317 — 0,0031223 t	— 3,3497030 + 0,0145775 t
Alcool..............	5,4562028	—	+	+ 0,6390301 — 0,0029143 t	— 2,4949325 — 0,0590515 t
Acétone (***)........	5,3085419	—	—	+ 0,5312766 — 0,0026148 t	— 0,9645222 — 0,0215592 t
Chloroforme.........	5,2253893	—	—	+ 0,5219943 — 0,0025856 t	— 0,9111383 — 0,0131824 t
Chlorure de carbone...	12,0962331	—	—	+ 0,9550683 — 0,0002880 t	+ 0,1934744 — 0,0050220 t
Sulfure de carbone....	5,4011662	—	—	+ 0,4918860 — 0,0022372 t	— 0,7200368 — 0,0088003 t
Mercure.............	5,6640459	—	+	+ 0,8890208 — 0,0012438 t	— 0,4179605 — 0,0119062 t
Acide carbonique.....	5,6771989	—	+	+ 0,2175359 — 0,0052911 t	— 0,3948491 — 0,0089594 t

(*) M. Moritz (*Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XIII, p. 43) a calculé de nouveau les constantes de l'eau, de 0 à 100 degrés, parce qu'il s'est glissé une erreur dans les calculs faits par M. Regnault.

(**) t est la température en degrés centigrades.

(***) J'ai déterminé de nouveau les valenrs des constantes de l'acétone, parce que celles qu'a données M. Regnault (*Relations, etc.*, t. II, p. 474) sont inexactes.

M. Regnault a suivi la marche (*) que nous venons d'ind
quer pour déterminer les constantes qui figurent dans s
formules. Je n'ai pas reproduit ici les valeurs de toutes c
constantes; j'ai préféré, pour plus de commodité, indiqu
dans le tableau qui précède, à côté des valeurs de a relativ
aux différentes vapeurs, les valeurs des expressions log(b
et $\log(c\beta^{\tau})$ en fonction de la température t; pour cela il f
lait inscrire à part les signes des deux derniers termes
l'équation (183).

Les nombres de la colonne 3 des Tables I à IX qui se tro
vent à la fin de cet Ouvrage peuvent se vérifier facilement(
à l'aide des valeurs inscrites dans le tableau précédent (p. 24
ces valeurs peuvent aussi servir à trouver la pression p c
respondant à une température quelconque. Comme ces T
bles ne sont pas très-commodes quand on veut compa
entre elles les différentes vapeurs, je donne ici, dans un
bleau particulier, les températures des différentes vape
pour des pressions variant de 1 à 10 atmosphères. Ne pouv
résoudre directement l'équation (183), par rapport à t, o
calculé par interpolation les nombres de ce tableau.

Ce tableau est surtout commode pour les applications
permet en même temps d'apprécier facilement les proprié
des diverses vapeurs. La vapeur de mercure se distingue d'u

(*) J'ai cru devoir indiquer les formules qui servent à calculer les
constantes, parce que, dans le travail de M. Regnault (*Mémoires de l'Acadé*
t. XXI, p. 596), il y a des fautes d'impression dans les formules qui don
$\alpha_1 + \beta_1$ et $\alpha_1 \beta_1$. M. Moritz les a signalées dans le *Bulletin de l'Académi*
Saint-Pétersbourg, t. XIII, p. 43. M. Regnault en parle, du reste, lui-m
dans le second volume des *Relations, etc.*

(**) Les pressions relatives aux diverses températures t, que nous avon
scrites dans les Tables, sont celles de M. Regnault, à l'exception de celle
l'eau (0 à 100 degrés) et de l'acétone (*voyez* plus haut). En vérifiant le
bleaux de M. Regnault, on a constaté encore que les nombres qui y sont ins
pour la vapeur saturée de l'éther (*Relations, etc*, t. II, p. 392) ne coïnci
pas rigoureusement avec celles qu'on déduit de sa formule. Les constante
cette formule, pour l'éther, sont exactes; la faute doit donc avoir été faite
le calcul du tableau, p. 392; mais les différences étant extrêmement pet
je n'ai pas jugé nécessaire de calculer un tableau nouveau.

manière particulière; cette vapeur et celle de l'acide carbonique sont en quelque sorte les limites entre lesquelles sont comprises toutes les autres. La température de la vapeur de mercure saturée est, sous la même pression, beaucoup plus élevée que celle des autres; tandis qu'au contraire, la vapeur d'acide carbonique possède aux basses températures des pressions déjà tellement considérables, qu'on n'a pas pu la comprendre dans le tableau.

PRESSION en atmosphères.	TEMPÉRATURE DE LA VAPEUR SATURÉE.							
	1 EAU	2 ÉTHER.	3 ALCOOL.	4 ACÉTONE.	5 CHLOROFORME.	6 CHLORURE de CARBONE.	7 SULFURE de CARBONE.	8 MERCURE.
1	100,00	34,956	78,299	56,319	60,180	76,521	46,254	357,347
2	120,60	55,866	96,823	78,029	82,587	101,371	69,251	397,317
3	133,91	69,607	108,832	92,303	97,550	117,906	84,456	423,010
4	144,00	80,211	117,980	103,262	109,041	130,502	96,174	442,469
5	152,22	88,961	125,485	112,301	118,563	141,178	105,863	458,328
6	159,22	96,473	131,910	120,077	126,784	150,188	114,209	471,851
7	165,34	103,085	137,567	126,951	134,082	158,123	121,593	483,709
8	170,81	109,005	142,647	133,146	140,664	"	128,252	494,316
9	175,77	114,369	147,276	138,811	146,706	"	134,342	505,152
10	180,31	119,389	151,543	144,049	152,343	"	139,972	513,907

D'après la Table IX, la pression de la vapeur d'acide carbonique saturée est déjà à o degré de 26906^{mm},60 de mercure, ou 35^{at},403; et, à 45 degrés, elle est de 76314^{mm},60 ou 100^{at},414. On a cité ici cette vapeur à cause de l'importance de ces écarts; si jamais on parvient à découvrir la loi de la formation des vapeurs et leur nature intime, ce sont précisément les Tables VIII et IX qui pourraient rendre de grands services pour la vérification des résultats théoriques.

En général, je pense que les Tables de l'Appendice pourront être, dans certaines circonstances, bien plus utiles qu'on ne le croirait au premier abord, et c'est pour cela qu'après la publication du second volume des *Relations des expériences*,

par M. Regnault, je me suis résigné au calcul pénible et lon
de ces tableaux; la seule comparaison des valeurs semblabl
qui correspondent à des vapeurs différentes pourrait déjà co
duire à des relations nouvelles, et à la découverte d'une loi
laquelle toutes les vapeurs seraient soumises.

D'ailleurs deux voies seulement peuvent conduire à la d
couverte d'une pareille loi : ce sera, ou bien la connaissan
de la constitution intime des liquides et des vapeurs, ou bi
la comparaison minutieuse des résultats obtenus pour les d
verses vapeurs, d'un côté, au moyen d'expériences, d'un aut
côté, au moyen de calculs; une pareille comparaison n'est po
sible qu'à l'aide de tableaux analogues à ceux que j'ai dressé

La vapeur d'eau est la plus importante de toutes les v
peurs à cause des nombreuses applications qu'on en fait da
la pratique; c'est pour cela qu'on a ajouté encore la Table
qui donne toutes les quantités qui servent dans l'étude d
machines à vapeur. La première colonne donne, en atm
sphères, la pression de la vapeur par dixième d'atmosphè
depuis 1 dixième jusqu'à 7 atmosphères, et par quart d'atm
sphère, depuis 7 jusqu'à 14. La seconde colonne conti
aussi la pression exprimée en millimètres de mercure, et
colonne 3 la donne en kilogrammes par mètre carré (pressi
spécifique). La colonne 4 contient la température corresp
dante de la vapeur trouvée par interpolation au moyen
expériences de M. Regnault, comme l'ont été les valeurs
dernier tableau, p. 247. Nous nous servirons fréquemm
dans la suite de ce dernier tableau, ainsi que de la Table
parce qu'il est commode et usité de supposer connus plu
les changements de pression que les changements de tem
rature, quand on étudie les mélanges de vapeur et de
quide.

L'application de la théorie mécanique de la chaleur
propriétés des vapeurs exige, non-seulement la conna
sance de la relation entre la pression p et la températur
mais encore celle du coefficient différentiel $\frac{dp}{dt}$, qui fig
dans les principales formules, et qui se trouve lié à la tem

rature. Cette dernière relation se déduit sans difficulté de la formule de M. Regnault.

En multipliant les deux membres de l'équation

$$\log p = a + b\alpha^\tau + c\beta^\tau$$

par le logarithme népérien de 10, qui est $2,302585093 = k$, on trouve

$$\log \text{nép}\, p = ka + kb\alpha^\tau + kc\beta^\tau.$$

Différentions cette équation et remarquons que $\tau = t - t_0$, t_0 étant une quantité constante; nous aurons alors

$$\frac{dp}{p\,dt} = kb \log \text{nép}\, \alpha . \alpha^\tau + kc \log \text{nép}\, \beta . \beta^\tau,$$

ou, si nous prenons les logarithmes vulgaires,

$$\frac{dp}{p\,dt} = (k^2 b \log \alpha)\,\alpha^\tau + (k^2 c \log \beta)\,\beta^\tau.$$

Comme on connaît, d'après ce qui précède, les constantes b, c, α et β pour les différentes vapeurs, on peut calculer les deux coefficients de α^τ et de β^τ; désignons-les par m et n, c'est-à-dire posons

(186) $$m = k^2 b \log \alpha \quad \text{et} \quad n = k^2 c \log \beta;$$

on a alors

(187) $$\frac{dp}{p\,dt} = m\alpha^\tau + n\beta^\tau.$$

J'ai donné dans le tableau suivant, pour faciliter les calculs, les valeurs de $\log(m\alpha^\tau)$ et de $\log(n\beta^\tau)$ en fonction de t, au lieu des valeurs de m et de n : ce qui m'a forcé d'indiquer, à l'aide de deux colonnes, les signes des deux termes du second membre de l'équation (187).

Au moyen de ce tableau on a calculé les valeurs $\frac{dp}{p\,dt}$ contenues dans la colonne 5 des Tables, depuis I jusqu'à IX. On a mis ces valeurs dans les Tables parce qu'elles jouent

un grand rôle, comme on le verra plus tard; si on les multiplie par les valeurs correspondantes de p, on trouve les coefficients différentiels $\frac{dp}{dt}$ relatifs aux différentes températures. Les valeurs de $\frac{dp}{dt}$ figurent dans la colonne 4, et elles sont exprimées en millimètres de mercure; pour s'en servir dans les formules qui suivent, il faut les exprimer en kilogrammes par mètre carré : pour cela on multiplie les valeurs inscrites dans les tableaux par $\frac{10334}{760}$.

Expliquons sur un exemple l'usage des deux tableaux (p. 245 et 251).

Cherchons la pression de la vapeur saturée d'acétone correspondant à la température $t = 100°$; on a, d'après le tableau de la page 245 :

$$\log(b\alpha^\tau) = +0{,}5312766 - 0{,}0026148\,t = 0{,}2697966,$$
$$\log(c\beta^\tau) = -0{,}9645222 - 0{,}0215592\,t = -3{,}1204422$$
$$= 0{,}8795578 - 4;$$

d'où l'on tire

$$b\alpha^\tau = 1{,}8612155,$$
$$c\beta^\tau = 0{,}0007578.$$

Comme, d'ailleurs, $a = 5{,}3085419$, on obtient, en tenant compte des signes de $b\alpha^\tau$ et $c\beta^\tau$, d'après l'équation (183),

$$\log p = 3{,}4465686,$$

et

$$p = 2796^{mm}{,}20,$$

ce qu'indique la première Table IV.

Déterminons encore pour la même vapeur le quotient différentiel $\frac{dp}{dt}$ pour une pression de 5 atmosphères; le tableau de la page 247 donne alors $t = 112°{,}301$, et, d'après le tableau

Valeurs servant au calcul de la formule

$$\frac{dp}{p\,dt} = m\alpha^{\tau} + n\beta^{\tau}.$$

VAPEUR SATURÉE.	SIGNES de $m\alpha^{\tau}$.	SIGNES de $n\beta^{\tau}$.	VALEURS de $\log(m\alpha^{\tau})$.	VALEURS de $\log(n\beta^{\tau})$.
Eau, 0 à 100°	+	+	— 1,1486877 — 0,003274463 t (*)	— 3,3069414 + 0,006864937 t
Eau, 100 à 200°	+	+	— 1,3971597 — 0,001656138 t	— 1,4802398 — 0,005950708 t
Éther	+	+	— 1,3396624 — 0,0031223 t	— 4,4616396 + 0,0145775 t
Alcool	+	—	— 1,1720041 — 0,0029143 t	— 2,9992701 — 0,0590515 t
Acétone	+	+	— 1,3268535 — 0,0026148 t	— 1,9064582 — 0,0215592 t
Chloroforme	+	+	— 1,3410130 — 0,0025856 t	— 2,0667124 — 0,0131824 t
Chlorure de carbone	+	+	— 1,8611078 — 0,0002880 t	— 1,3812195 — 0,0050220 t
Sulfure de carbone	+	+	— 1,4339778 — 0,0022372 t	— 2,0511078 — 0,0088003 t
Mercure	+	—	— 1,2917974 — 0,0012438 t	— 1,6177651 — 0,0119062 t
Acide carbonique	+	—	— 1,3344869 — 0,0052911 t	— 1,7181390 — 0,0089594 t

(*) t est la température en degrés centigrades.

ci-joint, on a, pour une pareille température,

$$\log(m\alpha^{\tau}) = -1,3268535 - 0,0026148\,t$$
$$= -1,6204981 = 0,3795019 - 2,$$
$$\log(n\beta^{\tau}) = -1,9064582 - 0,0215592\,t$$
$$= -4,3275779 = 0,6724221 - 5.$$

D'après cela

$$m\alpha^{\tau} = 0,0239608,$$
$$n\beta^{\tau} = 0,0000470,$$

et en ajoutant, on a, d'après l'équation (187),

$$\frac{dp}{p\,dt} = 0,0240078;$$

multiplions par $p = 5$; il vient, en atmosphères :

$$\frac{dp}{dt} = 0,120039;$$

en millimètres de mercure :

$$\frac{dp}{dt} = 760 \times 0,120039 = 91^{\text{mm}},230;$$

et en kilogrammes, par mètre carré :

$$\frac{dp}{dt} = 10334 \times 0,120039 = 1240^{\text{kg}},88.$$

II. — *Chaleur du liquide et chaleur de vaporisation.*

Nous allons nous occuper de la question suivante :

Quelle est la quantité de chaleur qu'il faut communiqu[er] à l'unité de poids d'un liquide, à une température détermin[ée] pour la réduire en vapeur saturée à une température ou s[ous] une pression donnée?

C'est sous cette forme qu'on avait l'habitude de poser [la] question dans les anciens Traités de physique et de mécaniq[ue] et on y répondait dans ces derniers temps en prenant p[our] base les résultats des expériences de M. Regnault. Mais

théorie mécanique de la chaleur montre que la question ainsi posée ne peut être résolue; qu'il est impossible, en d'autres termes, de déduire, de la température initiale du liquide et de la température de sa vapeur saturée, la quantité de chaleur nécessaire pour opérer ce changement d'état : pour la déterminer, il faut encore posséder une indication *sur la manière* dont ce changement d'état s'est effectué. Comme la transformation peut se faire d'une infinité de manières, la quantité de chaleur qu'on doit fournir au mélange de liquide et de vapeur pour produire cet effet, est différente dans chaque cas.

On pourrait, en effet, imaginer un réservoir rempli d'un liquide mêlé à sa vapeur, dont la capacité fût maintenue constante pendant l'introduction de la chaleur, ou bien fût ou diminuée ou agrandie; dans le cas où le volume augmente, le mélange pourra aussi être assujetti à vaincre une pression extérieure variant elle-même d'après une loi quelconque. Dans chacun de ces cas, il peut bien se former la quantité de vapeur exigée à une pression déterminée; mais comme le travail extérieur dépensé ou produit par la masse pendant le changement d'état dépend de la pression extérieure et de la loi qui régit les variations de cette pression, il en est de même de la quantité de chaleur qu'il faut fournir à la masse dans chaque expérience particulière.

D'après cela les expériences de M. Regnault qui se rapportent à la question actuelle ne seraient pour nous d'aucune utilité au point de vue de la théorie mécanique de la chaleur, si nous ne savions pas dans quelles circonstances ont été faites ces expériences.

Mais ces expériences ont été conduites et décrites (*) de telle manière qu'il nous est possible de suivre la marche des changements, et c'est pour cela que les indications de M. Regnault ont la plus grande importancepour le but que nous nous proposons d'atteindre; elles forment, avec quelques autres recherches du même auteur, la base principale de ce qui va suivre.

M. Regnault a suivi deux directions principales dans ses

(*) Regnault, *Relations des expériences, etc.*, t. I et II.

recherches. Nous lui devons d'abord des résultats sur quantité de chaleur qu'il faut fournir à l'unité de poids du l quide pour élever sa température d'un nombre de degrés donn en d'autres termes, sur la chaleur spécifique des liquides.

Désignons par c la *chaleur spécifique* d'un liquide quelcor que; la quantité de chaleur qu'exige l'unité de poids pour un élévation de la température dt est

$$dq = c\,dt,$$

et si la température doit s'élever de o à t° centigrades, on

$$q = \int_0^t c\,dt. \tag{188}$$

Nous appellerons dorénavant cette quantité *chaleur du li quide*. M. Regnault a déduit de ses expériences des formule empiriques qui donnent la chaleur q en fonction de la tem pérature; à l'aide de ces formules on trouve la chaleur spéci fique du liquide par la formule

$$c = \frac{dq}{dt}. \tag{189}$$

Pour les liquides dont nous avons déjà étudié les force élastiques, M. Regnault donne les formules suivantes :

Eau :

$$q = t + 0,00002\,t^2 + 0,0000003\,t^3; \tag{190}$$

Éther :

$$q = 0,52901\,t + 0,0002959\,t^2; \tag{191}$$

Alcool :

$$q = 0,54754\,t + 0,0011218\,t^2 + 0,000002206\,t^3; \tag{192}$$

Acétone :

$$q = 0,50643\,t + 0,0003965\,t^2; \tag{193}$$

Chloroforme :

$$q = 0,23235\,t + 0,0000507\,t^2; \tag{194}$$

Chlorure de carbone :

$$q = 0,19798\,t + 0,0000906\,t^2; \tag{195}$$

Sulfure de carbone :

$$(196) \qquad q = 0{,}23523\,t + 0{,}0000815\,t^2.$$

Si l'on n'a pas fait d'expériences sur le mercure et l'acide carbonique, on connaît cependant la chaleur spécifique c du mercure liquide, mais on ne connaît pas la loi de sa variation pour les températures élevées qui correspondent à sa vaporisation sous des pressions ordinaires.

Avant de nous servir des indications de M. Regnault, nous allons vérifier la formule (188). Quand on considère la valeur de q, il faut savoir dans quelles circonstances l'élévation de température s'est effectuée dans les expériences de M. Regnault. L'élévation de température d'un liquide est accompagnée d'un changement de volume (généralement d'une dilatation); mais comme le liquide doit ordinairement résister à une certaine pression extérieure constante ou variable, il y a toujours pendant l'élévation de la température une perte ou un gain de travail, par suite un gain ou une perte de chaleur; q aura donc une valeur particulière dans chaque cas. C'est seulement *dans le cas où il n'y aurait pas d'augmentation de volume appréciable* que la grandeur et la loi de variation de la pression extérieure n'auraient aucune influence ; si nous pouvions admettre cette hypothèse, nous pourrions appliquer l'équation (188) d'une manière générale.

Nous devons d'après cela nous occuper des résultats des expériences qui se rapportent à la variation du volume des liquides sous l'influence de la chaleur. Mais ces expériences sont insuffisantes pour une étude sérieuse de la question qui nous occupe. Parmi les liquides désignés précédemment, nous ne connaissons jusqu'à présent que l'eau, l'éther, l'alcool et le sulfure de carbone, et encore dans l'unique hypothèse où *la dilatation se fait sous la pression atmosphérique;* mais nous n'avons malheureusement point d'expériences sur le changement de volume des liquides sous une pression égale à celle de la vapeur qui correspond à la température considérée, et

c'est le cas qui serait surtout important pour le but qu'o propose (*).

Les recherches bien connues de M. Kopp (**) mont que la dilatation des liquides qu'on vient de nommer *très-minime* pendant l'augmentation de la température la pression atmosphérique; joignons à ce fait l'hypothèse la dilatation est encore moindre, lorsque le liquide se tr sous la pression généralement bien supérieure de sa vap alors nous pourrons, dans toutes les recherches ultérieu admettre que les changements de volume d'un liquide infiniment petits par rapport aux changements de volume accompagnent la vaporisation du liquide et la condensatio sa vapeur.

Par suite, *nous considérerons toujours le volume de l'u de poids d'un liquide comme une quantité constante, qu que soient la température du liquide et la pression qu'il surmonter*. En faisant cette hypothèse, nous commettons erreur tout à fait insignifiante, car dans tout ce qui suit, étudierons les variations de volume d'un mélange de liq et de vapeur; les variations du volume de liquide seul di raissent presque devant celles du volume de la vapeur.

Il serait néanmoins très-important de combler par des périences étendues et bien faites la lacune qui existe dans connaissances relatives aux liquides; ils n'est, en effet, nu ment impossible que le coefficient de dilatation d'un liq à une haute température et sous la pression correspond de sa vapeur soit plus grand, et même considérablement grand, que celui qu'on a trouvé dans la dilatation sous la p sion atmosphérique (***). Soit σ le volume de l'unité de p

(*) M. Hirn a publié récemment des expériences qu'il a faites sur cette tion; il a observé, entre des limites assez étendues, l'eau, l'alcool, l'éther sence de térébenthine, le sulfure de carbone et le bichlorure de car (*Annales de Chimie et de Physique*, t. XI, 1867.)

(**) Kopp, *Annales de Poggendorff*, t. LXXII.

(***) Les expériences de Drion sur l'acide sulfureux, l'éther chlorhydri l'acide hypoazotique justifient cette opinion. (*Annales de Chimie et de Phy* 3e série, t. LVI.)—*Voir* aussi les recherches de M. E. d'Andréeff dans le même

du liquide à la température t sous une pression égale à la tension maxima de la vapeur qui correspond à cette température; il faudrait déterminer la fonction $\sigma = f(t)$; alors $\frac{d\sigma}{dt}$ ne serait pas le coefficient de dilatation dans le sens ordinaire ; ce serait un coefficient de dilatation qui suppose que la pression exercée sur la surface du liquide augmente avec la température suivant la même loi que la pression de la vapeur.

Supposons qu'on suive la marche employée par M. Regnault pour déterminer *la chaleur du liquide*, en se conformant aux principes de la théorie mécanique de la chaleur, et qu'on tienne compte du changement de volume du liquide; les formules données plus haut pour calculer q prendraient alors une signification extrêmement compliquée. Ainsi M. Regnault a déterminé *la chaleur de l'eau* de la manière suivante.

Il avait pris une petite chaudière remplie d'eau à la température t sous une pression égale à la tension maxima de sa vapeur; une certaine quantité de cette eau se rendait à travers un tuyau muni d'un robinet dans un calorimètre situé à une grande distance de la chaudière; on déterminait la quantité de chaleur que l'eau chaude avait cédée, *dans l'intervalle des deux températures observées*, en tenant compte des pertes de chaleur, et connaissant la quantité d'eau contenue originairement dans le calorimètre, le poids de l'eau chaude transportée dans ce calorimètre et l'élévation de température qui y était produite. Mais cette quantité de chaleur n'est pas rigoureusement équivalente à celle qui serait nécessaire pour porter de nouveau la masse d'eau d'une manière quelconque, par exemple sous une pression constante déterminée, à la température de la chaudière. Le phénomène qui se passe dans cette expérience est extrêmement compliqué; la chaudière forme un réservoir d'où l'eau s'écoule sous la pression de sa vapeur, qui est à peu près constante, et cet écoulement est accompagné d'une perte de travail. Dans le calorimètre l'eau produit un travail pour se faire place (sous une pression à peu près égale à la pression atmosphérique); l'excès du premier travail sur le second joint au travail qui correspond au changement de volume,

est employé à créer la vitesse avec laquelle l'eau entre dans le calorimètre. Le travail qui correspond à cette vitesse se transforme en chaleur et contribue à l'élévation de la température du calorimètre. L'étude du phénomène ne peut être poursuivie plus loin dans l'état actuel de la science; malgré cette incertitude, on peut sans hésitation faire usage des résultats de M. Regnault de la manière indiquée plus haut; la force vive transformée en chaleur et le changement de volume de l'eau transformée n'ont qu'une très-faible influence sur la température finale du calorimètre.

Dans une seconde série d'expériences, M. Regnault a déterminé la quantité de chaleur nécessaire pour la vaporisation du liquide : on observait la quantité de chaleur qui devient libre lorsque la vapeur *se liquéfie* sous une pression constante. Cette quantité de chaleur est évidemment équivalente à celle qu'il faudrait communiquer au liquide *pour le réduire en vapeur* dans les mêmes circonstances.

M. Regnault a déduit de ses expériences sur les liquides désignés plus haut des formules empiriques au moyen desquelles on peut calculer la chaleur totale λ, qu'il faut communiquer à l'unité de poids du liquide à partir de o degré, pour la transformer sous une pression constante p en vapeur saturée ayant la pression p et la température t.

Voici quelle est la meilleure manière de se figurer la production de vapeur dans ces circonstances. L'unité de poids du liquide à la température o degré se trouve dans un cylindre muni d'un piston qui repose sur la surface du liquide et qui supporte extérieurement une pression p par unité de surface; p représente ici en même temps *la pression spécifique* de la vapeur qui doit se former. Lorsque nous communiquerons de la chaleur à ce liquide, sa température s'élèvera d'abord de o degré à t degrés avant la production de la vapeur; ce n'est qu'à cette température t que la force élastique de la vapeur est assez grande pour surmonter la pression extérieure p, et que la vapeur formée peut se faire de la place en repoussant le piston. La quantité de chaleur qu'il faut fournir jusqu'au moment où commence la formation de la vapeur est celle que

nous avons appelée plus haut *chaleur du liquide*, et qui a été désignée par q ; on la calcule pour chaque température d'après les formules données plus haut. Si l'on continue à fournir de la chaleur, il se forme de la vapeur dont la force élastique est p et le piston rétrograde jusqu'à ce que tout le liquide soit vaporisé. La pression et la température restent invariables pendant la formation de la vapeur; la quantité de chaleur r, qui est fournie pendant cette opération, peut être appelée, d'après M. Clausius, *chaleur de vaporisation;* c'est cette quantité qui a reçu le nom de *chaleur latente de vaporisation* dans les Traités de Physique.

La quantité de chaleur totale λ qui est nécessaire pour transformer l'unité de poids du liquide à partir de o degré et sous la pression constante p en vapeur saturée ayant la pression p et la température t, est donc

$$\lambda = q + r. \tag{197}$$

M. Regnault déduit de ses expériences les valeurs de λ pour les liquides contenus dans le tableau ci-joint, au moyen des formules inscrites dans ce même tableau; quant aux formules qui donnent les valeurs de r, on les obtient au moyen de la relation

$$r = \lambda - q.$$

Eau :

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= 606,50 + 0,305t, \\ r &= 606,50 - 0,695t - 0,00002t^2 - 0,0000003t^3; \end{aligned}\right. \tag{198}$$

Éther :

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= 94,00 + 0,45000t - 0,00055556t^2, \\ r &= 94,00 - 0,07901t - 0,0008514t^2; \end{aligned}\right. \tag{199}$$

Acétone :

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= 140,50 + 0,36644t - 0,000516t^2, \\ r &= 140,50 - 0,13999t - 0,0009125t^2; \end{aligned}\right. \tag{200}$$

Chloroforme ;

$$(201)\quad \begin{cases} \lambda = 67,00 + 0,1375\,t, \\ r = 67,00 - 0,09485\,t - 0,0000507\,t^2; \end{cases}$$

Chlorure de carbone :

$$(202)\quad \begin{cases} \lambda = 52,00 + 0,14625\,t - 0,000172\,t^2, \\ r = 52,00 - 0,05173\,t - 0,0002626\,t^2; \end{cases}$$

Sulfure de carbone :

$$(203)\quad \begin{cases} \lambda = 90,00 + 0,14601\,t - 0,0004123\,t^2, \\ r = 90,00 - 0,08922\,t - 0,0004938\,t^2. \end{cases}$$

Les nombres inscrits dans les premières colonnes des Tables I à VII (seconde partie) de l'Appendice ont été calculés d'après ces dernières formules et d'après les formules données pour q, p. 254.

La colonne 1 donne la température t, la colonne 2 donne la chaleur totale de la vapeur correspondante, la colonne 3 donne la *chaleur du liquide* q, et la colonne 4 donne la chaleur de vaporisation $r = \lambda - q$.

Les valeurs de λ ont été prises seulement pour les vapeurs d'alcool dans les Tables de M. Regnault; cet auteur n'a point établi de formule empirique pour ce liquide, parce que, comme le montre la colonne 2, Table III, cette quantité λ paraît changer avec la température d'une manière si singulière, qu'il aurait fallu donner à la formule une forme très-compliquée pour qu'elle pût représenter cette variation, même approximativement. Les observations sur la chaleur totale et sur la chaleur du liquide manquent encore pour le mercure et l'acide carbonique (*).

(*) Outre les vapeurs mentionnées plus haut, M. Regnault donne encore la vapeur de benzine, dont la chaleur totale est

$$\lambda = 109,00 + 0,24429\,t - 0,0001315\,t^2.$$

Je n'ai pas compris cette vapeur dans mes Tables, parce que la chaleur de son liquide n'est pas connue.

La Table X de l'Appendice, qui est relative à la vapeur d'eau, contient dans la colonne 5 les valeurs exactes de la quantité q qui correspondent à différentes forces élastiques. Les valeurs de λ et de r ne s'y trouvent pas explicitement; mais on peut les déduire des nombres donnés, comme nous le verrons un peu plus tard.

III. — *Chaleurs latentes interne et externe.*

Les résultats des expériences de M. Regnault, que nous avons cités pour le besoin de nos recherches, nous font connaître quelle quantité de chaleur il faut fournir à l'unité de poids du liquide considéré pour former de la vapeur saturée sous une pression constante et à une température donnée; on sait quelle est la partie de cette chaleur qui sert à élever la température du liquide, et quelle est celle qui est dépensée pour la formation de la vapeur; mais ces expériences ne nous apprennent point quelle est la quantité de chaleur contenue finalement dans un kilogramme de vapeur saturée à la température t. D'après la théorie mécanique de la chaleur, et contrairement aux hypothèses faites jusqu'ici, il n'est pas possible que la chaleur totale λ se trouve encore en entier dans la vapeur après sa formation, puisque cette vapeur s'est fait une place dans le cylindre (que nous considérions tout à l'heure), en déplaçant le piston avec une pression constante p. *La vapeur a donc produit un travail pendant sa formation, et à ce travail correspond la disparition d'une certaine quantité de chaleur pendant l'opération; il s'agit d'en déterminer la valeur.*

Imaginons toujours l'unité de poids du liquide ayant le volume σ, la température o degré et la pression p; et supposons qu'on veuille la transformer sous une pression constante p en vapeur saturée à la température t et sous la même pression p. En recevant de la chaleur, ce liquide atteint d'abord la température t degrés; comme il n'y a pas d'évaporation jusqu'à ce moment, et comme le volume spécifique σ du liquide est

supposé constant, le travail extérieur est nul; si l'on continue à fournir de la chaleur jusqu'à ce que tout le liquide se soit transformé en vapeur saturée sous la pression p, il y a augmentation de volume, et, par suite, production de travail. Le travail extérieur total se calcule par la formule

$$L = \int p\,dv.$$

En remarquant que p est constant, que σ est le volume initial du liquide et s le volume spécifique de la vapeur saturée sous la pression p, on trouve, en effectuant l'intégration,

$$L = p(s - \sigma).$$

La quantité de chaleur correspondant à ce travail qui *disparaît* pendant l'opération est

$$Ap(s - \sigma).$$

Si l'on pose, avec M. Clausius, $s - \sigma = u$, l'expression de cette quantité de chaleur devient

$$Apu.$$

Nous regardons σ comme une quantité constante et les quantités s et u comme des fonctions de la température t ou de la pression p qu'il faudra déterminer.

Lorsque nous supposons que le produit Apu est connu pour toute température ou pour toute pression, nous trouvons les résultats suivants :

La quantité de chaleur totale fournie pendant l'opération ayant été désignée par λ et Apu étant la quantité de chaleur qui a disparu pendant que la vapeur s'est formée dans les circonstances indiquées, il *reste finalement* dans la vapeur la quantité de chaleur $(\lambda - Apu)$; représentons ce reste par la lettre J, il vient

$$J = \lambda - Apu. \tag{204}$$

J'appelle cette quantité de chaleur J, *la chaleur contenue dans la vapeur*, ou plus simplement, *la chaleur de la vapeur;*

sa valeur indique *combien l'unité de poids d'une vapeur saturée sous la pression p contient de calories de plus que l'unité de poids du liquide générateur à la température zéro.*

La *chaleur latente* ou *chaleur de vaporisation* r représentait dans ce qui précède la quantité de chaleur qu'il fallait fournir à l'unité de poids du liquide ayant déjà la température t de la vapeur à former; on admettait que la formation de la vapeur avait lieu sous une pression constante. Lorsqu'on retranche de la quantité r la quantité de chaleur Apu transformée en travail, on trouve une différence que l'on désigne par ρ et qui donne l'excès *de la chaleur contenue dans l'unité de poids d'une vapeur à la température t sur la chaleur contenue dans l'unité de poids du liquide générateur à la même température.*

J'appelle la quantité

$$\rho = r - Apu \tag{205}$$

la *chaleur latente interne;* il faudra alors désigner par *chaleur latente externe* la quantité de chaleur représentée par Apu, puisque la somme de ces deux quantités de chaleur donne la quantité r connue dans les ouvrages de physique sous le nom de *chaleur latente.*

J'ai introduit dans la théorie de la chaleur les deux quantités J et ρ, non pas seulement parce que leur usage simplifie tous les calculs relatifs aux propriétés des vapeurs, mais encore parce qu'elles ont une signification plus générale que les quantités λ et r. La chaleur de la vapeur J et la chaleur latente interne ρ sont toutes les deux *indépendantes* de la manière dont la vaporisation s'est effectuée; tandis qu'en employant la chaleur totale λ et la chaleur de vaporisation r, il faut toujours supposer que la vapeur soit formée *sous une pression constante.*

Les deux quantités J et ρ sont d'ailleurs liées entre elles par une relation simple. D'après ce qui précède, on a

$$q = \lambda - r;$$

par suite, en retranchant membre à membre les deux équa-

tions (204) et (205),

$$q = J - \rho. \tag{206}$$

Lorsque nous pourrons exprimer une des trois quantités J, ρ et Apu en fonction de la température, les deux autres seront déterminées d'après les formules précédentes, puisqu'on connaît λ et r d'après les résultats donnés par M. Regnault.

L'équation fondamentale (III), p. 76, de la théorie mécanique de la chaleur nous permet de trouver facilement la chaleur latente intérieure Apu.

Considérons l'unité de poids d'un mélange de liquide et de vapeur; soient x kilogrammes le poids de la vapeur, et $1-x$ kilogrammes celui du liquide. Conservant les notations déjà employées, on a respectivement, pour les volumes de la vapeur et du liquide, les valeurs xs et $(1-x)\sigma$; et, par suite, pour le volume spécifique v du mélange,

$$v = xs + (1-x)\sigma,$$

ou bien

$$v = x(s-\sigma) + \sigma;$$

et, à cause de la relation

$$s - \sigma = u, \tag{207}$$

$$v = xu + \sigma. \tag{208}$$

Lorsqu'on fournit au mélange la quantité de chaleur dQ sous une pression constante, et, par suite, à la température constante t, une quantité de liquide égale à dx se transforme en vapeur, et puisque l'unité de poids du liquide exige pour cette transformation la quantité de chaleur r, nous avons l'équation

$$dQ = rdx.$$

Différentions maintenant l'équation (208) en admettant que la température t et, par suite, la quantité u restent constantes, nous aurons

$$dv = udx,$$

et l'élimination de dx entre les deux dernières équations

donne

$$(209)\qquad dQ = \frac{r}{u}\, dv.$$

Les équations fondamentales (III), p. 76, nous fournissent deux autres expressions de dQ; les deux premières de ces équations donnent ici, puisque $dp = 0$ et $dt = 0$,

$$dQ = AY dv \quad \text{ou} \quad dQ = \frac{A(a+t)}{\left(\frac{dt}{dp}\right)} dv;$$

ces deux équations sont identiques avec l'équation (209). En exprimant cette identité, on trouve

$$(210)\qquad AY = \frac{r}{u},$$

$$(211)\qquad \frac{r}{u} = \frac{A(a+t)}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}.$$

La première de ces équations nous fait connaître la signification de la fonction Y pour des mélanges de liquide et de vapeur; la seconde donne pour une vapeur saturée la relation entre la chaleur de *vaporisation* r, la pression p, la température t, et, à cause de l'égalité $u = s - \sigma$, les volumes spécifiques de la vapeur et du liquide.

L'équation (211) peut s'écrire un peu plus simplement; on peut d'abord remplacer $a + t$ par T, et poser, en outre,

$$\frac{1}{\left(\frac{dt}{dp}\right)} = \frac{dp}{dt},$$

puisque, pour les vapeurs saturées, la pression p est une fonction de la température seule. L'équation (211) prend alors la forme

$$(212)\qquad \frac{r}{u} = AT\frac{dp}{dt},$$

et c'est sous cette forme qu'elle sera employée dans les recherches ultérieures (*).

(*) L'équation (212) constitue le résultat le plus important auquel ait conduit la théorie mécanique de la chaleur appliquée aux vapeurs. Cette équation est due à Clapeyron (1834) qui l'a établie sous la forme suivante (en introduisant nos notations dans sa formule) :

$$(\alpha) \qquad \frac{r}{u} = \mathrm{C}.\frac{dp}{dt}.$$

Clapeyron désigne par C une fonction de la température qui est la même pour tous les corps, et qui a été appelée plus tard là *fonction de Carnot.* Il ne donne pas la forme de cette fonction, mais il calcule sa valeur pour différentes températures, à l'aide de la formule précédente, en se servant des valeurs de la chaleur de vaporisation r de quelques vapeurs connues alors, à la température d'ébullition sous la pression atmosphérique, et en employant la valeur de $dp : dt$ déduite des courbes des forces élastiques; il substituait aussi à u le volume spécifique de la vapeur saturée calculé d'après les lois de Mariotte et de Gay-Lussac.

M. Helmholtz a trouvé un peu plus tard (1847) (*voyez* plus haut la remarque de la page 74) la forme de cette fonction C de la manière suivante.

Clapeyron avait établi pour les gaz permanents l'équation

$$(\beta) \qquad \mathrm{Y}v - \mathrm{X}p = \mathrm{RC},$$

tandis qu'après lui (1845), M. Holtzmann avait trouvé en suivant une marche différente, l'équation

$$(\gamma) \qquad \mathrm{Y}v - \mathrm{X}p = \mathrm{A}pv.$$

M. Helmholtz tira alors de ces deux équations la relation

$$\mathrm{RC} = \mathrm{A}pv,$$

ce qui lui donna cette autre relation :

$$(\delta) \qquad \mathrm{C} = \mathrm{AT},$$

puisque, pour les gaz permanents, on a $pv = \mathrm{R}(a + t) = \mathrm{RT}$.

M. Helmholtz calcula, à l'aide de cette équation écrite sous une forme un peu différente, la valeur de C pour les températures choisies par Clapeyron, et trouva un accord parfait; il ne poussa pas plus loin ses calculs, et négligea même de substituer pour les vapeurs, dans l'équation (α) de Clapeyron, la valeur qu'il avait trouvée pour C. On n'aurait, du reste, obtenu aucun résultat si l'on avait continué à suivre les voies prises par Clapeyron et par M. Holtzmann; en effet, tous les deux supposent que l'équation qui donne la quantité de chaleur $d\mathrm{Q}$,

$$d\mathrm{Q} = \mathrm{X}\,dp + \mathrm{Y}\,dv,$$

soit intégrable, hypothèse dont l'inexactitude a été démontrée plus tard par

Mettons à la place de la chaleur de vaporisation r les chaleurs latentes interne et externe, en nous servant de l'équation (205); nous trouvons alors la relation suivante, qui joue également un rôle important :

$$(213) \qquad \frac{\rho}{u} = A\left(T\frac{dp}{dt} - p\right).$$

On peut donner aux deux rapports $r:u$ et $\rho:u$ une signification particulière. Comme dans la relation (207) le volume σ de l'unité de poids du liquide est toujours très-petit par rapport au volume s de l'unité de poids de sa vapeur, on peut remplacer approximativement u par s. Or r est la chaleur de vaporisation, et ρ la chaleur latente interne de l'unité de poids de la vapeur; on peut donc regarder approximativement $r:u$ comme la chaleur de vaporisation, et $\rho:u$ comme la chaleur latente interne *de l'unité de volume* de la vapeur : mais ces deux rapports ont pour nous une signification plus importante. Dans l'équation générale (12), p. 39, qui donne la quantité de chaleur qu'il faut fournir à l'unité de poids d'un corps, et dans l'équation (3), p. 27, qui donne l'accroissement du travail intérieur correspondant à l'introduction de cette chaleur, on a considéré les quantités X, Y et Z comme des fonctions de la pression p et du volume spécifique v, et on a indiqué en outre, équation (11), que les quantités Y et Z sont liées par la relation $Z + p = Y$.

Mais la recherche des deux équations (212) et (213) nous a conduit à l'équation (210); si nous y remplaçons Y par $Z + p$

M. Clausius (1850) (*voyez* plus haut, p. 38). Les recherches de M. Clausius prouvèrent, d'ailleurs, que les équations de Clapeyron et de M. Holtzmann restent vraies malgré l'impossibilité de leur hypothèse, et sont identiques avec la seconde équation fondamentale (II), p. 76; elle a la forme qui convient pour les gaz. Par là l'exactitude, ou plutôt la vraisemblance de l'exactitude de l'équation (δ) établie par M. Helmholtz, se trouva également démontrée. La substitution de la valeur de C dans l'équation (α) fournit alors l'équation (212) du texte, qui a été donnée pour la première fois par M. Clausius sous cette forme.

et r par $\rho + Apu$, nous trouvons

$$(214) \qquad AZ = \frac{\rho}{u}.$$

Nous apercevons de suite la signification des quantités Y et Z des équations fondamentales appliquées aux vapeurs, et nous voyons que toutes les deux sont fonctions de la pression p seule (ou de la température), et qu'elles sont indépendantes du volume v. On trouve le même résultat pour les gaz permanents. Les équations (61), p. 112, et (62), p. 113, conduisent aux relations

$$AY = \frac{c_p}{R} p \quad \text{et} \quad AZ = \frac{c_v}{R} p.$$

Avec les gaz permanents, pour lesquels R, c_p et c_v sont constants, les valeurs de Y et Z sont donc aussi indépendantes du volume v, et elles sont directement proportionnelles à la pression p.

La division des deux dernières équations donne

$$\frac{Y}{Z} = \frac{c_p}{c_v} = k,$$

valeur qui est constante aussi pour les gaz. En supposant que la dernière relation soit vraie également pour des vapeurs saturées, c'est-à-dire en admettant que ces dernières se comportent comme les gaz permanents, on aurait les égalités

$$\frac{Y}{Z} = \frac{\frac{r}{u}}{\frac{\rho}{u}} = k,$$

dans lesquelles k désigne une constante.

En tenant compte des équations (212) et (213), on trouverait

$$T \frac{dp}{pdt} = \frac{k}{k-1},$$

et on pourrait facilement déduire de là, par une intégration, la relation entre la pression et la température des vapeurs sa-

turées, puisque k doit être constant. Mais aucune vapeur ne suit la loi représentée par la relation précédente; il faut donc rejeter les hypothèses sur laquelle elle est basée.

Les valeurs de $T dp : p dt$, correspondant aux diverses températures et calculées pour les différentes espèces de vapeur, se trouvent inscrites dans la colonne 6 des Tables de l'Appendice (1re partie). Pour les obtenir, j'avais seulement à multiplier les valeurs $dp : p dt$ (colonne 5), dont l'origine a été indiquée plus haut (p. 249), par la température absolue T (colonne 2). En parcourant les nombres de la colonne 6 des neuf premières Tables, on voit qu'ils diminuent toujours pour une même vapeur quand la température augmente, et qu'ils ne sont pas les mêmes pour les différentes vapeurs à la même température. Nous reviendrons d'ailleurs sur l'examen de ces nombres, parce qu'on peut leur attribuer encore une autre signification.

Les Tables de l'Appendice de I à IX (1re partie) renferment encore les valeurs de $r : u$ et $\rho : u$, calculées d'après les équations (212) et (213); les calculs préparatoires ont été fournis par les colonnes 2 et 4. On reconnaît à l'inspection des nombres de ces colonnes, que les valeurs $r : u$ et $\rho : u$ augmentent rapidement pour la même vapeur avec la température t, et dans une proportion analogue à l'accroissement de la pression p. Mais on ne peut reconnaître la relation qui lie ces valeurs pour les différentes espèces de vapeurs prises à la même température; le seul résultat que l'on puisse déduire directement des Tables est que ces valeurs sont approximativement les mêmes pour les différentes vapeurs, quand on les prend sous la *même pression p*.

Ainsi, par exemple, pour la vapeur d'eau (Table I), avec $p = 354^{mm},62$, on a $r : u = 162,96$, tandis que, pour la vapeur d'alcool (Table III), avec $p = 350^{mm},21$, on a $r : u = 168,26$; avec les mêmes pressions les valeurs de $\rho : u$ et de $T dp : p dt$ sont aussi presque égales, ce qui s'explique par la relation qui lie ces quantités à $r : u$, d'après ce qui précède. Si la relation dont nous venons de parler était rigoureusement exacte, il faudrait considérer *$r : u$ comme une fonction de la pression p, qui serait la même pour toutes les vapeurs saturées;* elles se-

raient alors toutes assujetties à une équation de la forme $r:u = F(p)$. Une étude plus attentive ne confirme point cette loi. Dans la plupart des Traités de Physique, on appelle l'attention du lecteur sur cette proposition énoncée pour la première fois par Despretz, en disant que : *sous la même pression la chaleur de vaporisation varie en raison inverse de la densité de la vapeur.* Cette proposition exprime la même chose que la formule $r:u = F(p)$; remplaçons la quantité u par le volume spécifique s de la vapeur qui en diffère très-peu, et remarquons que ce volume est lié au poids spécifique γ (poids de l'unité du volume) par la relation $s = 1:\gamma$; alors la formule précédente pourra s'écrire $r\gamma = F(p)$, et sous cette forme elle représentera la proposition de Despretz. Mais quand on prend pour base des calculs les dernières expériences de M. Regnault, cette proposition ne se vérifie nullement, comme nous l'avons déjà dit, et comme le montre d'ailleurs le tableau suivant :

VAPEUR SATURÉE de	VALEURS DE $r:u$ calculées d'après l'équation (212) pour les forces élastiques de la vapeur de		
	1 atmosphère.	5 atmosphères.	10 atmosphères.
Eau	325,23	1375,0	2534,9
Éther	267,88	1094,6	2036,1
Alcool	340,71	1407,9	2518,7
Acétone	275,47	1127,3	2012,7
Chloroforme	270,00	1085,5	1917,4
Chlorure de carbone	257,66	1042,9	"
Sulfure de carbone	252,82	1033,3	1854,2
Mercure	282,16	1225,9	2250,5

Les nombres inscrits dans la même colonne verticale montrent des différences assez notables pour qu'il soit impossible d'attribuer ces écarts à des erreurs d'observation, et qu'il faille en conclure que la proposition de Despretz n'est vérifiée qu'approximativement par les expériences de M. Regnault et par les formules de la théorie mécanique de la chaleur. Ces nom-

bres diffèrent cependant assez peu les uns des autres pour qu'on puisse dire, au moins, que la chaleur de vaporisation de l'unité de volume de la vapeur est approximativement la même pour toutes les vapeurs sous la même pression. On peut dire la même chose de la chaleur latente interne de l'unité de volume de la vapeur, puisqu'elle ne diffère de la chaleur de vaporisation que par le facteur Ap. Je conclus de ce qui précède que le travail dépensé pour vaincre les forces avec lesquelles les particules liquides agissent les unes sur les autres dans la formation de l'unité de volume de la vapeur est approximativement le même pour tous les liquides quand la pression est la même.

L'équation (212) nous conduit à faire encore d'autres recherches qui ont, pour notre but, une plus grande importance que les précédentes.

Divisons les deux membres de l'équation (212) par Ap, il vient

$$\frac{r}{Apu} = T\frac{dp}{pdt}. \tag{215}$$

L'expression du second membre de cette équation est la même que celle à laquelle nous sommes déjà arrivé plus haut, et dont les valeurs, pour les différentes vapeurs, sont contenues dans la colonne 6 des Tables I à VII, ainsi que VIII et IX. Cette expression donne donc le rapport de la chaleur de vaporisation r de l'unité de poids de la vapeur à la chaleur latente externe Apu, c'est-à-dire à la quantité de chaleur qui se transforme en travail extérieur, tandis que la vapeur se forme sous une pression constante. Dans les Tables j'ai désigné par φ l'inverse de ce rapport, et j'ai indiqué dans la colonne 9 les valeurs de

$$\varphi = \frac{Apu}{r}. \tag{216}$$

On conclut de ce qui a été dit jusqu'ici, que l'on peut calculer tous les nombres des Tables I à VII (1re partie) et des Tables VIII et IX à l'aide de la seule loi des forces élastiques;

c'est pour cela que l'on peut déterminer aussi les quantités $r:u$, $\rho:u$ et $Apu:r$ pour toutes les autres vapeurs qui ne sont pas comprises dans nos Tables, mais pour lesquelles M. Regnault a établi la loi des forces élastiques. Cela cependant ne nous servirait pas beaucoup ; car nos recherches exigent, non-seulement la connaissance de ces rapports, mais aussi celle des valeurs de ρ, Apu et u. Ces dernières quantités ne peuvent se déterminer que pour les vapeurs dont on connaît la chaleur de vaporisation r, et cela n'a lieu que pour les vapeurs citées pages 259 et 260, et pour l'alcool.

On a inscrit les résultats des calculs indiqués pour les différentes espèces de vapeur dans la deuxième partie des Tables I à VII (de l'Appendice). Ainsi les colonnes 2, 3 et 4 donnent, pour chaque vapeur saturée à différentes températures, la chaleur totale λ, la chaleur du liquide q et la chaleur de vaporisation r. Dans la colonne 5, nous trouvons les valeurs de la chaleur latente externe Apu, calculées d'après l'équation

$$Apu = \varphi r;$$

on a pris les valeurs de la quantité φ dans la colonne 9 de la première partie des Tables.

En retranchant Apu de la chaleur totale λ, on trouve, d'après l'équation (204), la chaleur de la vapeur J (colonne 6); et si l'on retranche cette même quantité de la chaleur de vaporisation r, on a, d'après l'équation (205), la chaleur latente interne ρ (colonne 7).

Nous nous sommes servi de l'identité

$$u = \frac{r}{\left(\frac{r}{u}\right)}$$

pour inscrire dans la colonne 8 les valeurs de u que nous examinerons plus tard avec plus d'attention; pour les calculer, on a pris les valeurs de $r:u$ dans la colonne 7 de la première partie des Tables.

Pour continuer nos recherches, nous avons besoin d'établir

des équations nouvelles donnant les relations qui lient les quantités ρ, Apu et J à la température t; il serait trop long de calculer ces quantités dans chaque cas particulier et pour des températures déterminées, comme cela a été fait pour les nombres inscrits dans nos Tables. Entre les limites de température adoptées pour ces Tables, on peut trouver facilement des formules empiriques qui fournissent assez exactement les mêmes nombres. Il suffit, pour cela, d'établir les équations relatives à une seule des trois quantités de chaleur ρ, J et Apu; en y joignant les formules qui ont été données par M. Regnault pour les quantités de chaleur λ, r et q, on trouvera sans difficulté les deux autres. La chaleur latente interne ρ est celle de ces trois quantités qui s'emploiera le plus souvent dans les problèmes qui suivront, et c'est pour cela que j'ai calculé les formules empiriques donnant ρ pour les différentes vapeurs dont les propriétés sont suffisamment connues à l'aide des Tables de l'Appendice :

Eau :

$$\rho = 575,40 - 0,791\,t,$$
$$Apu = 31,10 + 0,096\,t - 0,00002\,t^2 - 0,0000003\,t^3;$$

Éther :

$$\rho = 86,54 - 0,10648\,t - 0,0007160\,t^2,$$
$$Apu = 7,46 + 0,02747\,t - 0,0001354\,t^2;$$

Acétone :

$$\rho = 131,63 - 0,20184\,t - 0,0006280\,t^2,$$
$$Apu = 8,87 + 0,06185\,t - 0,0002845\,t^2;$$

Chloroforme :

$$\rho = 62,44 - 0,11282\,t - 0,0000140\,t^2,$$
$$Apu = 4,56 + 0,01797\,t - 0,0000367\,t^2;$$

Chlorure de carbone :

$$\rho = 48,57 - 0,06844\,t - 0,0002080\,t^2,$$
$$Apu = 3,43 + 0,01671\,t - 0,0000546\,t^2;$$

Sulfure de carbone :

$$\rho = 82,79 - 0,11446t - 0,0004020t^2,$$
$$Apu = 7,21 + 0,02524t - 0,0000918t^2.$$

Pour ces vapeurs (à l'exception de la vapeur d'eau), on a déterminé les constantes à l'aide des valeurs de ρ qui correspondent aux températures 10, 60 et 110 degrés dans les Tables de l'Appendice. Pour les vapeurs d'alcool seules, on n'a pas établi de formule empirique; la raison est celle qui a empêché M. Regnault de donner une formule déterminant la chaleur totale λ (p. 260).

Lorsqu'on retranche membre à membre les formules précédentes, qui donnent ρ, et les formules correspondantes de M. Regnault, qui donnent la chaleur de vaporisation r (p. 259 et 260), on trouve les formules qui donnent la chaleur latente externe Apu.

On pourrait établir aussi facilement des formules empiriques pour la chaleur de la vapeur J; il suffirait pour cela, d'après l'équation (206), d'ajouter aux valeurs de ρ les expressions que M. Regnault donne pour la chaleur du liquide q (p. 259). Je me dispense d'écrire les formules qui résultent de cette opération parce que nous n'emploierons la quantité J qu'exceptionnellement, et alors on effectuera l'addition indiquée.

Les formules qui donnent ρ fournissent presque exactement les nombres des Tables de l'Appendice que nous avons trouvés directement, mais en passant par de grands détours. La coïncidence est la plus parfaite pour la plus importante des vapeurs. c'est-à-dire pour la vapeur d'eau, et, par une circonstance très-heureuse, c'est justement pour cette vapeur que la formule est la plus simple.

Cette formule montre que la chaleur latente interne ρ diminue uniformément quand la température augmente : circonstance dont l'exactitude est vérifiée par ce fait, que les différences des valeurs consécutives de ρ dans la colonne 7 de la Table I de l'Appendice sont presque égales entre les limites de températures très-écartées 0 et 200 degrés. Ce ré-

sultat est étonnant quand on songe par quelles expériences diverses et par quels longs calculs nous sommes arrivé à la détermination de la chaleur latente interne de la vapeur d'eau.

La formule qui donne la chaleur externe de la vapeur d'eau est bien moins simple; aussi ne l'emploierons-nous pas dans la suite sous la forme donnée plus haut. Voici comment on peut la simplifier.

On a trouvé

$$r = \lambda - q;$$

et il vient, par suite, pour la chaleur latente externe,

$$\mathrm{A}pu = \lambda - q - \rho.$$

Remplaçons λ par sa valeur donnée par la formule de M. Regnault (p. 254)

$$\lambda = 606,5 + 0,305\, t,$$

et la quantité ρ par sa valeur

(217) $$\rho = 575,4 - 0,791\, t;$$

il vient alors, pour la vapeur d'eau, la formule,

(218) $$\mathrm{A}pu = 31,10 + 1,096\, t - q,$$

dans laquelle q se déduit de la formule (190), p. 254.

Les nombres que fournit cette formule coïncident presque rigoureusement avec ceux que donne la colonne 8 de la Table I (*). Ce sont les formules précédentes qui ont été

(*) Toutes les Tables de l'Appendice ont été calculées de nouveau. La première édition de ce livre ne contient que trois Tables relatives à la vapeur d'eau. Comme ces Tables plus anciennes, ainsi qu'une Table que j'ai publiée pour la première fois dans le *Journal Polytechnique suisse*, t. VIII, et qui, d'après son arrangement, coïncide avec la Table X de l'Appendice, ont été reproduites dans un certain nombre de livres et de journaux, je crois utile d'indiquer la différence qui existe entre les anciennes et les nouvelles Tables. Deux Tables de la première édition sont identiques, d'après leur arrangement, à la Table I de l'Appendice; mais dans les premières, on n'a pas calculé

employées pour le calcul de la Table X (de l'Appendice), relative à la vapeur d'eau; les colonnes 6 et 7 de cette Table contiennent respectivement les chaleurs latentes interne et externe qui correspondent aux forces élastiques indiquées dans la première colonne. On s'est servi, pour calculer les valeurs de Apu au moyen de l'équation (218), des chiffres de la colonne 5 relatifs à la chaleur du liquide q. En divisant les valeurs de

---

le quotient différentiel $\frac{dp}{dt}$ comme dans celle-ci, en différentiant la formule de M. Regnault, qui donne p; on s'est servi des valeurs approchées données par M. Clausius (Mémoire V, p. 330). Puis au lieu de calculer la chaleur de vaporisation r à l'aide de la formule approchée

$$r = 607 - 0,708\,t,$$

qui a été proposée par M. Clausius, j'ai eu recours, dans les nouvelles Tables, à la formule exacte de M. Regnault; plus tard, je me suis convaincu que la formule approchée de M. Clausius n'est pas suffisamment exacte pour le but que nous poursuivons. Cela se voit très-bien à l'aspect des différences des valeurs consécutives de ρ (colonne 7, Table I), qui paraissent maintenant presque les mêmes, ce qui n'avait nullement lieu dans les anciennes Tables. En rapprochant encore la formule de M. Clausius de la formule exacte qui donne ρ, on obtient la relation

$$Apu = r - \rho = 31,6 + 0,083\,t,$$

qui donne des valeurs qui s'éloignent évidemment trop de celles de la colonne 5, Table I. En s'appuyant sur les nombres des anciennes Tables, je trouvais les formules empiriques

$$\rho = 575,03 - 0,7828$$

et

$$Apu = B \log \frac{T}{n}.$$

Dans cette dernière on devait poser $B = 30,456$ et $n = 100$. La première ne paraissait applicable qu'aux températures moyennes, tandis qu'on trouve maintenant qu'avec un petit changement dans la valeur des constantes, elle reproduit exactement les nombres des nouvelles Tables. J'ai donc abandonné les anciennes formules empiriques, et j'ai réduit, autant que possible, le nombre de ces formules dans ce Traité; ainsi, outre les formules de M. Regnault, j'ai établi des formules nouvelles pour le calcul de la chaleur latente extérieure ρ; mais je n'ai fait que ce qui était nécessaire et suffisant. Il faut remarquer cependant que les nombres des anciens tableaux ne diffèrent pas tellement de ceux des nouveaux qu'il faille en prescrire l'usage

$\mathrm{A}pu$ par les valeurs de $\mathrm{A}p$, on a obtenu les valeurs de u inscrites dans la colonne 8; les valeurs de ρ, divisées par les valeurs correspondantes de u, ont fourni les valeurs de $\frac{\rho}{u}$, dont nous avons déjà donné plus haut la signification, et dont on se sert souvent dans des problèmes spéciaux. L'inspection des différences des valeurs consécutives de $\frac{\rho}{u}$ (colonne 10 de la Table X) montre que ces valeurs croissent presque uniformément avec la pression, puisque les différences ne diminuent que lentement quand la pression de la vapeur augmente.

Au moyen de l'équation $r = \rho + \mathrm{A}pu$ et des nombres de notre Table X, il sera facile aussi de déterminer la chaleur de vaporisation r, et en ajoutant à la valeur de r celle de q, on aura la chaleur totale λ. On voit sans peine que les valeurs de r et de λ ainsi obtenues coïncident parfaitement avec celles qu'on tire des formules empiriques de M. Regnault. Enfin cette Table nous fournit encore la chaleur de la vapeur J; on n'a pour cela qu'à ajouter, en vertu de l'équation (206), les valeurs correspondantes de q et de ρ.

IV. — *De la densité et du poids spécifique des vapeurs saturées.*

Autrefois on admettait généralement, et quelques auteurs admettent encore aujourd'hui, que les vapeurs saturées se comportent exactement comme les gaz permanents, c'est-à-dire qu'elles suivent rigoureusement les lois de Mariotte et de Gay-Lussac. Mais nous savons que les expériences de M. Regnault n'ont vérifié qu'approximativement cette hypothèse, même pour les gaz, et que les vapeurs s'écartent de ces deux lois d'autant plus qu'elles s'approchent davantage de leur point de liquéfaction. Les vapeurs saturées doivent donc montrer les plus grands écarts; c'est ce qui a été prouvé pour la première fois par M. Clausius dans son premier Mémoire (1850), où il a déterminé, à l'aide des formules de la théorie mécanique de la chaleur, l'étendue des écarts de la vapeur d'eau.

Si les vapeurs suivaient réellement les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, on pourrait leur appliquer l'équation

$$pv = R(a + t),$$

dans laquelle R serait une constante, qu'il faudrait déterminer à part pour chaque vapeur, comme nous l'avons fait (p. 102) pour quelques gaz permanents; on n'aurait qu'à diviser la valeur de R qui convient à l'air atmosphérique, c'est-à-dire 29,272, par la densité de la vapeur par rapport à l'air. Ainsi, par exemple, on a pris d'après Gay-Lussac pour la densité de la vapeur d'eau le nombre 0,6225 : on aurait ainsi pour cette vapeur $R = 47{,}023$, et l'équation précédente fournirait la valeur du volume spécifique v, que nous avons désigné plus haut par la lettre s pour les vapeurs exactement saturées sans excès de liquide. Le poids spécifique (poids de l'unité de volume) se déduirait inversement de la relation

$$\gamma = \frac{1}{v} = \frac{1}{s}.$$

C'est de cette manière qu'on a calculé dans les anciens tableaux les valeurs de s et de γ pour la vapeur d'eau à diverses pressions. Navier conclut des résultats de ces calculs, qu'on peut obtenir d'une manière suffisamment approchée le poids spécifique de la vapeur d'eau en fonction de la pression seule au moyen de la formule

$$\gamma = \alpha + \beta p,$$

dans laquelle on doit considérer les quantités α et β comme des constantes entre des limites de pression assez étendues. De Pambour a, comme on sait, fait un grand usage de cette formule dans sa théorie des machines à vapeur.

Mais la théorie mécanique de la chaleur ne vérifie point ces conclusions; si elles étaient exactes, on aurait

$$Apu = AR(a + t);$$

puisqu'on peut remplacer dans la formule $ps = R(a + t)$, s par $u = s - \sigma$; car le volume spécifique σ du liquide est

très-petit relativement au volume s de la vapeur, et il peut être négligé dans des calculs approximatifs. La chaleur latente externe Apu devrait d'après cela augmenter uniformément avec la température dans les vapeurs saturées, ce qui ne se vérifie ni par les formules empiriques de la page 273, ni par les nombres des Tables; car les différences des valeurs consécutives de la colonne 5 des Tables de I à VII ne sont nullement égales.

Il faut donc, pour déterminer les valeurs de γ, employer nécessairement les formules de la théorie mécanique de la chaleur, ce qui n'offre d'ailleurs pas de difficultés.

Pour chaque valeur de la température et de la pression, on connaît la quantité Apu relative aux différentes vapeurs; en la divisant par Ap, on trouve u; c'est de cette manière qu'on a calculé pour la vapeur d'eau les valeurs de u inscrites dans la colonne 8 de la Table X; dans les autres Tables de I à VII, les valeurs de u se trouvent dans la dernière colonne : on les a calculées par un autre procédé indiqué à la page 272.

La quantité u étant connue, il est aisé de déterminer le volume spécifique s d'une vapeur exactement saturée au moyen de la formule $u = s - \sigma$. Pour l'eau, on a $\sigma = 0^{mc},0010$, et d'après ce que nous avons déjà dit, nous supposerons jusqu'à nouvel ordre cette quantité constante. Pour un autre liquide dont la densité par rapport à l'eau serait désignée par ε_1, on aurait pour le volume spécifique

$$\sigma = \frac{0,0010}{\varepsilon_1}.$$

Pour les liquides dont nous avons étudié les vapeurs, on connaît les densités d'après Pierre, Gay-Lussac, Kopp, Regnault, etc., et les valeurs de σ obtenues au moyen de l'équation précédente sont : pour l'éther, 0,0013; l'alcool, 0,0013; l'acétone, 0,0012; le chloroforme, 0,0006; le chlorure de carbone, 0,0006; le sulfure de carbone, 0,0008.

Lorsqu'on aura calculé le volume spécifique s correspondant à une température déterminée, on trouvera le poids de l'unité de volume (1 mètre cube), c'est-à-dire le poids spécifique, au

moyen de la formule

$$\gamma = \frac{1}{s} = \frac{1}{u + \sigma}.$$

Pour la vapeur d'eau les valeurs de γ se trouvent dans la colonne 11 de la Table X, et la colonne 12 comprend les différences de γ pour des augmentations égales de la force élastique. On remarque que ces différences diminuent quand la pression augmente, et qu'elles ne sont nullement constantes comme le suppose la formule empirique de Navier citée plus haut.

J'ai dressé le petit tableau suivant pour qu'on puisse aisément comparer les valeurs de γ calculées pour la vapeur d'eau d'après les principes de la théorie mécanique de la chaleur aux valeurs adoptées jusqu'à présent pour cette quantité :

PRESSION de la vapeur d'eau saturée en atmosphères.	POIDS SPÉCIFIQUE γ (d'après le tableau X, de l'Appendice).	DENSITÉ relative à l'air ε.	POIDS SPÉCIFIQUE γ (d'après l'ancienne méthode de calcul).
— 1 —	— 2 —	— 3 —	— 4 —
0,1	0,0687	0,621	0,0688
0,5	0,3153	0,633	0,3098
1	0,6059	0,640	0,5892
2	1,1631	0,648	1,1167
5	2,7500	0,662	2,5841
10	5,2703	0,676	4,8479

La colonne 2 contient les valeurs de γ pour les pressions indiquées dans la colonne 1, qu'on a tirées de la colonne 2 de la Table X (de l'Appendice). La colonne 3 renferme la densité ε de la vapeur par rapport à l'air atmosphérique à la même température et sous la même pression. En désignant par γ_1 le poids spécifique de l'air atmosphérique, on a, d'après l'équation (57) de la page 101,

$$\gamma_1 = \frac{p}{R(273 + t)}.$$

On obtient la quantité ε en divisant par γ_1 les valeurs de γ de

la colonne 2, et en mettant à la place de R la valeur 29,272; si au contraire on multiplie la valeur de γ_1 par 0,6225, densité de la vapeur d'eau donnée par Gay-Lussac, on obtient les valeurs de γ inscrites dans la colonne 4, c'est-à-dire les valeurs qu'on avait adoptées jusqu'à présent.

Les nombres de la colonne 3 montrent que la densité de la vapeur d'eau par rapport à l'air n'est pas une quantité constante, mais qu'elle augmente assez fortement avec la pression; aux pressions peu élevées seulement, les valeurs de ε se rapprochent du nombre 0,6225. On conclut de là, que la vapeur d'eau saturée ne se rapproche sous ce point de vue des gaz permanents qu'aux températures très-peu élevées et sous des pressions très-petites, mais que les écarts sont considérables pour les hautes pressions, pour celles qui existent dans les machines à vapeur. M. Clausius a déjà, dans son premier Mémoire, appelé l'attention sur cette propriété de la vapeur d'eau; une étude complète des autres vapeurs, à laquelle les Tables de l'Appendice servent de base, montre qu'elles se comportent d'une manière analogue.

En comparant entre eux les nombres des colonnes 4 et 2 du tableau précédent, on voit que les différences consécutives augmentent quand la pression s'accroît, et qu'elles sont tellement considérables déjà pour les pressions ordinaires, qu'on ne devrait plus se servir des anciennes Tables pour le calcul des problèmes de mécanique appliquée.

Les expériences de MM. Tate et Fairbairn ne permettent plus de douter de l'inexactitude des valeurs de γ calculées d'après l'ancienne méthode. Les résultats des expériences (*) donnent également un accroissement plus rapide du poids spécifique de la vapeur d'eau quand la pression croît, que celui que l'on déduit des anciennes hypothèses; les formules de la théorie mécanique sont parfaitement conformes aux résultats de ces expériences.

(*) *Proc. of the Royal Soc.*, 1860; *Phil. Mag.*, 4e série, t. XXI; *Civil Engineer*, 1860; *Litteratur und Notizblatt*, t. VI, p. 31.

Nous donnons encore un tableau pour bien faire voir comment se comportent les différentes vapeurs à leur température de vaporisation ordinaire (sous la pression d'une atmosphère); les températures de vaporisation ont été empruntées au tableau de la page 247 (première ligne horizontale); les chaleurs latentes externes $A pu$ ont été calculées au moyen des formules empiriques des pages 273 et 274, à l'exception de celle de la vapeur d'alcool, qui a été déduite par interpolation de la Table III de l'Appendice :

VAPEURS SATURÉES sous la pression d'une atmosphère.	VALEURS de		POIDS spécifique $\gamma = \frac{1}{u+\sigma}$.	DENSITÉ par rapport à l'air ε.
	$A pu$.	u.		
Eau	40,20	1,6494	0,606	0,640
Éther	8,25	0,3385	2,943	2,567
Alcool	15,33	0,6290	1,586	1,578
Acétone	11,45	0,4698	2,123	1,980
Chloroforme	5,51	0,2261	4,411	4,163
Chlorure de carbone	4,39	0,1801	5,534	5,479
Sulfure de carbone	8,18	0,3356	2,973	2,688

Quelques-unes des quantités des deux dernières colonnes ont été d'un autre côté déterminées par expérience ; ainsi, Gay-Lussac donne pour la densité relative à l'air de la vapeur d'eau 0,622, d'éther 2,586, d'alcool 1,613. Les différences de ces nombres avec ceux du tableau précédent s'expliquent par ce qui a été dit plus haut sur la densité de la vapeur d'eau. Nos nombres se rapportent à des vapeurs saturées sous la pression atmosphérique; les vapeurs étaient probablement surchauffées dans les expériences de Gay-Lussac. On ne peut d'ailleurs considérer les expériences faites à ce sujet comme inspirant une grande confiance.

Les densités que les chimistes déduisent, pour les vapeurs dont il s'agit, des équivalents en poids et en volume coïncident presque avec les nombres de notre tableau. En adoptant la loi admise en chimie, *que les densités de deux corps sont*

entre elles comme leurs équivalents en poids, on trouve pour les densités par rapport à l'air les nombres suivants :

Eau (H^2O^2)........................	0,623
Alcool ($C^4H^6O^2$)......................	1,593
Chloroforme (C^2HCl^3).................	4,138
Sulfure de carbone (C^2S^4)............	2,631
Éther ($C^8H^{10}O^2$)......................	2,562
Acétone ($C^6H^6O^2$)....................	2,008
Chlorure de carbone (C^2Cl^4)...........	5,332

Ces valeurs conviennent sans doute seulement à des vapeurs surchauffées, et qui se comportent presque comme des gaz permanents; tandis que les valeurs de notre tableau se rapportent à des vapeurs saturées sous la pression atmosphérique.

Les différences ne sont cependant pas très-considérables, de telle sorte que si l'on n'avait pas d'observations sur la chaleur de vaporisation r d'une vapeur, on pourrait déterminer approximativement par nos formules cette quantité, ainsi que les chaleurs latentes interne et externe ρ et Apu. Par exemple, d'après sa composition chimique, on a, pour la densité de l'acide carbonique par rapport à l'air, $\varepsilon = 1,524$. A la température de 0 degré, la tension maxima de l'acide carbonique est de $26906^{mm},6$ de mercure, ce qui équivaut à 35,403 atmosphères (Table IX de l'Appendice); le poids spécifique de l'air à cette température et sous cette même pression est de 45,782; on déduit de là pour le poids spécifique de la vapeur saturée d'acide carbonique à 0 degré: $\varepsilon\gamma = 69,772$, et par suite, pour son volume spécifique,

$$v = \frac{1}{\varepsilon\gamma} = 0,0143.$$

Le poids spécifique de l'acide carbonique liquide est 0,83 à la température de 0 degré; son volume spécifique serait donc $\sigma = 0,0012$, et par suite, on aurait

$$u = v - \sigma = 0,0131.$$

Or, d'après la Table IX de l'Appendice, on a, à la même

température,

$$\frac{r}{u} = 6397,22 \quad \text{et} \quad \frac{\rho}{u} = 5534,35.$$

Lorsqu'on multiplie ces dernières valeurs par la valeur de u écrite au-dessus, on trouve

chaleur de vaporisation, $r = 83,80$,
chaleur latente interne, $\rho = 72,50$
chaleur latente externe, $Apu = r - \rho = 11,30$.

On peut déterminer d'une manière analogue ces quantités de chaleur pour la vapeur de mercure. On sait que la densité de cette vapeur par rapport à l'air est $\varepsilon = 6,976$; le poids spécifique du mercure liquide est 13,6, et, par suite, on a, pour le volume spécifique du mercure liquide, $\sigma = 0,00007$; le calcul du volume spécifique v de la vapeur de mercure à 360 degrés et (d'après la Table VIII) sous une pression de $797^{mm},74$ (presque la pression atmosphérique) donne $v = 0,24487$. Nous pouvons donc poser sous cette pression

$$u = s - \sigma = 0,2448.$$

La Table VIII donne à la même pression

$$\frac{r}{u} = 294,96 \quad \text{et} \quad \frac{\rho}{u} = 269,38.$$

De là on conclut

chaleur de vaporisation, $r = 72,21$,
chaleur latente interne, $\rho = 65,94$,
chaleur latente externe, $Apu = 6,27$.

Les quantités de chaleur r, ρ et Apu relatives aux vapeurs d'acide carbonique et de mercure sont des valeurs approchées, et ne doivent nullement servir pour une étude très-précise de ces corps, avant qu'on ait vérifié leur exactitude par des expériences; elles nous montrent néanmoins que ces vapeurs ne se trouvent pas aux limites pour ce qui concerne la chaleur de vaporisation, tandis qu'elles s'y trouvent au point de vue de la relation qui lie les pressions et les températures; il est

parfaitement établi que l'eau se trouve à la tête de tous les liquides, quand on considère la quantité de chaleur qu'il faut fournir à l'unité de poids du liquide pour que la vaporisation ait lieu sous une pression constante.

Lorsqu'il s'agit de déterminer pour une vapeur saturée le volume spécifique v ou le poids spécifique γ correspondant à une pression déterminée, nous avons à effectuer des calculs très-longs en nous servant des formules de la théorie mécanique de la chaleur. Si donc on avait à déterminer souvent les valeurs de v et de γ sous une certaine pression p, on aurait un grand intérêt à établir des formules empiriques, dont les tableaux de l'Appendice fourniraient tous les éléments nécessaires.

Nous nous contentons ici, parce que cela suffit pour le moment dans les *Applications de la mécanique*, d'établir une seule de ces formules, celle qui concerne la vapeur d'eau.

On a dit plus haut qu'on s'est servi généralement jusqu'ici de la formule de Navier $\gamma = \alpha + \beta p$.

Dans cette formule α et β sont deux constantes. Mais on savait que cette formule ne donnait pas pour γ exactement les mêmes valeurs que l'ancienne méthode ; c'est pour cela qu'on prenait avec de Pambour des valeurs différentes pour les constantes α et β suivant que les vapeurs étaient à haute ou à basse pression. La Table X de l'Appendice montre que cette modification ne suffit pas encore : les différences des valeurs successives de γ (colonnes 11 et 12, Table X) diminuent tellement pour des augmentations égales de la force élastique, qu'on ne peut faire usage de la formule de Navier qu'entre des limites de pression très-rapprochées.

Il vaut donc mieux remplacer cette formule par une autre, qui donne pour γ des nombres coïncidant avec ceux de la théorie mécanique de la chaleur et qui puisse servir à la fois pour toutes les pressions.

Supposons qu'on ait déterminé les volumes spécifiques s de la vapeur d'eau en ajoutant aux valeurs de u (colonne 8, Table X de l'Appendice) la valeur $\sigma = 0{,}0010$; prenons ces quantités s comme les abscisses et les pressions correspon-

dantes p comme les ordonnées d'une courbe que j'appellerai dans tout ce qui suit la *courbe de la quantité de vapeur constante*. L'équation de cette courbe $p = F(s)$, qui correspond à une vapeur sèche et saturée, ne peut pas encore se trouver par la théorie; mais j'ai été conduit à penser qu'elle a probablement, pour l'eau, la forme

$$ps^n = p_1 s_1^n = \text{const.}$$

Dans cette formule, la constante $n = 1,0646$ et la constante $p_1 s_1^n = 1,704$, quand on évalue la pression en atmosphères.

On a déjà montré à la page 136 l'importance de la loi suivant laquelle la pression varie avec le volume dans les gaz permanents; il n'est donc pas invraisemblable que cette loi joue également un grand rôle dans les vapeurs sèches et saturées.

Lorsqu'on remplace, dans l'équation précédente, s par $1 : \gamma$, on a

$$(219) \qquad \gamma = \alpha p^{\frac{1}{n}}.$$

Si p est exprimé en atmosphères, on doit poser

$$\alpha = 0,6061 \quad \text{et} \quad 1 : n = 0,9393.$$

Le tableau ci-dessous montre avec quelle exactitude cette formule reproduit les valeurs de γ de la Table X de l'Appendice.

Tableau des poids spécifiques de la vapeur d'eau saturée.

PRESSION en atmosphères.	γ d'après l'équation (219).	γ d'après la Table X, col. 11.	PRESSION en atmosphères.	γ d'après l'équation (219).	γ d'après la Table X, col. 11.
0,5	0,316	0,315	6	3,262	3,263
1	0,606	0,606	8	4,274	4,274
2	1,162	1,163	10	5,270	5,270
3	1,701	1,702	12	6,255	6,254
4	2,229	2,230	14	7,229	7,228

On peut sans hésitation se servir de la formule (219) pour la vapeur d'eau; elle est applicable aussi à d'autres vapeurs lorsqu'on a déterminé les constantes α et n : ce qui se fait très-aisément à l'aide de nos Tables.

V. — *Équations fondamentales relatives au mélange d'un liquide et de sa vapeur.*

Considérons l'unité de poids d'un mélange d'un liquide et de sa vapeur. Soit x le poids de la vapeur : $(1-x)$ sera le poids du liquide; soit t la température du mélange : comme il y a un excès liquide, la vapeur est saturée et on connaîtra la pression p.

Le volume v du mélange est (p. 264) donné par l'équation

$$v = xu + \sigma,$$

dans laquelle nous considérons le volume spécifique σ du liquide comme constant, et la quantité u comme une fonction de la température t ou de la pression p.

Comparons maintenant la quantité de chaleur contenue dans le mélange à celle que contient l'unité de poids du liquide à la température o degré. Si q désigne toujours la chaleur du liquide, l'excès de la quantité de chaleur contenue dans les $(1-x)$ kilogrammes de liquide sur celle que contient le même poids de liquide à la températnre o degré est $(1-x)q$.

D'un autre côté, l'excès de la chaleur contenue dans le poids de vapeur x sur celle que contient le même poids de liquide à o degré est xJ, J désignant la chaleur de la vapeur (p. 262).

On déduit de là pour l'excès de chaleur de tout le mélange sur celle qui correspond à l'unité de poids du liquide à la température de o degré,

$$(1-x)q + x\mathrm{J},$$

ou bien

$$q + x(\mathrm{J} - q);$$

et comme $(\mathrm{J}-q)$ est, d'après l'équation (206), p. 264, la cha-

leur latente interne ρ, l'expression précédente peut s'écrire

$$q + x\rho.$$

Admettons que ce mélange ait subi un changement quelconque, et que, dans son état initial, la quantité de vapeur ait été x_1, la température t_1, et que q_1 et ρ_1 soient les valeurs correspondantes; alors l'excès de chaleur considéré serait

$$q_1 + x_1\rho_1.$$

Dans le passage du premier état au second, la quantité de chaleur contenue dans le mélange a donc augmenté de

$$q - q_1 + x\rho - x_1\rho_1;$$

mais cette quantité est évidemment identique au changement du travail intérieur $U - U_1$ mesuré en unités de chaleur; on obtient donc l'équation

$$A(U - U_1) = q - q_1 + x\rho - x_1\rho_1,$$

et, en passant aux différences, on peut écrire

$$(220) \qquad A\,dU = dq + d(x\rho).$$

Cette équation, dans laquelle on peut remplacer dq par $c\,dt$, et dans laquelle la chaleur du liquide q et la chaleur latente interne ρ sont, d'après les indications des pages 254 et 257, des fonctions connues de la température, donné le moyen de trouver le changement du travail intérieur correspondant à un changement d'état quelconque. Cette équation n'est vraie cependant, ainsi que celles qui vont suivre, que si la vapeur est saturée, et s'il reste, en général, un excès liquide; en d'autres termes, si la pression p peut être considérée comme une fonction de la température seule.

La formule précédente peut s'obtenir d'une manière très-élémentaire, sans qu'on ait besoin de remonter aux formules générales de la première Section.

Supposons que dL soit le travail extérieur produit pendant que le volume de la masse augmente de dv; alors la quantité de chaleur dQ qu'il faut fournir au mélange est

$$(221) \qquad dQ = A(dU + dL),$$

comme cela a été déjà indiqué (p. 26).

Les deux équations (220) et (221), combinées avec les résultats obtenus précédemment, fournissent le moyen de voir comment se comporte le mélange du liquide et de sa vapeur, que le changement d'état se fasse par un trajet reversible ou non reversible.

Lorsque le trajet est reversible, on peut, d'après la règle établie à la page 33, exprimer le travail extérieur dL par la quantité pdv. En substituant dans la dernière équation cette valeur et celle de dU, tirée de l'équation (220), nous avons

$$(222) \qquad dQ = dq + d(x\rho) + Apdv.$$

On peut donner à cette équation des formes très-différentes suivant qu'on exprime, à l'aide de l'équation (208), la quantité x en fonction du volume spécifique v du mélange, ou qu'on exprime v en fonction de x, ou bien encore qu'on regarde les quantités q et ρ, soit comme des fonctions de la température t, soit comme des fonctions de la pression p. Nous allons traiter ici les plus importantes de ces transformations; nous arriverons à des équations qui, bien qu'identiques, seront plus ou moins commodes à appliquer à tel ou tel problème.

Première transformation. — L'équation (208) résolue par rapport à x donne

$$x = \frac{v - \sigma}{u}.$$

En substituant cette valeur de x dans l'équation (222), on a

$$dQ = dq + d\left[\frac{\rho}{u}(v - \sigma)\right] + Apdv.$$

Regardons les quantités q et $\rho : u$ comme des fonctions de p; la différentiation indiquée donnera

$$dQ = \frac{d}{dp}\left(q - \frac{\rho}{u}\sigma + \frac{\rho}{u}v\right)dp + \left(\frac{\rho}{u} + Ap\right)dv.$$

Remplaçons, dans le deuxième terme du second membre,

ρ par sa valeur $r - \mathrm{A}pu$ [équation (205)]; nous avons alors

$$(223) \qquad dQ = \frac{d}{dp}\left(q - \frac{\rho}{u}\sigma + \frac{\rho}{u}v\right)dp + \frac{r}{u}dv.$$

C'est cette équation qui constitue pour nous le résultat de la première transformation. Lorsqu'on compare cette formule à l'équation générale (12), que nous avons établie pour des corps quelconques, on trouve, pour les mélanges de vapeur et de liquide, les valeurs des deux quantités X et Y que nous avons considérées d'une manière générale comme des fonctions de p et de v. On a ainsi

$$\mathrm{AX} = \frac{d}{dp}\left(q - \sigma\frac{\rho}{u} + v\frac{\rho}{u}\right)$$

ou

$$(224) \qquad \mathrm{AX} = \frac{dq}{dp} - \sigma\frac{d}{dp}\left(\frac{\rho}{u}\right) + v\frac{d}{dp}\left(\frac{\rho}{u}\right),$$

et

$$(225) \qquad \mathrm{AY} = \frac{r}{u}.$$

La dernière équation qui donne Y a déjà été indiquée p. 265; l'équation (224) nous donne la valeur de X, et on peut maintenant la calculer pour un volume donné v du mélange, quelles que soient la pression p et la température t. Comme nos tableaux fournissent les valeurs de $\rho : u$ pour les différentes pressions, nous pourrions facilement déterminer le quotient différentiel de $\rho : u$ par rapport à p; la Table X montre immédiatement que, pour la vapeur d'eau, cette quantité augmente si lentement avec la pression (*voyez* les différences de la colonne 10), qu'on peut la regarder comme constante, dans certaines limites, pour des calculs approximatifs. On trouve d'ailleurs, en différentiant l'équation (213),

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\rho}{u}\right) = \mathrm{AT}\frac{d}{dt}\left(\log \text{nép}\,\frac{dp}{dt}\right).$$

Cette quantité peut donc se calculer exactement pour toutes les températures quand on se sert de l'équation (187), p. 249.

Pour ce qui concerne le quotient différentiel $\frac{dq}{dp}$, on peut l'écrire aussi $c : \frac{dp}{dt}$, expression dans laquelle la chaleur spécifique $c = \frac{dq}{dt}$ est facile à déterminer pour le liquide donné d'après l'équation de la page 254, qui fournit la valeur de q.

Deuxième transformation. — En différentiant l'équation (208), dans laquelle σ est considéré comme constant, on a

$$dv = d(xu),$$

et, par suite,

$$\mathrm{A}p\,dv = \mathrm{A}p\,d(xu);$$

ou bien encore

$$\mathrm{A}p\,dv = \mathrm{A}d(pux) - \mathrm{A}xu\,dp.$$

Cette dernière valeur substituée dans l'équation (222) donne

$$dQ = dq + d(x\rho) + \mathrm{A}d(xpu) - \mathrm{A}xudp.$$

Si l'on introduit à la place de la quantité $\rho + \mathrm{A}pu$ la chaleur de vaporisation r, le troisième et le quatrième terme du second membre donnent $d(xr)$, et le dernier terme donne, en vertu de l'équation (212), p. 265,

$$\mathrm{A}xudp = \frac{xr}{\mathrm{T}}dt,$$

et, par suite,

$$dQ = dq + d(xr) - \frac{xr}{\mathrm{T}}dt. \quad (226)$$

Cette équation a été donnée pour la premiere fois sous cette forme par M. Clausius; on peut encore écrire plus simplement

$$dQ = dq + \mathrm{T}d\left(\frac{xr}{\mathrm{T}}\right); \quad (227)$$

car, en effectuant la différentiation indiquée, on retombe sur l'équation précédente.

Troisième transformation. — Remplaçons dans l'équation (226) dq par cdt, et effectuons la différentiation indi-

quée dans le second membre, nous aurons

$$dQ = c\,dt + r\,dx + x\,dr - x\frac{r}{T}\,dt;$$

ou bien encore, en ajoutant et retranchant $xc\,dt$ dans le second membre,

$$dQ = (1 - x)\,c\,dt + r\,dx + x\left(c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}\right)dt.$$

Si nous désignons par h la quantité $c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}$, qui est évidemment fonction de la température t seule, nons écrirons

(228) $$dQ = (1 - x)\,c\,dt + r\,dx + xh\,dt.$$

C'est encore M. Clausius qui a donné le premier cette équation; le premier terme du second membre $(1 - x)c\,dt$ représente la portion de la chaleur fournie dQ qui a été employée pour élever de dt la température de la masse liquide $(1 - x)$; la quantité de liquide dx se vaporise pendant ce temps et exige pour cela la quantité de chaleur $r\,dx$; enfin le troisième terme $xh\,dt$ représente la portion de dQ qui est transmise à la vapeur déjà formée; l'unité de poids de la vapeur correspond à la quantité de chaleur $h\,dt$, et, par suite, la quantité

(229) $$h = c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}$$

joue, comme M. Clausius l'a déjà fait remarquer, le rôle d'une espèce de chaleur spécifique; $h\,dt$ est la quantité de chaleur qu'il faut communiquer à l'unité de poids de la vapeur pour qu'elle reste saturée après l'élévation de température dt.

Nous emploierons surtout dans la suite les formes sous lesquelles nous avons mis l'équation (222) dans les deux premières transformations; seulement il ne faut point oublier que ces équations ne s'appliquent qu'autant que le changement d'état se fait suivant un trajet reversible. On doit revenir aux équations générales (220) et (221) lorsque la pression extérieure diffère de la pression de la vapeur pendant le chan-

gement. Nous expliquerons mieux l'usage de ces équations en traitant plus loin divers problèmes.

Reste à savoir quelles formes prendront les deux équations fondamentales I et II (p. 76) pour les mélanges de vapeur et de liquide, et si elles se trouvent confirmées par les considérations précédentes.

La première de ces équations fondamentales est

$$\left(\frac{dY}{dp}\right) - \left(\frac{dX}{dv}\right) = 1.$$

Y et X sont donnés par les équations (224) et (225); en effectuant les différentiations qui s'y trouvent indiquées, on a

$$\left(\frac{dY}{dp}\right) = \frac{1}{A}\frac{d}{dp}\left(\frac{r}{u}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{dX}{dv}\right) = \frac{1}{A}\frac{d}{dp}\left(\frac{\rho}{u}\right).$$

Lorsqu'on remplace, dans la première de ces expressions, r par $\rho + Apu$, on trouve l'unité pour la différence des deux quotients différentiels, résultat que donne déjà la première équation fondamentale.

La deuxième équation fondamentale est

$$a + t = Y\left(\frac{dt}{dp}\right) - X\left(\frac{dt}{dv}\right).$$

Comme la température ne dépend ici que de la pression p et est indépendante du volume, on a

$$\left(\frac{dt}{dv}\right) = 0,$$

par suite,

$$Y = (a + t)\frac{dp}{dt};$$

ou bien, à cause de l'équation (225),

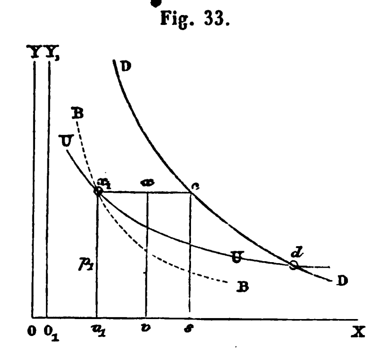
$$\frac{r}{u} = AT\frac{dp}{dt}.$$

C'est cette équation que nous avons déjà donnée, p. 265.

VI. — *Lignes isothermiques et isodynamiques d'un mélange de vapeur et de son liquide, et lignes d'une quantité de vapeur constante.*

Le volume s de l'unité de poids d'une vapeur saturée et sèche est, comme nous le verrons, complétement déterminé par la pression ou par la température correspondante. Prenons les volumes spécifiques s pour les abscisses Os (*fig.* 33),

Fig. 33.



et les pressions p pour les ordonnées d'une courbe DD, que nous avons appelée *ligne d'une quantité de vapeur constante.* Comme nous avons pris de la vapeur saturée, non mélangée avec du liquide, la courbe DD correspond à un kilogramme de vapeur.

Cette courbe est probablement représentée par l'équation

$$ps^n = \text{const.};$$

j'ai montré déjà à la page 286 que cette équation conduit, au moins pour la vapeur d'eau, à des valeurs du volume spécifique s et du poids spécifique $\gamma = 1 : s$, qui coïncident d'une manière remarquable avec celles qu'on a trouvées par une autre méthode.

Je prends maintenant l'unité de poids du mélange de cette même vapeur avec son liquide; si elle contient x kilogrammes de vapeur, son volume v sera déterminé par l'équation (208), n° 264, et ce volume sera toujours plus petit que s sous la

même pression p. Lorsqu'on prend $Ov = v$ pour abscisse et $vx = p$ pour ordonnée, le point x sera toujours situé dans l'espace compris entre la courbe DD et les axes; toutes les fois que la courbe d'un changement quelconque sera hors de cet espace au delà de la ligne DD, elle correspondra à de la vapeur surchauffée. Mais alors les équations générales établies plus haut pour les mélanges de vapeur et de liquide cessent d'être applicables. Pour le moment nous supposerons que les vapeurs soient saturées; par conséquent la courbe DD ne doit pas être dépassée par la ligne qui représente le changement subi par le mélange.

Nous avons appelé *courbe isothermique* celle qui indique comment varie la pression avec le volume, quand la température t reste constante. Puisque la pression p ne dépend ici que de la température, la pression sera aussi constante, et, par suite, la courbe isothermique d'un mélange de vapeur et de liquide est *une ligne droite parallèle à l'axe des abscisses*. La température étant constante, les quantités u, q, ρ et r qui en dépendent sont également constantes. Lorsque le volume v_1 devient v et que la quantité de vapeur x_1 prend la valeur x, le travail extérieur produit est représenté par l'aire du rectangle vv_1x_1x (*fig.* 33); l'expression de ce travail est

$$L = \int_{v_1}^{v} p\,dv = p(v - v_1),$$

ou bien, en vertu des relations $v = xu + \sigma$ et $v_1 = x_1u + \sigma$,

$$(230) \qquad L = pu(x - x_1).$$

La variation du travail intérieur se détermine au moyen de l'équation (220); elle devient, à cause de $dq = 0$,

$$(231) \qquad U - U_1 = \frac{\rho}{A}(x - x_1).$$

La quantité de chaleur qu'il faut fournir au mélange est, par suite,

$$Q = A(U - U_1 + L) = (\rho + Apu)(x - x_1),$$

ou bien, à cause de la relation (205),

$$Q = r(x - x_1), \tag{232}$$

résultat qu'on aurait pu trouver directement par l'intégration de l'équation (227).

Si l'on avait continué la dilatation jusqu'à ce que tout le liquide se fût transformé en vapeur, le point c de la courbe DD aurait été relatif à l'état final, et il faudrait alors faire $x = 1$ dans les équations précédentes. Dans le cas où l'on voudrait continuer encore à augmenter le volume et à introduire de la chaleur à une température constante, la courbe isothermique changerait de forme et deviendrait une hyperbole équilatère passant par le point c (*voyez* p. 118), si l'on admet que les vapeurs surchauffées se comportent exactement comme des gaz permanents.

Les équations précédentes sont évidemment vraies pour un mélange de vapeur et de liquide, lorsque la masse est comprimée et passe du volume v au volume v_1; alors la quantité de vapeur diminue de x à x_1 (il y a condensation). L'équation (230) donne alors le travail de la compression, et l'équation (231) la diminution du travail intérieur; enfin l'équation (232) fournit la quantité de chaleur qu'il faut enlever au mélange pendant ce changement.

Occupons-nous maintenant des lignes isodynamiques, qui représentent un changement d'état, pendant lequel le travail intérieur reste constant.

Il faut faire $dU = 0$ dans l'équation (220), et, par suite,

$$dq + d(x\rho) = 0.$$

En appelant x_1, q_1 et ρ_1 les valeurs de x, q et ρ qui correspondent à la température initiale t_1, l'intégration donnera

$$q - q_1 + x\rho - x_1\rho_1 = 0. \tag{233}$$

Cette équation, jointe aux formules

$$v = xu + \sigma \quad \text{et} \quad v_1 = x_1 u + \sigma,$$

résout la question proposée. Il est vrai qu'on n'obtient pas l'équation de la courbe sous la forme habituelle, de telle sorte

que l'on puisse déduire directement du volume donné v la pression correspondante p; mais on peut néanmoins tracer la courbe. En effet, si l'on donne pour l'état initial la quantité de vapeur x_1 et la température t_1, on connaît aussi la pression p_1 et la quantité u_1. On calcule le volume initial au moyen de l'équation $v_1 = x_1 u_1 + \sigma$. Lorsqu'on suppose que le mélange acquiert une autre pression p en suivant le trajet indiqué, on peut donc déterminer les quantités t, u, q et ρ correspondant à cette pression; alors on calcule la quantité de vapeur x par l'équation (233), et le volume relatif à la pression p au moyen de l'équation $v = xu + \sigma$.

Supposons qu'on ait 1 kilogramme d'un mélange d'eau et de sa vapeur, que la vapeur pèse $x_1 = 0{,}80$ et que la pression p_1 soit de 5 atmosphères; la Table X (de l'Appendice) donne pour cet état

$$q_1 = 153{,}741, \quad \rho_1 = 454{,}99 \quad \text{et} \quad u_1 = 0{,}3626.$$

De là on tire pour le volume

$$v_1 = x_1 u_1 + \sigma = 0^{\text{mc}},2911.$$

Si le changement de volume suivant la courbe isodynamique avait continué jusqu'à ce que la pression fût réduite à 1 atmosphère, on aurait eu pour cette pression

$$q = 100{,}500, \quad \rho = 496{,}30 \quad \text{et} \quad u = 1{,}6494.$$

La quantité de vapeur x relative à l'état final serait d'après l'équation (233)

$$x = \frac{x_1 \rho_1 + q_1 - q}{\rho} = 0^{\text{kil}},8407.$$

Pour le volume final on aurait

$$v = xu + \sigma = 1{,}3876,$$

et pour le rapport de la détente

$$\frac{v}{v_1} = 4{,}766.$$

On voit qu'à la fin de l'expansion il y a un peu plus de va-

peur qu'au commencement; on en conclut qu'il y a *vaporisation* dans la dilatation de la vapeur d'eau suivant une ligne isodynamique, et qu'il y a inversement *condensation de vapeur* pendant la compression. Si l'on calculait de la même manière les valeurs de v correspondant à une série de valeurs différentes de p, on pourrait suivre facilement la ligne isodynamique passant par le point x_1 (*fig.* 33) : son tracé est indiqué dans la figure par la courbe Ux_1U. Je n'ai pu parvenir à déduire des équations générales l'équation de cette courbe sous la forme $p = F(v)$; mais en calculant une série d'exemples particuliers je me suis convaincu qu'on peut, au moins pour l'eau, déterminer avec une exactitude assez grande les différents points de la courbe isodynamique qui correspond à un certain état initial ($p_1\, v_1\, x_1$) en se servant de la formule

$$pv^{\nu} = p_1 v_1^{\nu};$$

l'exposant ν, étant déterminé d'après un certain état initial, reste à peu près constant. Ainsi pour la vapeur d'eau, en supposant que $x_1 = 1$, c'est-à-dire qu'il n'y ait au commencement que de la vapeur saturée, et qu'il se fasse ensuite une compression suivant la courbe isodynamique, on trouve une valeur moyenne de ν égale à 1,0456. Je n'ajoute pas d'autres indications pour le moment, parce que nous traiterons une question analogue en étudiant les lignes adiabatiques. Nous ne voulons pas aller ici plus loin que ne le permettent les formules générales données plus haut.

Nous venons de voir que l'expansion suivant la ligne isodynamique d'un mélange d'eau et de vapeur est accompagnée d'une vaporisation. Il est facile d'établir une relation qui montre si d'autres vapeurs se comportent de la même manière ou d'une manière inverse, s'il n'y a pas de vapeurs pour lesquelles une expansion suivant la courbe isodynamique est accompagnée d'une condensation de vapeur.

Supposons que nous ayons de la vapeur sèche et saturée, faisons $x_1 = 1$ dans l'équation (233), il viendra alors

$$x = \frac{\rho_1 + q_1 - q}{\rho},$$

ou bien

$$x = 1 - \frac{(\rho + q) - (\rho_1 + q_1)}{\rho}.$$

Imaginons qu'il y ait compression et que la vapeur considérée se comporte comme la vapeur d'eau, c'est-à-dire qu'elle se condense en partie quand la pression et la température augmentent; on doit avoir alors $x < 1$, ce qui arrivera lorsque la différence

$$(\rho + q) - (\rho_1 + q_1)$$

est positive. Il faut donc que l'expression

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{dq}{dt}$$

soit positive. Comme on peut partir d'une température quelconque, il est plus simple d'examiner les valeurs de ces deux coefficients différentiels pour $t = 0$. Mais les valeurs de ρ et de q sont connues en fonction de la température t pour une série de vapeurs, p. 273 et 254; les coefficients différentiels sont donc faciles à déterminer. Ainsi on a, d'après ces formules, pour la vapeur d'éther,

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_0 = 0,52901 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_0 = -0,10648;$$

leur somme est positive : *la vapeur d'éther se comporte donc comme la vapeur d'eau, relativement au changement d'état que nous examinons.* On peut se convaincre aisément que la même chose a lieu avec toutes les vapeurs mentionnées à la page 273, pour lesquelles on peut répéter le même genre de calcul. Ainsi pour toutes ces vapeurs, il y a vaporisation lorsque l'expansion se fait suivant la courbe isodynamique; la courbe Ux_1U (*fig.* 33) qui correspond à une quantité de vapeur $x_1 < 1$ et à une certaine pression p_1 coupe donc la courbe-limite DD en un point d situé plus près de l'axe des abscisses OX que le point x_1.

Nous concluons de plus que « la courbe relative à une quantité de vapeur constante » qui correspond au même point ini-

tial et à la valeur $x_1 =$ const. se rapproche davantage de l'axe des abscisses que la courbe isodynamique. On a ponctué cette courbe $B x_1 B$ dans la *fig.* 33; son tracé est facile à obtenir pour toutes les vapeurs contenues dans les Tables de l'Appendice. Soient p_1 et v_1 les valeurs initiales de la pression et du volume, quand la quantité de vapeur est x_1; comme la quantité de vapeur doit être la même pour une autre pression p, nous trouvons pour le volume correspondant

$$v = x_1 u + \sigma;$$

quant à la courbe-limite DD pour laquelle la quantité de vapeur est l'unité, on a sous la même pression un volume spécifique de vapeur

$$s = u + \sigma.$$

Supposons maintenant que l'on compte les abscisses v et s à partir d'un axe des ordonnées $O_1 Y_1$ tel que $OO_1 = \sigma$ (*fig.* 33) et qui représente la courbe *d'une quantité de vapeur constante* correspondant à $x_1 = 0$; on a alors les abscisses

$$v - \sigma = x_1 u \quad \text{et} \quad s - \sigma = u.$$

En éliminant u entre ces deux équations, on a

$$v - \sigma = x_1 (s - \sigma).$$

Quand on a tracé la courbe-limite DD, il est facile de construire la courbe relative à toute autre quantité de vapeur $x_1 < 1$; les abscisses qui correspondent à une même pression sont entre elles dans un rapport constant qui a pour expression, d'après notre figure,

$$x_1 = \frac{\overline{O_1 v_1}}{\overline{O_1 s}}.$$

Lorsque la quantité de vapeur x_1 ne diffère pas beaucoup de l'unité, on peut négliger dans les formules précédentes la quantité σ qui est alors très-petite, et écrire

$$x_1 = \frac{v}{s}.$$

Quand la courbe-limite peut être représentée par l'équation

$$ps^n = p_1 s_1^n,$$

comme cela nous paraît très-probable, au moins pour la vapeur d'eau, nous pouvons trouver aussi sans difficulté l'équation de la courbe qui correspond à la quantité de vapeur constante x_1; multiplions les deux membres de la dernière équation par x_1^n, il viendra

$$p(x_1 s)^n = p_1 (x_1 s_1)^n \quad \text{ou bien} \quad pv^n = p_1 v_1^n.$$

Nous avons trouvé pour la vapeur d'eau $n = 1{,}0646$ (p. 286), les courbes de quantités de vapeur constantes forment par conséquent une série de courbes pour chacune desquelles la constante $p_1' v_1^n$ peut se déterminer à l'aide de la quantité de vapeur donnée x_1 et de la pression initiale p_1. Quoique la coïncidence des résultats de cette formule avec ceux qu'on déduit des déterminations exactes soit presque parfaite, au moins pour la vapeur d'eau, nous ne l'emploierons plus dans la suite, parce qu'elle doit être considérée comme une simple formule empirique.

Dans ce qui précède, nous avons montré que l'on peut se servir de nos Tables pour tracer exactement les *courbes isodynamiques* et les *courbes d'une quantité de vapeur constante* de diverses substances; il se présente encore plusieurs autres questions.

Ainsi on peut se demander quelle quantité de chaleur il faut fournir ou soustraire au mélange, quel travail extérieur on gagne ou on dépense, lorsque le changement d'état se fait suivant une courbe isodynamique, c'est-à-dire quand le travail intérieur reste constant.

Comme $dU = 0$, l'équation fondamentale

$$dQ = A(dU + p\,dv)$$

donne ici

$$dQ = Ap\,dv.$$

On conclut de là que, dans le cas de l'expansion, toute la chaleur fournie est transformée en travail extérieur et qu'inverse-

ment dans la compression il faut soustraire toute la chaleur qui correspond au travail dépensé. Il suffit donc de trouver le travail extérieur L puisque la chaleur $Q = AL$ sera alors déterminée.

Or nous avons

$$dv = d(xu + \sigma) = d(xu),$$

et, par suite,

$$dL = pd(xu).$$

Cette équation peut s'écrire

$$dL = d(xpu) - xu\,dp.$$

En remplaçant le facteur $u\,dp$ par sa valeur tirée de l'équation (212), que l'on multiplie et divise en même temps par ρ, on obtient

$$(234) \qquad dL = d(xpu) - x\rho \frac{r}{A\rho T} dt.$$

Le premier terme du second membre est intégrable ; on peut de même supposer que l'intégration du second terme soit faite après qu'on a remplacé $x\rho$ par sa valeur donnée par l'équation (233), à condition cependant qu'on ait d'abord mis à la place des fonctions de la température $\frac{r}{A\rho T}$ et $\frac{r}{A\rho T} q$ des formules empiriques plus simples.

Nous ne poursuivrons pas plus loin ce problème, parce que nous ne nous servirons pas dans la suite des résultats auxquels il conduirait.

Lorsqu'on considère un changement du mélange de vapeur et de liquide tel, que les quantités de vapeur restent constantes, on arrive à des conclusions plus importantes.

Supposons que la quantité de vapeur $x = x_1 =$ const., alors on trouvera d'après l'équation (220) pour la variation du travail intérieur mesurée en unités de chaleur

$$(235) \qquad A\,dU = dq + x_1\,d\rho,$$

et, par suite, si l'on suppose que q et ρ soient donnés en fonc-

tion de la température t,

$$A \frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt} + x_1 \frac{d\rho}{dt}.$$

Quand la températrure s'élève, c'est-à-dire quand il y a compression, on a toujours une augmentation du travail intérieur; car la valeur du second membre est positive pour les différentes vapeurs que nous pouvons soumettre au calcul même avec le maximum de la quantité de vapeur, c'est-à-dire avec $x_1 = 1$.

L'intégration donne d'ailleurs

$$A(U - U_1) = q - q_1 + x_1(\rho - \rho_1).$$

La quantité de chaleur qu'il faut fournir ou soustraire au mélange pour que le changement d'état se fasse avec une quantité de vapeur constante $x = x_1$, se trouve au moyen de l'équation (228) quand on y fait $dx = 0$; on a alors

$$(236) \qquad dQ = (1 - x_1) c\,dt + x_1 h\,dt.$$

Le premier terme du second membre, dans lequel nous pouvons remplacer $c\,dt$ par dq, donne la quantité de chaleur qu'exige le liquide du mélange, tandis que le second terme représente la quantité de chaleur qu'exige le poids x_1 de vapeur pour que la température s'élève de dt; il faut par conséquent fournir à l'unité de poids de vapeur $h\,dt$ unités de chaleur pour que la vapeur reste saturée à la température $t + dt$. La quantité h, qui a été introduite par M. Clausius, joue le rôle d'une chaleur spécifique: c'est *la chaleur spécifique de la vapeur saturée quand la quantité de vapeur reste constante;* sa valeur est

$$h = c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T};$$

elle se présente comme une fonction de la température, que l'on peut trouver pour différentes vapeurs, puisque les expériences de M. Regnault nous donnent les valeurs de r et de $c = \frac{dq}{dt}$ en fonction de la température.

En introduisant la chaleur totale λ à l'aide de l'équation $\lambda = q + r$, on peut écrire :

$$(237) \qquad h = \frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda - q}{T}.$$

Appliquons les considérations à la vapeur d'eau. En nous servant des formules de la page 259, nous trouvons

$$(238)\ h = 0{,}305 - \frac{606{,}5 - 0{,}695\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3}{273 + t}.$$

Cette équation permet de conclure que les valeurs de h sont *négatives* pour les températures auxquelles les formules empiriques de M. Regnault sont applicables; on trouve, en effet, aux températures 0, 100 et 200 degrés, respectivement

$$h = -1{,}9166, \quad -1{,}1333 \quad \text{et} \quad -0{,}6766.$$

Le premier terme du second membre de l'équation (236) représente la quantité de chaleur qu'il faut fournir à la masse liquide $(1 - x_1)$ pendant l'élévation de température dt, c'est-à-dire pendant la compression; mais la quantité de vapeur x_1 exige qu'on *enlève* de la chaleur si elle doit rester constante. Inversement, pendant l'expansion du mélange, il faut *enlever* au liquide de la chaleur et en *fournir* à la vapeur lorsque la quantité de vapeur reste constante.

Supposons qu'il y ait au commencement de la vapeur saturée et sèche, c'est-à-dire qu'on ait $x_1 = 1$, ou, en d'autres termes, que l'expansion se fasse suivant la courbe limite DD (*fig.* 33) : la quantité de chaleur qu'il faut fournir sera, d'après l'équation (236),

$$(239) \qquad Q = \int_{t_1}^{t_2} h\,dt,$$

où t_1 et t_2 désignent les températures initiale et finale; cette expression conduit à une valeur positive pour l'expansion parce qu'on a $t_2 < t_1$. Si donc on *ne fournissait point* de chaleur pendant l'expansion, *la vapeur se condenserait*, au moins quand il s'agit de la vapeur d'eau.

Cette propriété remarquable de la vapeur a été découverte par MM. Clausius et Rankine; les expériences de M. Hirn ont, depuis, mis hors de doute l'exactitude de ce résultat du calcul; il est aussi confirmé par mes observations sur l'écoulement de la vapeur d'eau saturée, sur lesquelles je reviendrai plus tard.

Cette découverte constitue sans contredit un des résultats les plus remarquables auxquels ait conduit la théorie mécanique de la chaleur, car elle démontre que l'hypothèse sur laquelle de Pambour a basé sa théorie des machines à vapeur est inadmissible. De Pambour suppose, comme on sait, que la vapeur *reste saturée* pendant l'expansion dans le cylindre d'une machine à vapeur, *et qu'il n'y a point de condensation malgré la diminution de la température et de la pression*. Il admet que les variations de la pression ont lieu suivant la courbe DD de la *fig.* 33; mais cette supposition est inadmissible, d'après ce qui précède. Nous avons montré, en effet, qu'il doit y avoir introduction de chaleur pendant l'expansion pour que la quantité de vapeur reste constante, mais comme il n'y a pas de chaleur introduite à travers les parois du cylindre, la vapeur se condensera pendant l'expansion; la vapeur reste bien saturée, mais la quantité de vapeur ne reste pas constante, comme le prétend de Pambour : elle diminue. La vapeur sèche et saturée se surchaufferait, au contraire, pendant la compression, si on ne lui enlevait pas la quantité de chaleur déterminée par l'équation (238).

De Pambour suppose encore, dans ses calculs, que la vapeur saturée suit les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, et il se sert par conséquent de la formule de Navier $\gamma = \alpha + \beta p$ pour calculer la densité de la vapeur. Mais nous avons fait remarqué (p. 281) que la théorie mécanique de la chaleur ne peut pas admettre cette seconde hypothèse. Il est donc temps que l'ancienne théorie des machines à vapeur soit remplacée par une nouvelle; nous reviendrons sur cette question.

Les formules (235) et (236) donnent respectivement la variation du travail intérieur dU, et la quantité de chaleur à fournir dQ. Quant au travail extérieur dL qu'on dépense dans

la compression, ou qu'on gagne dans l'expansion, la quantité de vapeur x_1 restant constante, il se déduit de l'équation fondamentale

$$dQ = A dU + A dL,$$

qui donne, en vertu des formules précédentes,

$$(240) \qquad A dL = x_1 (h dt - dq - d\rho).$$

Le travail extérieur mesuré en unités de chaleur est donc proportionnel à la quantité de vapeur x_1, ce qu'on devait prévoir, puisque la quantité constante de liquide qui se trouve avec la vapeur ne participe pas au changement de volume. Pour faciliter la résolution de certains problèmes relatifs à ce genre de recherches, j'ai calculé exactement, pour la vapeur d'eau et à diverses pressions, les valeurs de l'intégrale $-\int_0^t h dt$, et je les ai inscrites dans la colonne 3 du tableau suivant (*); le calcul de cette intégrale se fait sans difficulté, à l'aide de l'équation (238).

Appliquons les formules précédentes à un exemple numérique. Supposons que l'unité de poids de la vapeur d'eau sèche et saturée soit renfermée dans un cylindre, à la pression de 5 atmosphères; on veut que cette vapeur se détende en produisant du travail, jusqu'à ce que la pression soit réduite à 1 atmosphère, et sans que la vapeur se surchauffe ou se condense partiellement. Il faut faire $x = x_1 = 1$ dans les équations précédentes. L'équation (236) donne alors la quantité de chaleur qu'il faut fournir à la vapeur; en désignant par t_1 et t_2 les

(*) Le tableau de la page 307 contient, outre les quantités dont nous venons de parler, d'autres quantités dont nous ferons usage dans la suite. Joint à la Table X de l'Appendice, il est très-utile pour la solution de différents problèmes sur la vapeur d'eau. On pourrait calculer des tableaux auxiliaires analogues pour les autres vapeurs, mais on n'en a pas eu besoin jusqu'ici. Lorsqu'une de ces vapeurs recevra des applications plus grandes, il sera toujours facile de remplir la lacune à l'aide des indications du texte.

Tableau auxiliaire relatif à la vapeur d'eau saturée.

PRESSION p en atmosphères.	$\frac{dp}{dt}$ en kilogrammes par mètre carré.	$-\int_0^t h\,dt$	$\tau=\int_0^t \frac{dq}{T}$	r	$\frac{r}{T}$	$\frac{1}{A}\frac{dq}{dp}$	$\frac{1}{A}\frac{d}{dp}\left(\frac{\rho}{u}\right)$	$\frac{r}{Apu}$	$\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{u}\right)$
— 1 —	— 2 —	— 3 —	— 4 —	— 5 —	— 6 —	— 7 —	— 8 —	— 9 —	— 10 —
0,5	207,423	126,747	0,26273	549,404	1,54887	2,0631	11,976	14,229	5,859
1	369,708	148,470	0,31356	536,500	1,43834	1,1618	11,088	13,344	9,668
2	653,927	170,639	0,36814	521,866	1,32588	0,6600	10,194	12,453	15,722
3	909,307	183,778	0,40205	512,353	1,25913	0,4763	9,675	11,935	20,749
4	1146,689	193,163	0,42711	505,110	1,21129	0,3788	9,299	11,568	25,149
5	1371,141	200,457	0,44693	499,186	1,17395	0,3175	9,014	11,284	29,160
6	1585,431	206,394	0,46392	494,124	1,14322	0,2752	8,774	11,052	32,808
7	1791,502	211,481	0,47840	489,686	1,11714	0,2440	8,557	10,856	36,155
8	1990,199	215,862	0,49120	485,709	1,09441	0,2201	8,409	10,684	39,471
9	2183,469	219,726	0,50270	482,093	1,07425	0,2009	8,264	10,535	42,557
10	2371,153	223,178	0,51297	478,776	1,05617	0,1853	8,143	10,401	45,533
11	2554,223	226,292	0,52266	475,707	1,03980	0,1723	8,004	10,280	48,217
12	2732,873	229,134	0,53150	472,839	1,02477	0,1613	7,896	10,168	50,892
13	2907,722	231,752	0,53975	470,141	1,01088	0,1518	7,794	10,066	53,450
14	3079,063	234,165	0,54744	467,600	0,99801	0,1435	7,699	9,971	55,910

températures initiale et finale, on a

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} h\,dt = -\int_{0}^{t_1} h\,dt - \left(-\int_{0}^{t_2} h\,dt\right),$$

et, en se servant des valeurs de la colonne 3 du tableau auxiliaire précédent,

$$Q = 200,457 - 148,470 = 51^{cal},987.$$

Cette quantité de chaleur est donc très-considérable; si l'on supposait que les parois chaudes du cylindre pussent fournir de la chaleur à la vapeur qui se détend, cette chaleur ne serait pas suffisante pour conserver constante la quantité de vapeur, pour empêcher sa condensation partielle; la chaleur devrait certainement être tirée d'une source spéciale.

La variation du travail intérieur se calcule à l'aide de l'équation

$$A(U_2 - U_1) = q_2 - q_1 + \rho_2 - \rho_1.$$

Mais, d'après la Table X (de l'Appendice), on a, pour une pression de 5 atmosphères,

$$q_1 = 153,741, \quad \rho_1 = 454,994,$$

et, pour une pression de 1 atmosphère,

$$q_2 = 100,500, \quad \rho_2 = 496,300;$$

d'où l'on déduit

$$A(U_2 - U_1) = -11^{cal},935:$$

le signe (—) indique qu'il y a diminution du travail intérieur.

Enfin le travail extérieur, ou travail d'expansion correspondant à une quantité de vapeur constante, sera ici

$$AL = Q - A(U_2 - U_1) = 63^{cal},922,$$

ou bien

$$L = 424 \times 63,922 = 27\,102^{kgm},9.$$

Dans le cas actuel, outre la chaleur fournie Q, il y a encore

une partie du travail intérieur qui est employée à la production du travail extérieur.

M. Clausius a montré, dans son premier Mémoire, que le signe de la fonction h, qui dépend de la température, indique s'il faut fournir ou soustraire de la chaleur à la vapeur saturée pendant son expansion, pour qu'elle reste saturée, sans qu'il y ait en même temps condensation partielle. A cette époque, on ne possédait que pour la vapeur d'eau les données expérimentales qu'exige l'étude de cette question. Mais depuis que M. Regnault a publié les résultats de ses expériences sur d'autres vapeurs, il est facile de voir si elles se comportent comme la vapeur d'eau. Il suffit de déterminer pour chaque vapeur le signe de h à diverses températures. La détermination de ce signe peut se faire aussi au moyen de la fonction $h\mathrm{T}$; en effet, d'après l'équation (237), on a

$$(241) \qquad h\mathrm{T} = (a+t)\frac{d\lambda}{dt} - \lambda + q.$$

Pour les vapeurs dont on connaît, d'après M. Regnault (p. 259), la chaleur totale λ, ainsi que la quantité q (p. 254) en fonction de la température, on trouve, à l'aide de la dernière équation :

Vapeur d'eau :

$$h\mathrm{T} = -523,23 + t + 0,000\,02\,t^2 + 0,000\,000\,3\,t^3;$$

Vapeur d'éther :

$$h\mathrm{T} = +28,85 + 0,2257\,t - 0,000\,2596\,t^2;$$

Vapeur d'acétone :

$$h\mathrm{T} = -40,473 + 0,2247\,t - 0,000\,119\,t^2;$$

(*) *Voyez* les Mémoires de l'auteur dans le *Bulletin trimestriel de la Société d'Histoire naturelle de Zurich*, année 1863, p. 68 : *Das Verhalten verschiedener Dämpfe bei der Expansion und Compression;* et *Tabelle fur gesättigte Aetherdämpfe*. *Voyez* aussi : *Exposé des principes de la théorie mécanique de la chaleur*, par M. Combes (*Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale*, Paris, 1863-1864).

Vapeur de chloroforme :

$$hT = -29,462 + 0,2323\,t - 0,0000507\,t^2;$$

Vapeur de chlorure de carbone :

$$hT = -12,087 + 0,1041\,t - 0,000081\,t^2;$$

Vapeur de sulfure de carbone :

$$hT = -50,139 + 0,0101\,t - 0,0003308\,t^2.$$

Ces formules montrent que, pour toutes les vapeurs mentionnées et dans les limites de la température pour lesquelles les formules de M. Regnault sont applicables, la valeur de hT, et, par suite, celle de la fonction h *sont négatives, la vapeur d'éther seule* fait exception à cette règle.

Ces vapeurs se comportent donc comme la vapeur d'eau. Quand on a au commencement de l'opération de la vapeur sèche et saturée, il y aura dans l'expansion une condensation de vapeur, et dans la compression la vapeur se surchauffera toutes les fois qu'on ne fournira et qu'on ne soustraira pas de chaleur. La vapeur d'éther seule se comporte d'une manière opposée; elle se surchauffe dans l'expansion, et elle se condense en partie dans la compression. M. Hirn (*) a, le premier, appelé l'attention sur cette propriété inverse de la vapeur d'éther. Mais cette vapeur est seule dans ce cas; toutes les autres vapeurs que nous avons étudiées spécialement se rangent à côté de la vapeur d'eau; il en est de même de celles de l'alcool et de la benzine, qui n'ont pas été mentionnées plus haut, parce qu'on ne peut pas représenter pour elles la quantité hT par une fonction de la température; il nous manque, pour la vapeur d'alcool, la formule qui donne la chaleur totale λ et, pour la vapeur de benzine, celle qui donne la chaleur du liquide q.

(*) Hirn, *Confirmation expérimentale de la seconde proposition de la théorie mécanique de la chaleur et des équations qui en découlent* (*Cosmos*, XIIe année, t. XXII, p. 413).

Les formules précédentes montrent que le premier terme du second membre, indépendant de t, décide déjà du signe de hT; ce terme représente la valeur de hT pour $t=0$: il suffit donc de le déterminer. Pour cela, faisons $t=0$ dans l'équation (241), et affectons les quantités relatives à cette température de l'indice 0, nous aurons, puisque $q_0=0$,

$$(h\mathrm{T})_0 = a\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_0 - \lambda_0.$$

Mais, d'après M. Regnault, la formule empirique qui donne la chaleur totale peut s'écrire

$$\lambda = \alpha + \beta t + \delta t^2,$$

dans laquelle α, β et δ sont des constantes que M. Regnault a déterminées pour les différentes vapeurs.

On en tire

$$\frac{d\lambda}{dt} = \beta + 2\delta t,$$

et, par suite, pour $t=0$,

$$\lambda_0 = \alpha \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_0 = \beta,$$

d'où enfin

$$(h\mathrm{T})_0 = \beta a - \alpha.$$

Pour la vapeur de benzine, M. Regnault donne (*Remarque*, p. 260)

$$\lambda = 109{,}00 + 0{,}24429t - 0{,}0001315t^2.$$

D'après cela, $\alpha = 109{,}00$; $\beta = 0{,}24429$, et comme $a=273$, il vient

$$(h\mathrm{T})_0 = -42{,}309.$$

Cette vapeur se comporte donc comme la vapeur d'eau.

On ne peut se servir du même procédé quand il s'agit de la vapeur d'alcool; mais le signe de $(h\mathrm{T})_0$ peut aussi se trouver à l'aide de notre tableau.

L'équation

$$h = c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{\mathrm{T}}$$

peut s'écrire

$$h\,dt = c\,dt + \mathrm{T}d\left(\frac{r}{\mathrm{T}}\right),$$

d'où l'on tire, en remplaçant $c\,dt$ par dq,

$$\int \frac{h\,dt}{\mathrm{T}} = \int \frac{dq}{\mathrm{T}} + \frac{r}{\mathrm{T}}.$$

Il est clair que la valeur du second membre de cette équation doit diminuer quand la température s'élève, lorsque h est négatif, et cette diminution a réellement lieu; en effet, on obtient pour les valeurs du second membre relatives aux températures 0, 40 et 80 degrés respectivement, 3,1413; 3,1172 et 3,0447, quand on emploie pour r les chiffres correspondants du tableau, et lorsqu'on se sert de l'équation (192), p. 254.

En résumé, nous avons trouvé que, sur huit espèces de vapeurs, la vapeur d'éther seule a la propriété inverse indiquée. On ne sait donner jusqu'à présent l'explication de ce fait (*).

(*) Les calculs qui précèdent n'ont été faits que pour des températures peu élevées, et les conclusions doivent subir une modification importante. Lorsque t augmente, à partir de zéro, dans le deuxième membre de la formule (241), ce membre, d'abord négatif, augmente algébriquement, devient nul, puis positif et continue à croître. C'est vers 120 degrés pour le chloroforme, et 100 degrés pour la benzine, que cette inversion a lieu. Ainsi, pour ces deux vapeurs, la quantité h serait négative aux basses températures, nulle à une certaine température, et positive aux températures supérieures. Au-dessous de la *température d'inversion*, il y aurait condensation partielle de vapeur par la détente, et surchauffement par la compression; au-dessus de cette température les phénomènes seraient inverses. Cette curieuse indication de la théorie, soupçonnée d'abord par M. Rankine, puis formulée par MM. Combes et Dupré, a été récemment vérifiée par l'observation, pour le chloroforme et la benzine (*Mémoire sur la détente et la compression des vapeurs saturées*, par M. Cazin : *Annales de Chimie et de Physique*, juillet 1863). L'exception apparente de l'éther, dont il est question dans le texte, se trouve maintenant expliquée : c'est vers — 115° qu'aurait lieu l'inversion; voilà pourquoi, aux températures ordinaires et élevées, cette vapeur diffère de la vapeur d'eau dans les mêmes circonstances. Au contraire, c'est vers + 520° que cette dernière subirait l'inversion, et il est difficile d'observer l'effet produit à de telles températures. Le chloroforme et la benzine se prêtaient heureusement à une recherche expérimentale, parce que leurs températures d'inversion sont accessibles. (*Note des Traducteurs.*)

VII. — *Lignes adiabatiques d'un mélange de vapeur et de liquide.*

La ligne adiabatique montre comment la pression varie avec le volume, lorsque pendant l'expansion ou la compression il n'y a ni addition ni soustraction de chaleur.

Comme nous supposons toujours qu'il y ait égalité entre la pression extérieure et la force expansive du mélange, nous pouvons nous servir de l'équation (227), p. 291, en y faisant $dQ = 0$; on a alors

$$0 = dq + \mathrm{T}d\left(\frac{xr}{\mathrm{T}}\right),$$

équation qui est intégrable; si l'on divise par T et si l'on pose

$$\int_0^t \frac{dq}{\mathrm{T}} = \tau, \tag{242}$$

il vient

$$\frac{xr}{\mathrm{T}} + \tau = \text{const.}$$

L'intégrale τ peut se calculer, pour les diverses vapeurs, à l'aide des formules qui donnent q (p. 254); pour la vapeur d'eau, on trouve les valeurs de cette intégrale dans la colonne 4 du tableau auxiliaire, p. 307.

En désignant par t_1, τ_1 et r_1 les valeurs initiales de t, τ et r, on a

$$\frac{xr}{\mathrm{T}} + \tau = \frac{x_1 r_1}{\mathrm{T}_1} + \tau_1, \tag{243}$$

équation qui fournit le moyen de calculer la quantité de vapeur x pour une température quelconque t, et la pression correspondante p.

C'est cette équation qui a été établie pour la première fois par MM. Clausius et Rankine, et qui indique aussi les propriétés remarquables des vapeurs saturées que nous avons signalées à propos des recherches relatives à la courbe d'une

quantité constante de vapeur; mais elle les montre d'une manière plus explicite, car elle n'indique pas seulement que la quantité de vapeur varie dans le changement d'état suivant la courbe adiabatique, qu'il y a par conséquent vaporisation ou condensation; elle permet encore de calculer la quantité spécifique de vapeur x à chaque instant.

M. Clausius écrit autrement cette formule: il considère dans l'expression $dq = c\,dt$, la chaleur c du liquide comme à peu près constante (il prend pour l'eau $c = 1{,}013$, ce qui correspond à la température de 100 degrés, tandis que j'ai adopté la valeur moyenne 1,0224 dans les écrits que j'ai publiés jusqu'ici, et qui avaient pour objet des applications techniques où les températures sont élevées). On trouve alors approximativement à cause de l'équation (242),

$$\tau = \int_0^t \frac{c\,dt}{T} = c \operatorname{lognép} \frac{T}{a},$$

et on a, au lieu de l'équation (243),

$$\frac{xr}{T} = \frac{x_1 r_1}{T_1} + c \operatorname{lognép} \frac{T_1}{T}:$$

c'est cette forme que M. Clausius a adoptée.

Je supposerai néanmoins dans la suite que la fonction τ de la température ait été calculée exactement, parce que sa détermination rigoureuse n'offre pas de difficultés, et parce que notre tableau auxiliaire nous dispense de nouveaux calculs dans la résolution de problèmes numériques; nous nous servirons donc toujours de l'équation (243).

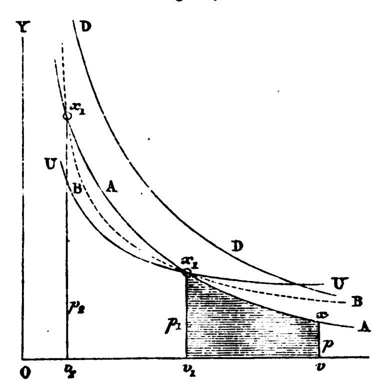
On peut facilement tracer de la manière suivante la courbe adiabatique qui passe par un point x_1 (*fig.* 34) correspondant à l'état initial (p_1, v_1, x_1). Supposons qu'on donne la température initiale t_1 et la quantité spécifique de vapeur x_1; on connaît alors la pression p_1 et la quantité u_1 correspondantes. Le volume initial de l'unité de poids du mélange est donné par la relation

$$v_1 = x_1 u_1 + \sigma.$$

A une autre pression p et à la température correspondante t,

on trouve la quantité de vapeur x à l'aide de l'équation (243). C'est pour faciliter ces calculs qu'on a inscrit dans les co-

Fig. 34.



lonnes 4 et 6 du tableau auxiliaire (p. 307) les valeurs de τ et de $\frac{r}{T}$; la chaleur de vaporisation y a été calculée par la formule $r = \rho + Apu$ à l'aide de la Table X (de l'Appendice); la colonne 5 du tableau auxiliaire contient ces valeurs.

Si on trouve $x > x_1$, une vaporisation a lieu, tandis que si $x < x_1$, il y a condensation; lorsque dans le premier cas $x > 1$, cela montre que la vapeur s'est surchauffée, et alors on ne peut plus appliquer nos formules, parce qu'elles ne sont vraies qu'autant que les vapeurs sont saturées.

Quand x est déterminé et quand on a trouvé $x \leqq 1$, il vient, pour le volume correspondant du mélange,

$$v = xu + \sigma;$$

et, pour le rapport de compression, que nous désignerons dorénavant par ε,

$$\varepsilon = \frac{v_1}{v}.$$

On peut donc, en partant d'un certain état initial, calculer le volume spécifique v correspondant à une pression quelconque, et, par suite, construire graphiquement la courbe adia-

batique relative au mélange de vapeur et de liquide. Il est vrai qu'on ne peut pas trouver par la théorie l'équation de cette courbe sous la forme $p = f(v)$; ce n'est qu'au moyen de détours qu'on obtient un certain nombre de points isolés. C'est cette raison qui a empêché jusqu'à présent que les formules de la théorie mécanique de la chaleur fussent appliquées d'une manière générale au calcul des machines à vapeur; mais donnons d'abord un exemple numérique.

On a dans un cylindre 1 kilogramme de vapeur d'eau saturée et sèche sous la pression de 4 atmosphères; alors $x_1 = 1$ kilogramme, et d'après le tableau auxiliaire (p. 307)

$$\tau_1 = 0,42711, \quad \frac{r_1}{T_1} = 1,21129;$$

et

$$u_1 = 0,4474,$$

d'après la Table X (de l'Appendice).

Pour le volume initial, il vient

$$v_1 = u_1 + \sigma = 0^{mc},4484,$$

et, en vertu de l'équation (243),

$$\frac{xr}{T} + \tau = 1,63840.$$

La vapeur continue à se dilater en surmontant une résistance égale à sa force expansive, sans qu'on lui ajoute ni qu'on lui enlève de la chaleur, et lorsque la pression est descendue à 1 atmosphère, on trouve

$$x = 0^{kil},9211,$$

puisque les valeurs de τ et de $\frac{r}{T}$, qui correspondent à cette pression (p. 307), sont $\tau = 0,31356$ et $\frac{r}{T} = 1,43834$.

Ici on a $x < x_1$; il y a condensation pendant la détente : nous devions nous attendre à ce résultat d'après ce qui a été dit à la page 304.

A la pression de 1 atmosphère correspond (Table X) la valeur $u = 1,6494$, et, par suite, on aura pour le volume du mé-

lange

$$v = xu + \sigma = 1^{mc},5203.$$

Le rapport de la détente sera

$$\varepsilon = \frac{v}{v_1} = 3,390.$$

La quantité de vapeur condensée est $1 - x = 0^{kil},0789$; elle est assez petite, elle a néanmoins une influence notable sur le résultat final; car sans cette condensation on aurait eu

$$v = u + \sigma = 1,6504$$

et

$$\varepsilon = \frac{v}{v_1} = 3,681.$$

Pour la vapeur d'eau saturée et sèche l'expansion est donc accompagnée d'une condensation partielle; avec une compression, au contraire, nous aurions trouvé $x > 1$, ce qui eût prouvé que la compression ne peut avoir lieu sans que la vapeur se surchauffe; on suppose toujours que dans l'état initial il n'y ait pas d'eau liquide, en d'autres termes que le point x_1 (*fig.* 34) se trouve sur la courbe-limite DD. La courbe adiabatique se rapproche donc davantage de l'axe des abscisses que la courbe DD et reste en dehors de l'espace qui correspond à la vapeur surchauffée. Les autres vapeurs qui se trouvent dans les Tables de l'Appendice donnent les mêmes résultats, à l'exception de la vapeur d'éther, pour laquelle l'équation (243) donne $x > 1$ dans le cas de l'expansion, quand $x_1 = 1$ (*).

En examinant de plus près l'équation (243) on voit que les phénomènes peuvent changer complétement quand on ne suppose plus que la vapeur saturée soit sèche au commencement d'un changement d'état qui suit une ligne adiabatique.

Nous allons étudier d'abord l'autre cas extrême, celui où il n'y a que le liquide seul au commencement (1 kilogramme) à

(*) On a vu, p. 312, à quelle restriction ces conclusions sont aujourd'hui soumises. (*Note des Traducteurs.*)

la température t_1 et sous une pression extérieure p_1 égale à celle de la vapeur qui correspond à cette température. Le liquide se trouve, par exemple, dans un cylindre muni d'un piston qui repose sur sa surface et qui est soumis à une pression extérieure p_1. Lorsqu'on diminue cette pression, le piston recule, et il se forme de la vapeur qui produit du travail. Quand il n'y a ni addition ni soustraction de chaleur, on peut analyser l'opération au moyen des formules indiquées; l'évaporation du liquide est accompagnée d'un abaissement de température, et d'une diminution de pression, et le tracé de la courbe adiabatique que suivent à chaque instant la pression et le volume peut être obtenu par la méthode indiquée plus haut : il suffit de faire le volume initial égal à σ et la quantité de vapeur initiale x_1 égale à zéro.

Prenons, par exemple, 1 kilogramme d'eau à la température $t_1 = 144$ degrés, et sous la pression de 4 atmosphères, et supposons que la pression extérieure ait diminué en suivant la courbe adiabatique jusqu'à 1 atmosphère; alors la température sera devenue $t = 100$ degrés, et la quantité de vapeur qui s'est formée se calculera d'après l'équation (243) par la relation

$$\frac{xr}{T} + \tau = \tau_1;$$

nous trouvons, en nous servant des valeurs numériques du dernier exemple,

$$x = 0^{\text{kil}},07894.$$

Le volume du mélange est

$$v = xu + \sigma = 0^{\text{mc}},1312,$$

et le rapport de détente

$$\varepsilon = \frac{v}{v_1} = \frac{v}{\sigma} = 131,2,$$

le volume spécifique de l'eau étant $\sigma = 0,001$.

Les vapeurs saturées qui se comportent comme celle de l'eau présentent donc ce résultat remarquable : quand il y a

expansion suivant la courbe adiabatique entre deux pressions-limites données p_1 et p, la vapeur se condense partiellement, si au commencement il n'y a que de la vapeur saturée et sèche ; le liquide se vaporise au contraire si au commencement il n'y a pas de vapeur. On conclut de là qu'entre les mêmes pressions il existe un certain mélange de vapeur et de liquide pour lequel la quantité spécifique de vapeur x_1 est la même au commencement et à la fin de l'opération ; le calcul confirme cette conclusion ; en faisant $x = x_1$ dans l'équation (243), on a pour ce mélange

$$(244) \qquad x_1 = \frac{\tau_1 - \tau}{\frac{r}{T} - \frac{r_1}{T_1}}.$$

Prenons, par exemple, la vapeur d'eau et 1 et 4 atmosphères pour les pressions-limites : nous trouverons, en nous servant toujours des nombres du tableau auxiliaire (p. 307) et de la Table X (de l'Appendice),

$$x_1 = 0^{\text{kil}},5001,$$

ou simplement $x_1 = 0,50$ avec une grande approximation. Ainsi lorsqu'il y a au commencement autant de vapeur que de liquide, la même proportion existe encore dans le mélange à la fin de l'expansion. Cela montre simplement que la courbe adiabatique et la courbe d'une quantité constante de vapeur se coupent dans les deux états-limites comme cela a été indiqué dans la *fig.* 34, p. 315. La courbe ponctuée BB représente la courbe d'une quantité constante de vapeur pour l'eau et les liquides qui se comportent comme elle, tandis que la courbe AA représente la courbe adiabatique. Il y a deux périodes entre les deux états extrêmes : pendant la première, suivant la courbe adiabatique, il y a vaporisation ; dans l'autre, il y a condensation ; de sorte qu'à la fin on retrouve la même quantité de vapeur qu'au commencement. En se servant des valeurs de τ et de $r : T$ du tableau auxiliaire p. 307, on peut aussi déterminer, à l'aide de l'équation (244), les proportions du mélange pour d'autres valeurs des pressions extrêmes ; on

trouve ainsi, par exemple, pour les pressions de 10 et 5 atmosphères, de 5 et 1, de 1 et $\frac{1}{2}$, respectivement $x_1 = 0,5606$, $0,5044$ et $0,4599$, c'est-à-dire des nombres qui s'approchent tous de la valeur $x_1 = 0,5$. Mais ici les écarts sont déjà trop grands pour qu'on puisse conclure une loi simple, pour qu'on puisse supposer, par exemple, que l'équation (244) conduise toujours à la même valeur de x_1, telle que $x_1 = 0,5$ pour l'eau, quelles que soient les températures extrêmes.

Supposons pour un moment que cela ait lieu; en désignant cette valeur constante de x_1 par k, et en différentiant l'équation (244), on trouve

$$k = -\frac{d\tau}{d\left(\frac{r}{T}\right)},$$

ou bien, en remplaçant τ par sa valeur tirée de l'équation (242),

$$k = \frac{c}{\frac{r}{T} - \frac{dr}{dt}}.$$

Remplaçons encore $\frac{r}{T}$ par sa valeur déduite de l'équation (229), on trouve pour la fonction h de M. Clausius :

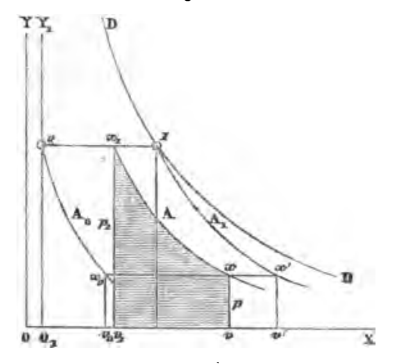
$$h = -\frac{1-k}{k}c.$$

Lorsqu'on multiplie les deux membres de cette équation par dt et qu'on intègre de zéro à t, l'intégrale de $h\,dt$ paraîtra comme un *multiple* de l'intégrale de $c\,dt$ ou de q. Mais les valeurs du tableau auxiliaire p. 307, colonne 3, et de la Table X (de l'Appendice) ne confirment pas plus ce résultat pour les autres vapeurs que pour la vapeur d'eau.

Nous avons à présenter une autre considération très-importante. Partons d'une certaine pression initiale p_1 et prenons les quantités de vapeurs 0, x_1 et 1 comme celles qui correspondent successivement à cette pression ; menons aussi les trois courbes adiabatiques A_0, A, A_1 (*fig.* 35) relatives à ces trois états initiaux. Les courbes auront entre elles une relation

particulière. Continuons l'expansion (pour la vapeur d'éther ce serait la compression) jusqu'à ce que la pression soit réduite

Fig. 35.



à p dans les trois cas, et désignons les quantités spécifiques de la vapeur respectivement par x_0, x et x'; on aura alors en vertu de l'équation (243)

$$\frac{x_0 r}{T} + \tau = \tau_1,$$

$$\frac{xr}{T} + \tau = \frac{x_1 r_1}{T_1} + \tau_1.$$

$$\frac{x'r}{T} + \tau = \frac{r_1}{T_1} + \tau_1,$$

On tire de là

(245) $$\frac{x - x_0}{x' - x_0} = x_1.$$

Si les valeurs finales du volume sont désignées respectivement par v_0, v et v', on aura

$$v_0 = x_0 u + \sigma, \quad v = xu + \sigma, \quad v_1 = x'u + \sigma,$$

et, en substituant les valeurs de x_0, x et x' dans l'équation précédente,

(246) $$\frac{v - v_0}{v' - v_0} = x_1.$$

On voit que l'on peut facilement effectuer pour une pression

initiale déterminée le tracé de la courbe adiabatique qui correspond à une quantité de vapeur initiale quelconque x_1, lorsqu'on connaît les tracés des deux courbes adiabatiques extrêmes (relatives aux quantités de vapeur $x_1 = 0$ et $x_1 = 1$) pour cette même pression; il suffit de choisir sur le trajet $x_1 x'$ (*fig.* 35) le point x de sorte que le rapport des longueurs xx_1 et $x' x_1$ soit égal à x_1. Nous avons démontré plus haut (p. 301) que les courbes d'une quantité constante de vapeur sont liées entre elles de la même manière.

Il nous reste encore à déterminer le travail extérieur que l'on gagne ou que l'on dépense quand le mélange de vapeur et de liquide passe d'un état à un autre en suivant la courbe adiabatique, c'est-à-dire sans qu'on lui fournisse ou qu'on lui enlève de chaleur. Il y a simplement à faire $dQ = 0$ dans l'équation fondamentale

$$dQ = A(dU + dL),$$

et on trouve alors pour ce travail évalué en unités de chaleur

$$A\,dL = -A\,dU,$$

ou bien en remplaçant dU par sa valeur tirée de l'équation (220)

$$A\,dL = -dq - d(x\rho);$$

et enfin, en intégrant,

$$AL = q_1 - q + x_1\rho_1 - x\rho. \qquad (247)$$

Comme la quantité spécifique de vapeur x, relative à l'état final, peut se déterminer par l'équation (243), le travail L se trouve sans difficulté.

Revenons maintenant à l'exemple numérique (p. 316); en supposant qu'un mélange d'eau et de vapeur se détende de 4 atmosphères à 1 atmosphère, suivant une courbe adiabatique, on a trouvé $x = 0^{\text{kil}},9211$ à la fin de la détente, la vapeur étant sèche et saturée au commencement. Mettons cette valeur dans l'équation (247), en y faisant

$$x_1 = 1, \quad q_1 = 145,310, \quad q = 100,500,$$
$$\rho_1 = 461,496, \quad \rho = 496,300,$$

nous aurons

$$AL = 49^{cal},164$$

et

$$L = 20\,845^{kgm},5.$$

Si, au contraire, il n'y a pas de vapeur au commencement, c'est-à-dire si $x_1 = 0$, on a trouvé (p. 318) $x = 0,07894$, et dans ce cas l'équation (247) donne, pour les mêmes pressions extrêmes,

$$AL = 5^{cal},632,$$
$$L = 2388^{kgm},0.$$

Pour toute autre valeur de la quantité de vapeur x comprise entre 0 et 1, on trouvera le travail extérieur avec la même facilité. Mais les trois valeurs du travail L_0, L et L', qui correspondent aux trois quantités de vapeur 0, x_1 et 1, ont entre elles une relation simple, quand les pressions finales sont les mêmes.

D'après l'équation (247), on a

$$AL_0 = q_1 - q - x_0\rho,$$
$$AL = q_1 - q + x_1\rho_1 - x\rho,$$
$$AL' = q_1 - q + \rho_1 - x'\rho.$$

En combinant convenablement ces dernières équations et tenant compte de la relation (245), on a

$$(248) \qquad AL = x_1(AL' - AL_0) + AL_0.$$

C'est cette relation que nous avions déjà trouvée, d'après l'équation (246), pour les volumes finaux. On a ombré, dans la *fig.* 35, la surface qui représente le travail L. Lorsque les travaux L_0 et L' sont déterminés, comme cela avait lieu dans l'exemple précédent, on peut facilement calculer L pour toute autre valeur de x_1 comprise entre 0 et 1, en admettant les mêmes pressions finales.

Nous avons, dans notre exemple,

$$AL = 43,532\,x_1 + 5,632;$$

en prenant $x_1 = 0,80$, on a

$$AL = 40^{cal},458.$$

Lorsqu'on prend toujours les mêmes pressions limites p_1 et p, le travail diminue d'autant plus que la quantité de vapeur initiale x_1 est plus petite : ce qui se conçoit sans peine.

Après avoir indiqué le tracé de la courbe adiabatique pour un mélange de vapeur et de liquide, nous sommes en mesure d'appliquer à ce mélange les propositions générales que nous avons développées dans la première Section (p. 82). Nous trouvions (p. 84) que, pour *tout* passage d'une courbe adiabatique à une autre, l'intégrale

$$P = \int \frac{dQ}{AS}$$

était une quantité constante, à condition que le passage se fît suivant un trajet reversible. En remplaçant dans cette intégrale S par la température absolue T, et dQ par sa valeur tirée de l'équation (227), on a

$$AP = \int \left[\frac{dq}{T} + d\left(\frac{xr}{T}\right)\right].$$

En nous servant de la relation (242) et en intégrant, nous obtenons

$$(249) \qquad AP = \left(\tau + \frac{xr}{T}\right) - \left(\tau_1 + \frac{x_1 r_1}{T_1}\right),$$

les quantités affectées de l'indice 1 correspondant à l'état initial.

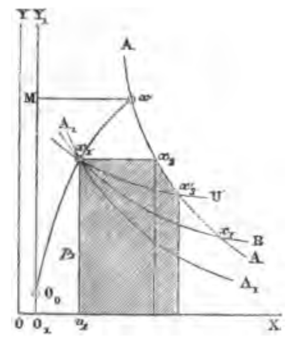
Le premier terme du second membre de l'équation (249) représente, d'après ce qui a été dit à propos de l'équation (243), la constante de la courbe adiabatique A (*fig.* 36), et le second terme la constante de la courbe adiabatique A_1 sur laquelle se trouve le point de départ x_1; on conclut de là que le poids thermique P doit nécessairement être constant. Supposons que les deux courbes soient données par leurs constantes, et que le mélange suive un trajet reversible entre les deux courbes; on peut facilement trouver l'état final, parce que P est connu. Si, par exemple, le passage s'était effectué suivant la courbe isothermique, c'est-à-dire sous une pression constante et à une température constante ($x_1 x_2$, *fig.* 36), on aurait, en appelant x_2

la quantité de vapeur finale,

$$(250) \qquad AP = \frac{r_1}{T_1}(x_2 - x_1) = \frac{r}{T}(x_2 - x_1).$$

Comme P est connu par hypothèse, on déterminera x_2 et

Fig. 36.



ensuite le volume final. Si l'on avait au commencement $x_1 = 0$ et à la fin $x_2 = 1$, on trouverait

$$(251) \qquad P = \frac{r_1}{AT_1} = \frac{r}{AT}.$$

Cette formule donne une signification particulière au rapport $\frac{r}{T}$ qui figure fréquemment dans nos formules, et dont les valeurs, correspondant à diverses pressions, ont été inscrites pour la vapeur d'eau dans le tableau auxiliaire de la page 307. Lorsqu'on divise cette valeur par $A = \frac{1}{424}$, on trouve P, c'est-à-dire la somme des poids thermiques qu'il faut fournir à l'unité de poids du liquide pour la transformer sous une pression constante en vapeur saturée à la même température. La colonne 6 du tableau auxiliaire montre que la valeur de P diminue lentement pour la vapeur d'eau, quand la pression augmente. Pour une autre quantité de vapeur $(x_2 - x_1)$, on détermine le poids thermique d'après l'équation (250); dans le cas où l'on aurait formé l'unité de volume de vapeur, il faudrait remplacer $(x_2 - x_1)$ par le poids de l'unité de volume.

Mais, d'après les indications de la page 278, on a $\gamma = 1 : u$ avec une approximation suffisante; il résulte de là que nous pouvons considérer la quantité $\frac{r}{\mathrm{A}u\mathrm{T}}$ comme le poids thermique qu'il faut fournir au liquide à la température t pour produire *l'unité de volume* de vapeur à la même température et sous une pression constante. Cette quantité est précisément $\frac{dp}{dt}$ d'après l'équation (212); on a de cette manière une nouvelle signification de ce coefficient différentiel.

D'un autre côté, la quantité

$$\tau = \int_0^t \frac{dq}{\mathrm{T}}$$

représente également un poids thermique : c'est celui qu'il faut communiquer à l'unité de poids du liquide pour la porter de 0° à t° sous une pression constante ou, plus généralement, puisque nous devons pour le moment considérer les liquides comme incompressibles, pour le porter de 0° à t° sans qu'il y ait formation de vapeur.

En désignant par C la constante de la courbe adiabatique, il faut faire dans l'équation (249)

$$\text{(252)} \qquad \mathrm{C} = \frac{\tau}{\mathrm{A}} + \frac{xr}{\mathrm{AT}},$$

et alors C représente *le poids thermique qu'il faut fournir à l'unité de poids du liquide à 0 degré pour former sous une pression constante x kilogrammes de vapeur dont la température soit t.*

Prenons maintenant pour l'abscisse du point O_0 la ligne OO_1 (*fig.* 36), qui donne le volume σ du liquide à 0 degré, et pour l'ordonnée la ligne OO_0, qui représente la pression de la vapeur correspondant à cette température; nous pouvons supposer que le passage suivant la courbe adiabatique A se fasse de la manière suivante : le liquide est d'abord porté de la température 0 degré à la température t degré, sous une pression qui augmente de la même manière que celle de la vapeur saturée

pour le même accroissement de température; comme il ne se forme pas de vapeur pendant cette partie de l'opération, et comme le volume du liquide est regardé comme constant, le passage se fait suivant le trajet O_0M, et le poids thermique correspondant est

$$\int \frac{dq}{AT} = \frac{\tau}{A}.$$

En admettant qu'ensuite il y ait formation de la quantité de vapeur x sous une pression constante, et suivant le trajet Mx (*fig.* 36), le poids thermique relatif à cette seconde partie de l'opération sera, d'après ce qui précède, $\frac{rx}{AT}$.

Mais nous venons de voir que l'ensemble de ces deux poids représente la constante C de la courbe adiabatique A; on peut donc considérer cette constante comme le poids thermique nécessaire pour produire avec l'unité de poids du liquide à o degré, et sous la pression que possède la vapeur à cette température, x kilogrammes de vapeur à la température t, *que l'opération soit effectuée suivant le trajet* O_0Mx *ou bien suivant tout autre trajet* O_0x_1x (*fig.* 36).

La constante de la courbe adiabatique peut se mettre sous une autre forme; en prenant la valeur de x tirée de la relation $v = xu + \sigma$ et se servant aussi de l'équation (212), on trouve

$$C = \frac{\tau}{A} - \sigma\frac{dp}{dt} + v\frac{dp}{dt}. \tag{253}$$

Si l'on pouvait exprimer ici la quantité τ et le coefficient différentiel $\frac{dp}{dt}$ simplement comme des fonctions de p, l'équation de la courbe adiabatique serait donnée sous la forme $p = f(v)$: jusqu'à présent on n'a pas pu malheureusement y parvenir. Nous reviendrons plus loin sur les essais qu'on a tentés.

Supposons que nous ayons tracé les deux courbes adiabatiques A et A_1 (*fig.* 36) qui sont déterminées par leurs constantes, et que le passage de l'état initial x_1 à la deuxième courbe adia-

batique ait eu lieu suivant *la courbe* B *d'une quantité constante de vapeur* x_1, alors on aurait

$$AC = \tau + \frac{x_1 r}{T}.$$

On pourrait bien (il est vrai que ce serait par tâtonnements) tirer de cette relation la température finale t, et ensuite la pression correspondante et le volume; on aurait ainsi les coordonnées des points d'intersection x_1 de la courbe d'une quantité constante de vapeur avec la seconde courbe adiabatique A.

Lorsqu'au contraire le passage s'effectue suivant une courbe isodynamique, c'est-à-dire quand U conserve une valeur constante, il faut déterminer la quantité de vapeur finale, que nous désignerons ici par x_3, au moyen de l'équation (233); il vient alors

$$x_3 = \frac{q_1 + x_1 \rho_1 - q}{\rho}.$$

Cette valeur, substituée dans la formule précédente, fournit encore une équation, au moyen de laquelle on pourrait déterminer la température t, la pression p et le volume v relatifs à l'état final; ce seraient les conditions du point d'intersection x_3 (*fig.* 36) de la courbe isodynamique avec la courbe adiabatique. Ce moyen d'obtenir le point d'intersection x_3 est, il est vrai, très-pénible, parce qu'on ne peut déterminer que par tâtonnements la température finale t.

Il est plus commode, en pareil cas, de représenter graphiquement les deux courbes adiabatiques A et A_1, ainsi que les courbes isothermique et isodynamique qui correspondent à l'état initial x_1, et de chercher ainsi les points d'intersection x_2 et x_3. En procédant ainsi, on détermine en même temps, d'après les indications des pages 83 et suivantes, la quantité P relative au passage d'une courbe adiabatique A_1 à une autre A: il suffit pour cela de diviser par T_1 l'aire de la surface ombrée sur la *fig.* 36.

Il résulte des considérations précédentes et de celles que nous avons présentées aux pages 83 et 130 qu'il y aura un très-

grand avantage à représenter par des équations simples de la forme $p = f(v)$, comme cela peut se faire pour les gaz permanents, le tracé des différentes courbes dont il est ici question. Malheureusement cela n'est pas possible dans l'état actuel de la science. On a d'abord essayé de représenter le tracé de la courbe adiabatique par des formules empiriques simples, parce que ces courbes donnent la loi de la diminution de pression qui a lieu dans le cylindre d'une machine à vapeur pendant la détente. Le premier essai de ce genre a été fait par M. Rankine (*). Il conclut de ses calculs numériques, que la courbe adiabatique de la vapeur d'eau saturée est représentée par la formule approximative

$$pv^{\mu} = p_1 v_1^{\mu}, \tag{254}$$

dans laquelle p_1 indique la pression initiale, v_1 le volume initial de la vapeur d'eau saturée, et μ une grandeur constante qu'il évalue à $\frac{10}{9} = 1{,}111$. M. Rankine ne dit pas s'il faut supposer dans l'application de cette formule que la vapeur soit sèche au commencement de l'expansion. Cette question n'est cependant pas sans importance, comme je le montrerai.

M. G. Schmidt (*) s'est servi plus tard de cette formule; mais il suppose simplement que la vapeur d'eau saturée se comporte *sous tous les rapports* comme un gaz permanent, et que les courbes adiabatiques soient identiques pour ces deux espèces de fluides. Il prend donc, comme pour un gaz permanent, $\mu = 1{,}410$, hypothèse qui n'est justifiée par rien et qui conduit à des résultats très-inexacts.

M. Grashof (**) est revenu plus tard à cette question, et il déduit de ses calculs $\mu = 1{,}140$; il suppose que la vapeur

---

(*) RANKINE, *Manual of Applied Mechanics : A Manual of the Steam engine* p. 385.

(**) GUSTAVE SCHMIDT, *Théorie des machines à vapeur*, 1861.

(***) GRASHOF : Avant-propos dans *Völker's Indicator*, Berlin, 1863; — *Bulletin de la Société des Ingénieurs allemands*, t. VIII, p. 151.

d'eau soit saturée au commencement, mais qu'il n'y ait point d'eau liquide. Je vais examiner de plus près cette question à cause de son importance; je déterminerai la quantité μ de l'équation (254) par la même méthode que M. Rankine et M. Grashof, mais en me servant de mes tableaux très-exacts; je considérerai d'abord la vapeur saturée et sèche au commencement, puis la vapeur mêlée avec le liquide. C'est à l'aide des équations générales de la théorie mécanique de la chaleur que je vérifierai si l'équation (254) est exacte ou si elle n'est qu'une formule approchée. En nous reportant à nos *Recherches sur les gaz permanents*, p. 139, on est disposé à admettre que la formule (254) joue aussi pour les vapeurs un rôle important. Lorsqu'on a calculé, d'après la manière indiquée, le volume v pour une pression finale donnée, en partant d'un certain état initial (p_1, v_1), et lorsqu'on prend l'équation (254) pour celle d'une courbe adiabatique, on trouve facilement la valeur de la constante μ :

$$\mu = \frac{\log \frac{p_1}{p}}{\log \frac{v}{v_1}}. \tag{255}$$

Dans l'exemple de la page 316, nous avions dans l'état initial de la vapeur saturée et sèche sous la pression p_1 de 4 atmosphères; puis l'expansion se faisait suivant la courbe adiabatique jusqu'à ce que la pression fût devenue de 1 atmosphère; nous trouvions pour le rapport de détente

$$\varepsilon = \frac{v}{v_0} = 3,390;$$

portant ces valeurs dans l'équation (255), on trouve pour cet exemple particulier

$$\mu = 1,1354.$$

On peut déterminer par la même méthode la quantité μ pour d'autres pressions initiales et finales, et voir si elle est réellement constante. J'ai fait une série de calculs de ce genre, et j'ai consigné leurs résultats dans le tableau suivant :

Valeurs calculées de x, ε, μ.

PRESSION initiale p_1 en atmosphères.	PRESSION FINALE p EN ATMOSPHÈRES : 0,5	1	2	4
	Valeurs de x.			
8	0,8541	0,8844	0,9182	0,9564
4	0,8882	0,9211	0,9580	"
2	0,9241	0,9598	"	"
1	0,9614	"	"	"
	Valeurs de ε.			
8	11,577	6,236	3,375	1,834
4	6,282	3,390	1,837	"
2	3,409	1,842	"	"
1	1,848	"	"	"
	Valeurs de μ.			
8	1,1321	1,1360	1,1396	1,1431
4	1,1315	1,1354	1,1399	"
2	1,1304	1,1344	"	"
1	1,1291	"	"	"

Pour les pressions initiales, j'ai pris $p_1 = 8, 4, 2, 1$ atmosphères, et j'ai supposé qu'il n'y eût au commencement que de la vapeur d'eau saturée et sèche; le tableau donne alors, pour les différentes pressions finales $p = 4, 2, 1, \frac{1}{2}$, la quantité spécifique de vapeur x à la fin de la détente, le rapport de détente ε et la valeur de μ calculée d'après l'équation (255). Un regard jeté sur ce tableau montre que la valeur de μ diminue sensiblement avec la pression finale pour une pression initiale déterminée, et qu'elle est d'autant plus grande pour une même pression finale que la pression initiale est plus grande; les variations sont pourtant si faibles, que l'on peut adopter dans les limites du tableau, qui renferme tous les cas

que présentent les machines à vapeur, la valeur moyenne constante

$$\mu = 1,135,$$

qui coïncide presque avec celle qu'a donnée M. Grashof (*).

Lorsque nous adoptons cette valeur moyenne, c'est-à-dire que nous supposons admissible la formule de M. Rankine, nous trouvons le rapport de détente à l'aide de la pression initiale et de la pression finale :

$$(256) \qquad \varepsilon = \frac{v}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Le travail de détente évalué en unités de chaleur sera, d'après l'équation (80), p. 129, qui est relative aux gaz :

$$(257) \qquad AL_1 = \frac{Ap_1 v_1}{\mu - 1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\mu - 1}{\mu}}\right].$$

Reste à savoir jusqu'à quel point les résultats de ces formules coïncident avec ceux que l'on déduit de la formule exacte (247), p. 322. Dans le tableau suivant, on a consigné les résultats du calcul pour des circonstances identiques à celles du tableau précédent :

(*) Dans une Notice sur l'*Indicateur de Völker* (*Journal de la Société des Ingénieurs autrichiens*, XVe année), M. G. Schmidt, s'appuyant sur les résultats de M. Grashof, prend $\mu = 1,135$: nombre qui coïncide parfaitement avec le mien. M. Schmidt a donc cessé de supposer que la quantité μ de la formule de M. Rankine soit identique à la valeur $k = 1,410$ des gaz permanents.

Valeurs calculées de ε, AL_1, AL.

PRESSION initiale p_1 en atmosphères.	PRESSION FINALE p EN ATMOSPHÈRES : 0,5	1	2	4
	Valeurs de ε.			
8	11,505	6,247	3,392	1,842
4	6,247	3,392	1,842	"
2	3,392	1,842	"	"
1	1,842	"	"	"
	Valeurs de AL_1.			
8	94,90	74,02	51,35	26,73
4	70,95	49,22	25,63	"
2	47,19	24,57	"	"
1	23,58	"	"	"
	Valeurs de AL.			
8	94,93	73,75	51,01	27,57
4	71,14	49,17	25,53	"
2	47,40	24,59	"	"
1	23,70	"	"	"

Les valeurs de AL ont été calculées à l'aide de l'équation (247), comme on l'a indiqué plus haut par l'exemple de la page 322, tandis que les valeurs de ε et de AL_1 ont été obtenues au moyen des formules approximatives (256) et (257).

La comparaison des deux séries de valeurs du travail extérieur obtenues respectivement par l'équation approximative (257) et par la formule rigoureuse (247) montre une coïncidence très-satisfaisante; il en est de même pour le rapport de détente. On peut donc appliquer nos formules approchées à la machine à vapeur, et calculer le travail de détente par la formule

$$(258) \qquad L_1 = \frac{p_1 v_1}{\mu - 1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\mu-1}\right],$$

en prenant $\mu = 1,135$; mais cela n'est cependant justifié que si la vapeur d'eau est sèche et saturée au commencement de la détente.

Examinons maintenant si nos formules approchées peuvent servir et si l'on peut prendre $\mu = 1,135$, lorsque la quantité de vapeur x_1 est différente de l'unité au commencement de l'opération. A cet effet, j'ai calculé les valeurs de μ pour différentes pressions initiales et finales, en supposant

$$x_1 = 0,90, \quad 0,80 \quad \text{et} \quad 0,70,$$

et en me servant de l'équation (255). Les résultats de ces calculs sont consignés dans le tableau suivant :

Valeurs calculées de μ.

PRESSION initiale p_1 en atmosphères.	QUANTITÉ spécifique de vapeur initiale x_1.	PRESSION FINALE EN ATMOSPHÈRES :		
		0,5	1	2
4	0,90	1,1236	1,1268	1,1302
	0,80	1,1140	1,1164	1,1190
	0,70	1,1019	1,1036	1,1047
2	0,90	1,1231	1,1264	"
	0,80	1,1141	1,1166	"
	0,70	1,1028	1,1044	"
1	0,90	1,1223	"	"
	0,80	1,1138	"	"
	0,70	1,1032	"	"

Ce tableau montre que l'exposant μ de la formule empirique (254) varie avec la quantité de vapeur initiale x_1, mais qu'il est presque constant pour *les mêmes quantités de vapeur initiales*. Lorsqu'on prend la moyenne des valeurs de μ qui correspondent à la même valeur de x_1, on trouve

$$x_1 = 1, \quad \mu = 1,135,$$
$$x_1 = 0,90, \quad \mu = 1,125,$$
$$x_1 = 0,80, \quad \mu = 1,115,$$
$$x_1 = 0,70, \quad \mu = 1,103.$$

Toutes ces valeurs rentrent dans la formule empirique

$$(259) \qquad \mu = 1,035 + 0,100\, x_1,$$

qu'on ne peut évidemment appliquer que pour les valeurs de x_1 comprises entre les limites 0,7 et 1. C'est ce qui a lieu dans les machines à vapeur; car on admet que la vapeur qui se rend dans les cylindres, surtout dans ceux des locomotives, peut être mélangée avec 25 ou 30 pour 100 d'eau liquide entraînée mécaniquement.

Quoique les résultats précédents ne soient qu'approchés, ils servent néanmoins à éclaircir une question dont on s'est beaucoup occupé dans ces derniers temps. Les courbes tracées par les indicateurs adaptés aux machines à vapeur montrent que la diminution de la pression pendant la détente peut se représenter approximativement par une hyperbole équilatère; on en a conclu que la vapeur d'eau se comportait comme un gaz permanent qui se dilate à une température constante. On a conclu, de plus, que les formules de la théorie mécanique de la chaleur conduisent à des résultats qui ne s'accordent pas avec l'observation. On a essayé d'expliquer ces différences en supposant que les parois des cylindres (même quand elles ne sont pas entourées d'une enveloppe de vapeur) fournissent de la chaleur à la vapeur qui se détend, ce qui devrait en effet modifier considérablement la loi des pressions pendant la détente. On a fait encore remarquer que les propriétés de la vapeur doivent être influencées par la matière employée pour le graissage, et que cela peut aider à expliquer les différences signalées. On ne peut nier que ces deux faits exercent une certaine influence sur le phénomène; mais je crois qu'on l'a beaucoup exagérée. D'après les calculs que j'ai faits précédemment, on peut attribuer ces différences, au moins en partie, à ce que la vapeur se trouve mêlée d'eau liquide dans les machines. Plus cette quantité d'eau est considérable, plus la quantité spécifique de vapeur initiale x_1 est petite, et *plus la quantité μ s'approche de l'unité, c'est-à-dire plus la courbe adiabatique s'approche d'une hyperbole équilatère*. On voit

même que, pour un mélange tel que $x_1 = 0,32$ environ, les deux courbes coïncident presque.

Il m'est donc permis de dire que non-seulement l'examen des courbes tracées par les indicateurs n'infirme pas les résultats de la théorie mécanique de la chaleur, mais qu'au contraire il donne une nouvelle confirmation des principes qui font la base de notre étude. Nous reviendrons plus tard sur le rôle que joue la vapeur dans les cylindres des machines à vapeur, ainsi que sur les phènomènes qui s'y passent.

Dans les cas ordinaires de la pratique, on peut donc, sans scrupule, tracer la courbe adiabatique de la vapeur d'eau à l'aide de la formule de Rankine :

$$pv^{\mu} = p_1 v_1^{\mu},$$

et prendre pour la constante μ la valeur que fournit notre formule empirique (259). La valeur $\mu = \frac{10}{9} = 1,111$, proposée par M. Rankine, n'est applicable, d'après cela, que pour une quantité de vapeur initiale égale à $x_1 = 0,76$, c'est-à-dire lorsque la vapeur entraîne mécaniquement environ 25 pour 100 d'eau en poids. J'ignore si M. Rankine est parti réellement de cette composition du mélange dans sa détermination de la valeur μ. Les tableaux que nous venons de donner semblent peut-être démontrer l'exactitude de la formule de M. Rankine, et l'on pourrait attribuer les différences qu'elle présente avec nos formules à une certaine incertitude sur les fonctions de la température qui entrent dans ces formules. Mais cela n'est pas admissible; car lorsqu'on calcule l'exposant μ pour certaines pressions-limites, en supposant que la quantité de vapeur initiale x_1 soit peu différente de zéro, on trouve de grandes différences, et on acquiert la conviction que la formule empirique de M. Rankine n'est applicable que dans le cas où la vapeur d'eau, au commencement de l'opération, n'entraîne mécaniquement que peu ou point d'eau liquide. On peut, du reste, établir facilement une relation entre la quantité μ et les fonctions de la température données plus haut, et prouver de

cette manière la justesse de la remarque que nous venons de faire.

L'équation générale (III), p. 76, peut en effet s'écrire

$$dQ = AXp\left(\frac{dp}{p} + \frac{Yv}{Xp}\frac{dv}{v}\right).$$

Pour la courbe adiabatique, on a $dQ = 0$; en posant en outre

$$\frac{Yv}{Xp} = \mu,$$

on trouve

$$\frac{dp}{p} + \mu\frac{dv}{v} = 0.$$

En supposant que μ fût constant, on trouverait par intégration la formule (254) de M. Rankine. Si cette formule était rigoureusement exacte, la quantité

$$\frac{Yv}{Xp}$$

serait constante pour les mélanges de vapeur et de liquide. Mettons dans cette expression les valeurs de X et Y tirées des équations (224) et (225), p. 290, on obtient alors

$$\mu = \frac{\frac{r}{pu}v}{\frac{dq}{dp} - \sigma\frac{d}{dp}\left(\frac{\rho}{u}\right) + v\frac{d}{dp}\left(\frac{\rho}{u}\right)}.$$

Remplaçons encore v par $xu + \sigma$, et négligeons les termes qui contiennent σ en facteur, nous trouvons

$$(260) \qquad \mu = \frac{\frac{r}{Apu}xu}{\frac{1}{A}\frac{dq}{dp} + \frac{xu}{A}\frac{d}{dp}\left(\frac{\rho}{u}\right)}.$$

Pour examiner cette formule, on se sert des colonnes 7, 8 et 9 du tableau auxiliaire relatif à la vapeur d'eau (p. 307). La quantité $\frac{r}{Apu}$ est calculée au moyen de l'équation (215) p. 271;

on a aussi l'égalité

$$\frac{1}{A}\frac{dq}{dp} = \frac{1}{A}\frac{\frac{dq}{dt}}{\frac{dp}{dt}},$$

dans laquelle on peut déterminer la quantité $\frac{dq}{dt}$ à l'aide de l'équation (190), p. 254, tandis que $\frac{dp}{dt}$ est inscrit dans la colonne 2 du même tableau et a été trouvé par un procédé déjà indiqué. On a calculé enfin la quantité $\frac{1}{A}\frac{d}{dp}\left(\frac{\rho}{u}\right)$ au moyen des différences des valeurs de $\frac{\rho}{u}$ inscrites dans la Table X (de l'Appendice).

Partons d'un certain état (x_1, t_1) et mettons dans l'équation (260) la valeur de x tirée de l'équation (243); nous voyons alors que μ varie très-lentement avec la température, si lentement qu'on peut le considérer comme constant entre certaines limites; les variations de μ se font de la même manière, comme on le voit dans le dernier tableau, qui contient les résultats de nos calculs; l'équation (260) montre également que c'est surtout la quantité de vapeur initiale x_1 qui influe sur la valeur de μ.

Comme cette équation (260) ne donne pas de résultats nouveaux, nous n'en dirons pas davantage, et nous nous contenterons de conclure que la formule de M. Rankine ne peut représenter une courbe adiabatique d'une manière assez exacte qu'entre certaines limites.

VIII. — *Des changements réversibles d'un mélange de vapeur et de liquide.*

Un changement d'état est réversible quand la pression extérieure est à chaque instant égale à la force expansive du corps; c'est dans ce cas que nous venons d'étudier les courbes isothermique, adiabatique, ainsi que celles d'une quantité con-

stante de vapeur, et les questions les plus importantes relatives à ce cas ont déjà été traitées. Il convient pourtant d'indiquer encore quelques problèmes du même genre, et nous commencerons par celui qui présente le plus d'intérêt pour la pratique.

Problème I. — *Comment se comporte un mélange de vapeur et de liquide lorsqu'on introduit ou qu'on soustrait de la chaleur et que le volume reste constant ?*

Imaginons que l'unité de poids du mélange soit renfermée dans un vase clos, que la quantité spécifique de vapeur soit x_1, la température t_1 et la pression p_1 ; le volume v_1 de la masse sera, d'après l'équation (208),

$$v_1 = x_1 u_1 + \sigma.$$

Lorsque la température devient t par suite d'une introduction ou d'une soustraction de chaleur, et que la quantité de vapeur devient x, le volume est alors

$$v = xu + \sigma.$$

Puisque nous supposons le volume constant ($v = v_1$) et que nous regardons comme invariable la quantité σ, nous avons, en égalant les seconds membres des deux dernières équations,

$$x = \frac{u_1}{u} x_1. \tag{261}$$

On peut donc trouver la quantité de vapeur x correspondant à une pression quelconque p, ou bien calculer la nouvelle valeur de p au moyen de celle de u, quand x est donné.

Comme le volume est constant, le travail extérieur $dL = 0$; les deux équations (220) et (221) donnent par conséquent

$$dQ = A\,dU = dq + d(x\rho).$$

En intégrant et remplaçant x par sa valeur donnée ci-dessus, on trouve pour la quantité de chaleur qu'il faut fournir

$$Q = q - q_1 + x_1 u_1 \left(\frac{\rho}{u} - \frac{\rho_1}{u_1}\right). \tag{262}$$

Enfin on obtient le poids thermique qui correspond à ce changement d'état à l'aide de l'équation (227); on a en effet

$$P = \int \frac{dQ}{AT} = \int \frac{1}{A}\left[\frac{dq}{T} + d\left(\frac{xr}{T}\right)\right],$$

ou bien

(263) $$P = \frac{1}{A}\left(\tau - \tau_1 + \frac{xr}{T} - \frac{x_1 r_1}{T_1}\right).$$

Dans cette dernière formule, on peut éliminer x au moyen de l'équation (261); le poids thermique se trouve donc facilement à l'aide des températures initiale et finale, quand on connaît la quantité de vapeur initiale x_1.

Admettons qu'il y ait introduction de chaleur, et par suite élévation de température, augmentation de pression et vaporisation; à un certain moment tout le liquide se sera transformé en vapeur, c'est-à-dire x sera devenu égal à l'unité. Soient t_2 et p_2 la température et la pression relatives à ce moment, etc., on aura, d'après l'équation (261),

(264) $$u_2 = x_1 u_1,$$

et la quantité de chaleur qu'il faut fournir jusqu'à ce moment sera, d'après l'équation (262),

(265) $$Q_2 = q_2 - q_1 + x_1 u_1 \left(\frac{\rho_2}{u_2} - \frac{\rho_1}{u_1}\right).$$

Si l'introduction de la chaleur continuait à partir de ce moment, la force élastique et la température augmenteraient encore davantage; mais le changement se ferait alors d'après d'autres lois, parce qu'on aurait de la vapeur surchauffée.

Les formules précédentes, que nous allons appliquer à quelques exemples numériques, peuvent se mettre sous une forme un peu différente.

L'équation (223), p. 290, qui est applicable à tout changement d'état du mélange, peut s'écrire comme il suit, la pression p étant une fonction de la température seule et l'équation (189), p. 254, servant à introduire la chaleur spécifique c

du liquide :

(266) $$dQ = \left[c - \sigma \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{u}\right) + v \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{u}\right)\right] dt + \frac{r}{u} dv.$$

Quand on suppose, comme nous le faisons ici, que le volume reste constant pendant l'introduction de la chaleur, on a $dv = 0$ et $v = v_1$; par suite,

(267) $$\frac{dQ_v}{dt} = c - \sigma \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{u}\right) + v_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{u}\right).$$

Cette quantité $\frac{dQ_v}{dt}$ représente simplement la chaleur spécifique à volume constant du mélange de vapeur et de liquide; elle est ici une fonction du volume et de la température, et non pas une constante, comme cela avait lieu pour les gaz permanents. La quantité c se détermine facilement à l'aide des équations (190) à (196), p. 254.

Les valeurs de $\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{u}\right)$ relatives à la vapeur d'eau sont inscrites dans la colonne 10 du tableau auxiliaire, de 0,5 à 14 atmosphères. Pour les obtenir, il suffisait de multiplier par $A = \frac{1}{424}$ les produits des nombres des colonnes 2 et 8. Il est ainsi facile de déterminer la chaleur spécifique à volume constant d'un mélange d'eau et de vapeur pour une température et un volume donnés.

On a, par exemple, pour l'eau

$$c = \frac{dq}{dt} = 1 + 0,00004\,t + 0,0000009\,t^2,$$

et à la pression de 5 atmosphères, c'est-à-dire pour $t = 152^\circ,22$,

$$c = 1,0269.$$

D'après le tableau auxiliaire, on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{u}\right) = 29,160,$$

et puisque $\sigma = 0{,}001$,

$$\frac{dQ_v}{dt} = 0{,}9977 + 29{,}160\,v_1.$$

Quand cette vapeur saturée est sans mélange de liquide, la Table X (de l'Appendice) donne

$$v_1 = u_1 + \sigma = 0{,}3636,$$

et, par suite,

$$\frac{dQ_v}{dt} = 11{,}595.$$

Cette valeur est relative seulement à une soustraction de chaleur, puisque, pour l'obtenir, nous avons pris de la vapeur sèche et saturée; une introduction de chaleur l'aurait changée en vapeur surchauffée à laquelle les formules ne sont plus applicables. La quantité que nous appelons *chaleur spécifique à volume constant* dans le langage ordinaire est toujours plus grande pour un mélange de vapeur et de liquide que pour le liquide seul; pour l'eau et sa vapeur, elle est toujours plus grande que l'unité.

Il faut remarquer encore que, pour la vapeur d'eau, on peut regarder sans crainte la quantité

$$c - \sigma \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{u}\right)$$

comme égale à l'unité dans l'équation (267), parce que le calcul de cette expression donne toujours des nombres très-peu différents de 1.

Il est cependant plus avantageux de se servir dans les applications des équations (261) et (262); ce que nous allons montrer par quelques exemples.

Prenons un réservoir contenant un mélange d'eau et de vapeur pesant M kilogrammes; la vapeur pèse $0{,}763\,M$ et l'eau $0{,}237\,M$. Supposons que la pression soit ramenée de $1\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{10}$ d'atmosphère avec une soustraction de chaleur sous un volume constant.

La Table X donne, pour une pression de

$1\frac{1}{2}$ atmosphère : $u_1 = 1,1258$, $q_1 = 112,408$, $\frac{\rho_1}{u_1} = 432,58$;

$\frac{1}{10}$ d'atmosphère : $u = 14,5508$, $q = 46,282$, $\frac{\rho}{u} = 37,03$.

On trouve, d'après l'équation (261), puisque $x_1 = 0,763$, la quantité spécifique de vapeur finale

$$x = \frac{u_1}{u} x_1 = \frac{0,8589}{14,5508} = 0,0590,$$

et, par suite, la quantité totale de vapeur contenue à la fin dans le mélange est

$$Mx = 0,059M,$$

et la quantité totale d'eau est

$$M(1-x) = 0,941M.$$

La chaleur qu'il faut soustraire à la masse est, d'après l'équation (262), pour l'unité de poids du mélange,

$$q - q_1 + x_1 u_1 \left(\frac{\rho}{u} - \frac{\rho_1}{u_1}\right) = 405^{cal},86,$$

et pour les M kilogrammes du mélange,

$$Q = 405^{cal},86M.$$

Supposons que la soustraction de chaleur se fasse au moyen d'eau froide qui entoure les parois extérieures du réservoir et dont la température soit portée de t_0 à t'; soit W le nombre de kilogrammes d'eau nécessaire pour condenser les M kilogrammes du mélange; la quantité de chaleur reçue par l'eau sera

$$Q = W(q' - q_0);$$

la quantité d'eau froide nécessaire pour condenser en général 1 kilogramme du mélange sera donc

$$(268) \qquad \frac{W}{M} = \frac{q_1 - q + x_1 u_1 \left(\frac{\rho_1}{u_1} - \frac{\rho}{u}\right)}{q' - q_0}.$$

Faisons $t_1 = 15°$ et $t' = 35°$; on a, d'après la Table I, deuxième partie, $q_1 = 15,005$, $q' = 35,037$, et, par suite,

$$\frac{W}{M} = \frac{405,86}{20,03} = 20,26.$$

Chaque kilogramme de notre mélange exige donc $20^{kil},26$ d'eau de condensation. Considérons toujours le même mélange avec $x_1 = 0^{kil},763$ de vapeur à la pression $1\frac{1}{2}$ atmosphères : quelle quantité de chaleur faut-il lui fournir *sous un volume constant* pour convertir toute l'eau en vapeur, et quelle pression possède cette vapeur en admettant qu'elle reste saturée?

L'équation (264) donne pour l'état final

$$u_2 = x_1 u_1 = 0,763 \times 1,1258 = 0,8589;$$

la pression et la température correspondantes sont, d'après la Table X, $p_2 = 2$ atmosphères et $t_2 = 120,60$. La même Table donne $q_2 = 121,417$, et $\frac{\rho_2}{u_2} = 558,94$; la quantité de chaleur à fournir à l'unité de poids du mélange est, d'après l'équation (265), quand on prend pour q_1, u_1 et $\frac{\rho_1}{u_1}$ les valeurs données ci-dessus,

$$Q_2 = 117^{cal},53.$$

Pour M kilogrammes de mélange, il faudrait multiplier cette valeur par M. Nos formules ne seraient plus applicables si l'on continuait l'introduction de la chaleur, car la vapeur serait surchauffée.

Les formules auxquelles nous a conduit le problème précédent nous permettent de traiter encore une autre question très-importante dans la pratique (*).

Cherchons d'après quelle loi la force élastique de la vapeur augmente dans une chaudière avec le temps, quand on interrompt à un certain moment la sortie de la vapeur et qu'on continue à chauffer, les soupapes étant fermées.

(*) *Voyez* le Mémoire de l'Auteur : *Nouvelles Tables pour la vapeur d'eau saturée* (*Journal Polytechnique suisse*, année 1863, t. VIII).

Supposons qu'au moment de la fermeture, le poids du mélange de vapeur et de liquide soit de M kilogrammes, contenant x_1M kilogrammes de vapeur; soient t_1 et p_1 la température et la pression correspondantes, xM, t et p le poids de la vapeur, la température et la pression, quand on a continué à chauffer le mélange pendant le temps θ.

La quantité de chaleur Q fournie à la chaudière pendant ce temps sera, d'après l'équation (262),

$$Q = M\left[q - q_1 + x_1 u_1 \left(\frac{\rho}{u} - \frac{\rho_1}{u_1}\right)\right].$$

On continue à chauffer après la fermeture de la prise de vapeur et des soupapes, de manière qu'il entre par minute la chaleur Q_0; alors le temps θ, pendant lequel la température t_1 et la pression p_1 deviennent t et p, est

$$(269) \qquad \theta = \frac{Q}{Q_0} = \frac{M}{Q_0}\left[q - q_1 + x_1 u_1 \left(\frac{\rho}{u} - \frac{\rho_1}{u_1}\right)\right].$$

Cette équation résout le problème proposé; on peut l'écrire plus simplement pour faciliter sa discussion. Dans les chaudières à vapeur ordinaires, le poids de la vapeur est tellement petit relativement à celui de l'eau, que nous pouvons, dans un premier calcul, négliger le terme multiplié par x_1. Prenons, en outre, pour la chaleur spécifique de l'eau c la valeur moyenne 1,0224, on a alors pour θ la valeur très-approchée

$$(270) \qquad \theta = \frac{Mc(t - t_1)}{Q_0}.$$

Cette équation prouve que le temps θ pendant lequel la pression dans une chaudière monte de p_1 à p lorsqu'on l'a fermée est : 1° proportionnel à l'élévation de température $(t - t_1)$; 2° proportionnel au poids total du mélange ou approximativement au poids de l'eau; 3° inversement proportionnel à la quantité de chaleur Q_0 qu'on introduit dans la chaudière dans l'unité de temps.

On sait déjà par les expériences de M. Fairbairn (1853) (*) que, pour une même chaudière remplie de la même manière, des intervalles égaux de température correspondent à des temps égaux; mes formules expliquent complétement le phénomène, et montrent aussi l'influence considérable exercée par le poids de l'eau ainsi que celle (relativement à la valeur de Q_0) de la surface de chauffe. On comprend par là comment dans les chaudières des locomotives qui ont une grande surface de chauffe et une petite capacité, la force élastique de la vapeur augmente plus rapidement que dans les chaudières des machines fixes, lorsqu'on interrompt la sortie de la vapeur; on peut, en effet, conclure des formules précédentes que le temps nécessaire pour une certaine augmentation de pression est à peu près proportionnel au volume de la chaudière, et qu'il est en raison inverse de la surface de chauffe; les valeurs de p inscrites dans la colonne 3 de la Table I, première partie, donnent d'ailleurs pour une chaudière déterminée la loi approximative d'après laquelle la pression de la vapeur augmente dans des temps égaux.

Pour un accroissement de température dt il faut, d'après l'équation (270), un temps

$$(271) \qquad d\theta = \frac{Mc}{Q_0}\,dt.$$

La quantité $\frac{dp}{d\theta}$ peut évidemment être appelée la vitesse avec laquelle la pression croît dans une chaudière à vapeur fermée pendant une introduction continue de chaleur; cette vitesse est donc

$$(272) \qquad w = \frac{dp}{d\theta} = \frac{Q_0}{Mc}\,\frac{dp}{dt};$$

elle est proportionnelle à la dérivée de la pression par rapport à la température.

Les nombres de la colonne 4 de la Table I, première partie, et de la colonne 2 du tableau auxiliaire, p. 307, donnent donc

(*) *Voyez* M. DE BURG : *Sur l'efficacité des soupapes de sûreté* (*Comptes rendus des séances de l'Académie impériale des Sciences à Vienne,* t. XLV, p. 312).

une mesure de cette vitesse et montrent qu'elle augmente rapidement avec la pression.

La formule plus exacte qui donnerait cette vitesse, serait

$$(273) \qquad w = \frac{Q_0}{Mc}\frac{dp}{dt}\left[\frac{c}{c + x_1 u_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{u}\right)}\right].$$

La quantité entre parenthèses est tellement peu différente de l'unité, que nous pouvons nous servir sans hésitation de l'équation (272) pour calculer la vitesse de la diminution de pression dans les chaudières à vapeur.

Dans le chauffage normal d'une chaudière à vapeur, la vitesse w du changement de pression doit être petite et les irrégularités de chauffage, c'est-à-dire les variations de la quantité de chaleur Q_0, qui pénètre dans la chaudière dans l'unité de temps, doivent avoir une influence minime sur la valeur de w; ceci aura lieu d'après l'équation (272), quand le poids de l'eau et de la vapeur est très-grand, tandis que le quotient différentiel $\frac{dp}{dt}$ est très-petit. Il est donc plus facile de chauffer une grande chaudière à basse pression, qu'une petite chaudière à haute pression, surtout quand cette dernière a une grande surface de chauffe comme dans les locomotives.

Prenons, pour donner encore un exemple numérique, une chaudière ordinaire cylindrique qui ait une surface de chauffe de 18 mètres carrés, et une capacité de 11 mètres cubes (elle correspond à peu près à une machine de 15 chevaux); supposons qu'elle produise dans sa marche normale 25 kilogrammes de vapeur à 5 atmosphères par heure et par mètre carré de surface de chauffe : la température de cette vapeur sera $t_1 = 152,22$. La chaudière contient une quantité d'eau égale aux 0,6 de sa capacité, et elle est alimentée par l'eau à 15 degrés. La quantité de vapeur qui est produite par minute avec une dépense régulière est

$$\frac{18 \times 25}{60} = 7^{\text{kil}},5.$$

Quand la vapeur est produite sous une pression constante de 5 atmosphères par de l'eau à zéro degré, 1 kilogramme de cette vapeur exige la chaleur totale

$$\lambda = q + r = q + \rho + \text{A}pu = 652,93 \text{ (Table X)};$$

mais comme l'eau d'alimentation se trouve déjà à 15 degrés, il faut retrancher de λ la valeur de $q_0 = 15,005$; on obtient alors $\lambda - q_0 = 637,93$, et la quantité de chaleur Q_0 qui penètre dans la chaudière par minute est $Q_0 = 7,5 \times 637,93 = 4784,5$ calories. Le volume d'eau de la chaudière est $0,6 \times 11$, et le volume de vapeur $0,4 \times 11$ mètres cubes; comme 1 mètre cube d'eau pèse 1000 kilogrammes, et 1 mètre cube de vapeur sous la pression de 5 atmosphères $2^{\text{kil}},75$ (Table X), le poids de l'eau est de 6600 kilogrammes, et le poids de la vapeur $12^{\text{kil}},10$; et, par suite, le poids total $M = 6612^{\text{kil}},1$. Enfin la quantité spécifique de vapeur est

$$x_1 = \frac{12,10}{6612,10} = 0,00183.$$

Interrompons subitement la sortie de la vapeur en continuant à introduire de la chaleur de la même manière; en combien de temps la pression atteindra-t-elle 10 atmosphères?

A la pression initiale de 5 atmosphères correspondent d'après la Table X les valeurs $q_1 = 153,74$, $u_1 = 0,3626$, $\frac{\rho_1}{u_1} = 1254,68$, et à la pression finale de 10 atmosphères les valeurs $q = 182,72$, $\frac{\rho}{u} = 2292,96$; l'équation (270) donne, par suite,

$$\theta = 41,00 \text{ minutes.}$$

La formule approchée (271) donne, quand on se sert de la valeur moyenne $c = 1,0224$ et qu'on y introduit les valeurs correspondantes de la température,

$$\theta = 1,413\,(t - t_1) = 39,69 \text{ minutes};$$

ces deux valeurs coïncident donc à peu près.

La vitesse de l'accroissement de pression se calcule d'après

l'équation (272)

$$w = 0{,}708 \frac{dp}{dt}.$$

Nous trouvons pour les valeurs de w évaluées en atmosphères qui correspondent aux pressions initiale et finale, en nous servant des valeurs du coefficient différentiel inscrites dans le tableau auxiliaire, p. 307, et en divisant par 10334,

$$w = 0{,}094 \quad \text{pour} \quad 5 \text{ atmosphères},$$
$$w = 0{,}162 \quad \text{pour} \quad 10 \text{ atmosphères}.$$

Ces nombres donnent l'accroissement que subirait la pression par minute à partir des forces élastiques données, si cet accroissement devenait proportionnel au temps.

Les expériences de M. Fairbairn citées plus haut confirment l'exactitude des formules que nous donnons ici; elles ont été faites avec une chaudière de locomotive, et ont conduit M. Fairbairn à la relation

$$\theta = \frac{1}{4{,}44}(t - t_1),$$

dans laquelle les températures sont évaluées en degrés Fahrenheit. En degrés centigrades on a, pour le temps,

$$\theta = 0{,}405(t - t_1),$$

et, pour la vitesse de l'accroissement de pression,

$$w = 2{,}466 \frac{dp}{dt};$$

cette vitesse est donc beaucoup plus considérable que celle d'une chaudière fixe, ce qui s'explique facilement par ce qui vient d'être dit. M. Fairbairn n'a pas reconnu la signification du facteur

$$0{,}405 = \frac{Mc}{Q_0}.$$

Ce facteur peut indiquer après quel temps il doit y avoir explosion, c'est-à-dire à quel moment la force élastique atteint une valeur maxima donnée; si l'on détermine ce moment en

donnant à ce facteur la valeur 0,405, le résultat ne peut s'appliquer qu'à la chaudière qui a servi pour les expériences. Les formules indiquées plus haut résolvent, au contraire, ce problème pour une chaudière quelconque.

Problème II. — *Comment se comporte un mélange de vapeur et de liquide, quand la quantité de chaleur fournie est proportionnelle à la variation de la température ?*

En désignant par λ une quantité constante quelconque (*), on peut écrire

$$dQ = \lambda\, dt = \lambda\, dT.$$

J'ai montré à la page 142 que pour les gaz cette supposition conduit à des théorèmes remarquables : λ devient la chaleur spécifique qui correspond à un changement satisfaisant à la loi

$$p^m v^n = \text{const.};$$

le travail intérieur et le travail extérieur sont alors proportionnels au changement de la température. Les équations données à cette occasion ont servi à résoudre les problèmes les plus importants qui sont relatifs aux propriétés des gaz. Les propositions établies nous ont ensuite servi à la théorie des machines à feu.

L'idée se présente naturellement d'étudier aussi les mélanges de liquide et de vapeur, en supposant que la quantité de chaleur fournie soit proportionnelle à l'accroissement de la température.

Dans cette hypothèse nous avons, d'après l'équation (227),

$$(274) \qquad \lambda\, dT = dq + T\, d\left(\frac{rx}{T}\right).$$

Divisons les deux membres de cette équation par T, et inté-

(*) Nous avons jusqu'à présent désigné par λ la chaleur totale de la vapeur saturée telle qu'elle a été trouvée par M. Regnault; mais, comme nous ne devons pas faire usage ici de cette quantité, nous pouvons sans inconvénient donner à la lettre λ une autre signification.

grons, en affectant de l'indice 1 les quantités qui se rapportent à l'état initial, et en nous servant de l'expression plus simple que fournit l'équation (242); nous trouvons

$$(275)\qquad \lambda \operatorname{lognép} \frac{T}{T_1} = \left(\tau + \frac{xr}{T}\right) - \left(\tau_1 + \frac{x_1 r_1}{T_1}\right),$$

et toute la chaleur nécessaire sera

$$(276)\qquad Q = \lambda(T - T_1).$$

Lorsque le mélange est donné par son état initial (x_1, p_1, t_1) et quand la constante λ est connue, on peut calculer d'après l'équation (275) la quantité spécifique de vapeur x pour toute autre température, et le volume spécifique se trouve ensuite par la relation

$$v = xu + \sigma.$$

Comme on connaît aussi la pression p qui correspond à la température t, on peut représenter graphiquement la loi des variations de la pression en prenant les volumes v pour abscisses et les pressions p pour ordonnées. Mais il est impossible d'obtenir, aussi bien dans le cas actuel que dans les cas déjà examinés, l'équation de cette courbe sous la forme $p = F(v)$.

La quantité de chaleur qu'il faut fournir ou enlever pendant le changement se calcule d'après l'équation (276), et la variation du travail intérieur mesurée en unités de chaleur se trouve par l'intégration de l'équation (220); on a ainsi

$$(277)\qquad A(U - U_1) = q - q_1 + x\rho - x_1\rho_1,$$

équation dans laquelle il faut mettre à la place de x sa valeur tirée de l'équation (275). Enfin le travail extérieur L, que l'on dépense ou que l'on gagne, est donné, comme on le voit facilement, par la formule

$$(278)\qquad L = \frac{Q}{A} - (U - U_1).$$

Le poids thermique relatif au changement proposé est

$$P = \lambda \operatorname{lognép} \frac{T}{T_1}.$$

On a répondu maintenant à toutes les questions que l'on peut se poser ici. Lorsqu'on voudra faire parcourir au mélange un cycle comme celui de la page 200 (théorie des machines à feu), on trouvera que toutes les formules écrites depuis la page 201 jusqu'à la page 207 sont applicables au cas actuel. Nous laissons de côté cette question en ce moment, parce que nous y reviendrons plus loin dans la théorie des machines à vapeur.

Problème III. — *Comment se comporte un mélange de vapeur et de liquide, quand on maintient constante la chaleur latente intérieure de la vapeur?*

Nous avons désigné plus haut par ρ la chaleur latente intérieure de l'unité de poids de vapeur; elle peut être calculée pour diverses vapeurs et à diverses températures, à l'aide des formules de la page 273. Pour x kilogrammes de vapeur, la chaleur latente intérieure est $x\rho$; si l'on veut que cette quantité reste constante, on a les deux équations

(279) $$d(x\rho) = 0$$

et

(280) $$x\rho = x_1\rho_1;$$

on peut donc, en partant d'un certain état initial (x_1, p_1, t_1), calculer la quantité de vapeur x pour toute autre pression p et à la température correspondante t, et on déterminera le nouveau volume v de l'unité de poids du mélange à l'aide de la relation

$$v = xu + \sigma;$$

le volume initial est donné par l'équation

$$v_1 = x_1 u_1 + \sigma.$$

En combinant les équations précédentes, on trouve d'ailleurs directement le volume v par la relation

$$v = \sigma + (v_1 - \sigma)\frac{\frac{\rho_1}{u_1}}{\frac{\rho}{u}},$$

dans laquelle on peut négliger σ dans la plupart des cas.

La forme de la courbe qui indique comment la pression varie avec le volume est ainsi déterminée, et on peut la tracer graphiquement.

La quantité de chaleur qu'il faut fournir au mélange, quand le changement d'état suit cette courbe, se trouve au moyen de la formule générale (227), dans laquelle on substitue la valeur de x déduite de l'équation (280); on a alors

$$dQ = dq + x_1 \rho_1 T d\left(\frac{r}{\rho T}\right).$$

La variation du travail intérieur mesurée en unités de chaleur est ici, en vertu de l'équation (220) et de la relation $d(x\rho) = 0$,

$$A\,dU = dq,$$

et le travail extérieur mesuré également en unités de chaleur, est

$$A\,dL = dQ - A\,dU,$$

ou bien

$$A\,dL = x_1 \rho_1 T d\left(\frac{r}{\rho T}\right).$$

On pourrait représenter la quantité $\frac{r}{\rho T}$ pour différentes vapeurs comme une fonction de la température seule (formule empirique), et alors on intégrerait facilement l'équation précédente. Mais nous ne poursuivrons pas davantage le problème, et nous nous bornons à faire remarquer que pour la vapeur d'eau au moins, la courbe des pressions qui répond à la question posée coïncide presque avec la courbe adiabatique, quand la quantité spécifique de vapeur initiale x_1 est très-peu différente de l'unité.

Prenons, par exemple, de la vapeur saturée et sèche ($x_1 = 1$) sous la pression de 8 atmosphères, et laissons-la se détendre suivant la courbe considérée; nous trouvons, d'après l'équation (280), pour les valeurs de x qui correspondent aux pressions finales $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, atmosphères, les valeurs de ρ_1 et ρ étant

tirées de la Table X (de l'Appendice),

$$x = 0{,}8620, \quad 0{,}8874, \quad 0{,}9172 \quad \text{et} \quad 0{,}9540.$$

Dans le tableau de la page 331, nous avons, d'un autre côté, pour la courbe adiabatique, dans les mêmes circonstances,

$$x = 0{,}8541, \quad 0{,}8844, \quad 0{,}9182 \quad \text{et} \quad 0{,}9564.$$

La coïncidence est frappante et s'étend même aux cas du tableau de la page 334 pour $x_1 = 0{,}90$; $0{,}80$; $0{,}70$. Une étude plus attentive montre cependant que l'on ne doit admettre la coïncidence des deux courbes que pour la vapeur d'eau; on peut s'en convaincre aisément en passant à l'autre cas limite, c'est-à-dire en supposant qu'il n'y ait au commencement que le liquide seul, ou que $x_1 = 0$. Dans ce cas, nous avons aussi $x = 0$ dans notre problème, c'est-à-dire que la courbe se transforme en une ligne droite parallèle à l'axe des ordonnées; il suit de là que $v = v_1 = \sigma$, ce qui n'a nullement lieu pour la courbe adiabatique. Mais il est certain que si l'on a au commencement de la vapeur d'eau saturée et sèche, il est permis de substituer la formule plus simple (280) à l'équation (243), pour des recherches relatives à la courbe adiabatique, quand on veut déterminer la quantité spécifique de vapeur x à la fin de l'expansion ou de la compression.

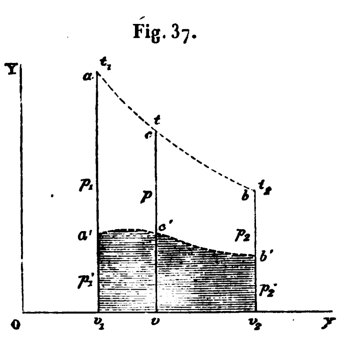
On pourrait facilement multiplier les problèmes du même genre. Ils nous ont servi à indiquer la marche des calculs et à montrer l'application des équations générales dans le cas où le changement du mélange de vapeur et de liquide se fait suivant un *trajet réversible :* on pourrait étudier les cas où xr et $\frac{xr}{T}$ sont constants, et faire encore d'autres hypothèses; mais ce qui précède suffit pour les principales applications de la Mécanique.

IX. — *Des changements non réversibles d'un mélange de vapeur et de liquide.*

Nous avons considéré jusqu'à présent le cas où il y a équilibre à chaque instant entre la pression extérieure et la tension de la vapeur. Cette hypothèse restreint la question; quand on l'abandonne, les théorèmes de la théorie mécanique de la chaleur prennent une signification beaucoup plus générale, et les propositions précédentes relatives aux changements réversibles deviennent des cas particuliers de propositions plus générales. J'ai déjà donné, sous une forme générale, dans la première Section, p. 85 à 94, et à propos de l'étude des gaz, p. 143 à 154, les résultats des recherches que j'ai faites dans cette voie. Ils s'appliquaient à des corps quelconques. Je vais maintenant m'occuper d'une manière spéciale des mélanges de vapeur et de liquide. J'entrerai dans de plus grands détails que pour les gaz permanents, parce que l'occasion se présente de traiter pour la première fois une série de problèmes très-importants de la Mécanique appliquée.

Supposons que l'on ait donné l'unité de poids du mélange de vapeur et de liquide dans un état initial a (p_1, v_1) (*fig.* 37);

Fig. 37.



soient t_1 la température, x_1 la quantité spécifique de vapeur; imaginons le mélange renfermé dans un cylindre derrière un piston. La pression exercée du dehors sur le piston équilibrait d'abord la tension de la vapeur p_1; elle est réduite tout à coup à

la valeur inférieure $v_1 a' = p'_1$; alors la masse se dilate, repousse le piston qui est supposé sans poids, et effectue un certain travail extérieur que l'on peut déterminer, quand la loi des variations de la pression extérieure $vc' = p'$ est donnée par la courbe $a'c'b'$. Lorsque le volume est devenu v_2, on arrête subitement le piston; à partir de ce moment, le mélange, qui possède une agitation visible, revient rapidement à l'état d'équilibre; la force élastique de la vapeur augmente, et passe de p'_2 à p_2; désignons par t_2 la température et par x_2 la quantité spécifique de vapeur qui correspondent au nouvel état d'équilibre b. Nous avons ici un changement d'état non réversible, car il est évidemment impossible de ramener la masse à l'état initial au moyen d'une compression, en suivant le même trajet. Nous ne pouvons donc pas nous servir des formules (222) à (228) pour étudier un tel changement; il faut recourir aux équations générales (220) et (221).

L'intégration de ces deux équations donne la variation du travail intérieur mesurée en unités de chaleur, pendant le passage d'un état d'équilibre (a) à un autre (b), à savoir :

$$A(U_2 - U_1) = q_2 - q_1 + x_2\rho_2 - x_1\rho_1,$$

et aussi l'équation

$$Q = A(U_2 - U_1 + L),$$

dans laquelle L désigne le travail extérieur que le mélange a produit en se dilatant.

Si la pression extérieure p' est donnée en fonction de v, de sorte que le travail L puisse être déterminé par l'équation

$$(281) \qquad L = \int_{v_1}^{v_2} p'\,dv,$$

on déduit des deux avant-dernières équations celle qui suit :

$$(282) \qquad Q = q_2 - q_1 + x_1\rho_1 - x_2\rho_2 + A\int_{v_1}^{v_2} p'\,dv.$$

Puisqu'on a l'unité de poids du mélange, on connaît en outre

les volumes initial et final par les formules connues

$$(283) \qquad v_1 = x_1 u_1 + \sigma \quad \text{et} \quad v_2 = x_2 u_2 + \sigma.$$

Il faut remarquer que l'on arrive encore à l'équation (282) en imaginant que le changement se fasse suivant le trajet réversible $aa'c'b'b$; pour cela il faut soustraire d'abord à la masse la quantité de chaleur Q_1 sous un volume constant v_1, jusqu'à ce que la pression soit descendue de p_1 à p'_1, et que le travail intérieur ait passé de U_1 à U'_1; il faut ensuite amener le corps en b', suivant le trajet réversible $a'c'b'$, ce qui exige une quantité de chaleur Q_2, et ce qui fait passer le travail intérieur de U'_1 à U'_2; enfin, il est nécessaire d'échauffer la masse sous un volume constant v_2 jusqu'à ce qu'elle soit arrivée à l'état b; cela exige une quantité de chaleur Q_3. D'après ce qui précède, ces trois quantités de chaleur sont données par les équations

$$\begin{aligned} Q_1 &= A(U'_1 - U_1), \\ Q_2 &= A(U'_2 - U'_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p'\,dv, \\ Q_3 &= A(U_2 - U'_2). \end{aligned}$$

On en déduit, par addition, toute la chaleur nécessaire

$$Q = A(U_2 - U_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p'\,dv,$$

et cette équation peut se mettre sous la forme de l'équation (282) pour les mélanges de vapeur et de liquide. Il est souvent plus commode de procéder comme nous venons de l'indiquer : on suit les phénomènes avec plus de facilité.

Les équations (282) et (283) donnent le moyen de résoudre un grand nombre de problèmes. Lorsqu'on donne, par exemple, la quantité de chaleur totale Q, le travail extérieur L et l'état initial, on peut déterminer l'état final, c'est-à-dire le nouvel état d'équilibre b. Si au contraire on connaissait, avec les deux états extrêmes, le travail extérieur L, on pourrait calculer la quantité de chaleur Q, et, inversement, on pour-

rait trouver le travail L si l'on connaissait la quantité de chaleur Q. Il est très-remarquable que, dans la résolution de ces problèmes, *le mode d'introduction de la chaleur pendant le passage d'un état d'équilibre à l'autre soit en général indifférent;* il suffit que l'on connaisse la quantité totale de chaleur Q qu'il faut introduire pendant le changement. Il convient néanmoins de se préoccuper du mode d'introduction de la chaleur, parce que c'est par là qu'on peut donner aux équations une signification susceptible d'applications plus générales; pour atteindre ce but, on a un moyen simple sur lequel j'ai déjà appelé l'attention en traitant des gaz (p. 149).

Si nous avions fait dilater la masse seulement jusqu'au volume v (*fig.* 37) en arrêtant le cycle à ce moment, la pression p' aurait pris, dans l'état d'équilibre c, la valeur $p = vc$, la température et la quantité spécifique de vapeur seraient devenues respectivement t et x. S'il a fallu fournir jusqu'à ce moment la quantité de chaleur Q, on trouve, d'après l'équation (282),

$$(284) \qquad Q = q - q_1 + x\rho - x_1\rho_1 + A\int_{v_1}^{v} p'\,dv.$$

L'intégrale du second membre représente le travail extérieur qui a été gagné jusqu'au moment considéré, et sa valeur est représentée par la partie $v_1vc'a'$ de la surface ombrée de la *fig.* 37.

En différentiant, on trouve

$$(285) \qquad dQ = dq + d(x\rho) + Ap'\,dv,$$

équation qui constitue l'équation fondamentale relative aux changements non réversibles. La pression extérieure est p', la pression correspondant à l'équilibre pour la même époque est p; on doit considérer ces deux équations comme des fonctions du volume v, ce qui donne deux courbes; la première ($a'c'b'$) obéit à la loi $p' = F'(v)$, qui indique la variation de la pression extérieure, et la seconde (acb) est assujettie à la loi $p = F(v)$, qui représente la pression correspondant à l'équilibre. Pour appliquer l'équation (285), il ne faut pas

oublier que x désigne la quantité spécifique de vapeur pour l'*état d'équilibre*, ou, si l'on veut, après le retour au repos, et que les quantités q et ρ sont des fonctions de la température d'équilibre t. Pour plus de simplicité, j'appellerai dorénavant température, pression et quantité spécifique de vapeur, *à une époque du changement*, les valeurs que ces quantités auraient après le retour au repos, si l'on interrompait la variation de volume à cette époque, et je n'emploierai qu'exceptionnellement les expressions *température d'équilibre*, *pression d'équilibre* et *quantité de vapeur d'équilibre*.

L'équation fondamentale (285) peut se mettre sous des formes très-diverses. En ajoutant et en retranchant $Apdv$ dans le second membre, on a

$$(286) \qquad dQ = dq + d(x\rho) + Apdv - A(p - p')dv.$$

Mais les trois premiers termes du second membre de cette équation donnent la quantité de chaleur qu'il faut fournir à la masse lorsque le changement d'état est réversible suivant acb. En mettant à la place de ces termes leur valeur déduite de l'équation (227), on trouve

$$dQ = dq + \mathrm{T}\,d\left(\frac{xr}{\mathrm{T}}\right) - A(p - p')\,dv.$$

Divisons les deux membres de cette équation par AT et intégrons; nous trouvons pour le poids thermique relatif à un cycle non réversible,

$$(287) \quad \mathrm{P} = \int \frac{dQ}{\mathrm{AT}} = \frac{1}{\mathrm{A}}\left[\left(\tau + \frac{xr}{\mathrm{T}}\right) - \left(\tau_1 + \frac{x_1 r_1}{\mathrm{T}_1}\right)\right] - \int \frac{(p-p')}{\mathrm{T}}\,dv,$$

en conservant les notations adoptées plus haut.

Lorsque le changement d'état se fait suivant un trajet réversible, on a constamment $p = p'$; alors les deux courbes acb et $a'c'b'$ se confondent. Si le cycle est non réversible, le poids thermique est toujours plus petit, et le terme $A(p - p')$ reste dans l'équation (286); on reconnaît immédiatement que l'intégrale de $A(p - p')dv$ est représentée sur la *fig.* 37 par l'aire

comprise entre les deux courbes *acb* et *a'c'b'*. Pour ce qui concerne le poids thermique, il faut se reporter aux pages 150 et 151; les théorèmes qui ont été alors établis s'appliquent également ici.

Nous allons résoudre plusieurs problèmes dans lesquels un mélange de liquide et de vapeur suit un trajet non réversible.

PROBLÈME I. — *Expansion d'un mélange de vapeur et de liquide qui surmonte une pression extérieure constante.*

La pression extérieure p', qui est plus petite ici que la pression d'équilibre initiale p_1, est supposée constante; la courbe *a'c'b'* de la *fig.* 37 devient alors une ligne droite parallèle à l'axe des abscisses OX. Nous supposons en outre que l'on nous donne les volumes initial et final v_1 et v_2 de l'unité de poids du mélange. La quantité de chaleur totale Q_2, que l'on fournit au mélange pendant le passage de l'un des états d'équilibre à l'autre, s'obtient par l'intégration de l'équation (285)

$$(288) \qquad Q_2 = q_2 - q_1 + x_2\rho_2 - x_1\rho_1 + Ap'(v_2 - v_1),$$

dans laquelle

$$(289) \qquad v_1 = x_1 u_1 + \sigma \quad \text{et} \quad v_2 = x_2 u_2 + \sigma.$$

Si l'on donnait la température et les quantités de vapeur qui correspondent à l'équilibre pour l'état initial et l'état final, on pourrait calculer la quantité de chaleur totale Q_2 qu'il faut fournir ou soustraire, et, réciproquement, on pourrait déterminer l'état final, si l'on connaissait l'état initial et la quantité de chaleur Q_2.

On reconnaît, d'après cela, que les formules précédentes et le problème que nous traitons en ce moment comprennent une infinité de cas, et que la question n'est pas complétement déterminée. On peut la déterminer comme nous l'avons dit ci-dessus, mais on peut aussi supposer, ce qui nous permet de bien suivre le phénomène, que l'on donne, outre la courbe de la pression extérieure *a'c'b'* (*fig.* 37), celle de la pression d'équilibre *acb*, ou bien encore le mode d'introduction de la

chaleur. Admettons qu'on interrompe à un moment quelconque l'introduction de la chaleur et la dilatation, alors que le volume a passé de v_1 à v; soient t la température et x la quantité de vapeur à cet instant, quand l'équilibre est rétabli; la quantité de chaleur Q qu'il a fallu introduire jusqu'à ce moment est, d'après l'équation (228),

(290) $$Q = q - q_1 + x\rho - x_1\rho_1 + Ap'(v - v_1),$$

dans laquelle

(291) $$v_1 = x_1 u_1 + \sigma \quad \text{et} \quad v = xu + \sigma.$$

Examinons quelques cas particuliers pour mieux expliquer ce qui précède.

Premier cas. — Pendant l'introduction de la chaleur, la température d'équilibre est constante.

Lorsque la température est constante, il en est de même de la pression d'équilibre p; la courbe de la pression d'équilibre *acb* (*fig.* 37) est, par suite, une ligne droite parallèle à l'axe des abscisses; cela exige que la vapeur soit encore saturée après le retour à l'équilibre, supposition que nous conserverons toujours dans ce qui va suivre.

On a ici $q_1 = q_2$, $\rho_1 = \rho_2$, $u_1 = u_2$; alors, pour une certaine dilatation $v_2 - v_1$, il vient, d'après l'équation (289),

(292) $$v_2 - v_1 = (x_2 - x_1)\, u_1,$$

d'où l'on tire la quantité spécifique de vapeur finale x_2.

Le travail extérieur mesuré en unités de chaleur est

(293) $$Ap'(v_2 - v_1) = Ap' u_1 (x_2 - x_1).$$

La variation du travail intérieur est

(294) $$A(U_2 - U_1) = (x_2 - x_1)\rho_1,$$

et la quantité de chaleur totale qu'il faut introduire est, d'après l'équation (288),

(295) $$Q_2 = (\rho_1 + Ap' u_1)(x_2 - x_1).$$

Les formules précédentes donnent pour un instant quel-

conque du passage le travail extérieur, le travail intérieur et la quantité de chaleur Q qu'il a fallu fournir pendant la dilatation du volume v_1 au volume v lorsqu'on substitue à x_2 la quantité de vapeur x tirée de l'équation

$$v = xu_1 + \sigma.$$

Si l'on avait exceptionnellement $p' = p$, les deux courbes coïncideraient comme cela a été déjà dit, et donneraient la courbe que nous avons appelée plus haut *isothermique*, et les formules précédentes deviendraient celles de la page 295.

Supposons au contraire que la pression extérieure $p' = 0$; alors le travail extérieur est nul d'après l'équation (293), et nous trouvons

$$Q_2 = A(U_2 - U) = \rho_1 (x_2 - x_1);$$

en vertu de l'équation (292) il vient

$$Q_2 = \frac{\rho_1}{u_1}(v_2 - v_1).$$

Cette formule donne la quantité de chaleur qu'il faut envoyer au mélange lorsqu'on fait communiquer le réservoir qui le renferme avec un réservoir vide d'air d'un volume égal à $v_2 - v_1$, et qu'on demande que la température reprenne sa valeur initiale après le rétablissement de l'équilibre. Dans une telle opération la masse de liquide $x_2 - x_1$, qui se détermine facilement au moyen de l'équation (292), se transforme en vapeur.

Lorsque nous adoptons pour p' une valeur comprise entre p_1 et 0, nous trouvons le poids thermique au moyen de l'équation (287), parce que les pressions p et p', ainsi que la température T, sont constantes.

Il vient donc

$$P = \frac{r_1}{AT_1}(x_2 - x_1) - \frac{(p_1 - p')(v_2 - v_1)}{T_1},$$

ou bien, si l'on tient compte de l'équation (292),

$$(296) \qquad P = \frac{r_1 - A(p_1 - p')u_1}{AT_1}(x_2 - x_1).$$

Cette formule se simplifie beaucoup pour les deux cas limites $p_1 = p'$ et $p' = 0$, et donne respectivement

$$P = \frac{r_1}{AT_1}(x_2 - x_1) \quad \text{et} \quad P = \frac{\rho_1}{AT_1}(x_2 - x_1).$$

On voit combien de problèmes différents se présentent. On en trouve facilement la solution, même dans le cas particulier où la pression extérieure est constante; on peut faire, relativement à la courbe de la pression d'équilibre, les hypothèses les plus diverses et par suite reprendre avec la condition plus générale $p' =$ const., que nous venons de nous imposer, tous les problèmes que nous avons traités à propos des changements d'état réversibles. Nous pouvons supposer, par exemple, que la quantité de vapeur d'équilibre reste constante pendant la dilatation; alors la courbe de pression *acb* (*fig.* 37), dont la forme pourrait facilement être déterminée, serait une courbe de quantité constante de vapeur d'une espèce particulière.

Nous pouvons encore supposer que le travail intérieur soit constant, c'est-à-dire qu'on ait

$$dq + d(x\rho) = 0;$$

la courbe d'équilibre serait alors une espèce particulière de courbe isodynamique dont on pourrait déterminer la forme, etc.

Les recherches de ce genre sont tellement faciles à faire à l'aide des formules que j'ai données, que je crois inutile de multiplier les exemples où l'on ferait quelque hypothèse particulière sur les deux courbes de pression.

Donnons pourtant un exemple dans lequel l'introduction de la chaleur est assujettie à certaines conditions.

Deuxième cas. — Le mélange se dilate en surmontant une pression extérieure constante, sans recevoir ni perdre de la chaleur.

Il faut mettre $Q = 0$ dans l'équation (290), et il vient

$$q - q_1 + x\rho - x_1\rho_1 + Ap'(v - v_1) = 0;$$

et comme nous tirons des équations (291)

$$v - v_1 = xu - x_1 u_1,$$

nous avons, en remplaçant $v - v_1$ par sa valeur,

$$(297) \qquad q + x(\rho + Ap'u) = q_1 + x_1(\rho_1 + Ap'u_1).$$

Lorsqu'on suppose que l'état initial $(t_1 p_1 x_1)$ soit donné, ainsi que la pression constante extérieure p', on peut déterminer, à l'aide de la dernière équation, la quantité de vapeur d'équilibre x pour une valeur de la température d'équilibre t et pour la pression p qui y correspond; le volume se calcule par la relation

$$v = xu + \sigma.$$

Si l'on construit alors une courbe ayant pour abscisses les valeurs du volume v, et pour ordonnées celles de la pression p, on obtient la courbe de pression d'équilibre *acb* (*fig.* 37), que l'on doit considérer comme une espèce particulière de courbe adiabatique.

Lorsqu'au contraire on donne v et v_1, on détermine, à l'aide des équations (291), les valeurs de x_1 et de x:

$$x_1 = \frac{v_1 - \sigma}{u_1} \quad \text{et} \quad x = \frac{v - \sigma}{u};$$

puis on substitue ces valeurs dans l'équation (297) et on détermine la température d'équilibre t, ce qui, il est vrai, ne peut se faire que par tâtonnements, parce que les quantités q, ρ et u, qui sont des fonctions de la température, n'ont pas avec celle-ci des relations simples.

Quand on se propose ce problème, on a généralement pour but de déterminer seulement l'état final de la masse.

Si l'on faisait continuer la dilatation jusqu'à ce que la pression finale d'équilibre fût égale à la pression extérieure p', on trouverait, d'après l'équation (297),

$$q_2 + x_2(\rho_2 + Ap_2 u_2) = q_1 + x_1(\rho_1 + Ap_2 u_1),$$

et, en tenant compte de la relation $r = \rho + A pu$,

$$(298) \qquad q_2 + x_2 r_2 = q_1 + x_1 (\rho_1 + A p_1 u_1).$$

On peut conclure de là la quantité de vapeur finale x_2 et ensuite le volume final v_2.

On voit facilement, au moyen de l'équation (297), si, dans les changements d'état examinés ici, il y a une condensation de vapeur ou une vaporisation de liquide, c'est-à-dire si l'on a $x < x_1$ ou $x > x_1$. Lorsque les pressions-limites p_1 et p_2 sont données, ainsi que la pression extérieure p', c'est la quantité spécifique de vapeur initiale x_1 qui en décide.

Considérons dans un cylindre l'unité de poids d'un mélange d'eau et de vapeur sous une pression de 5 atmosphères, et supposons que ce mélange se détende, en surmontant une pression extérieure constante de 1 atmosphère, jusqu'à ce que la pression finale d'équilibre soit de 2 atmosphères; alors on trouve, au moyen de l'équation (297),

$$x = 0,0645 + 0,9259 x_1.$$

Pour arriver à ce résultat, on a pris dans la Table X de l'Appendice, pour les quantités qui correspondent à la pression de 5 atmosphères,

$$q_1 = 153,74, \quad \rho_1 = 454,99, \quad u_1 = 0,3626,$$

et pour celles qui sont relatives à la pression de 2 atmosphères,

$$q = 121,42, \quad \rho = 480,00, \quad u = 0,8588;$$

on avait, d'après l'hypothèse, $p' = 10334$.

L'équation (289) donne alors, pour les volumes initial et final,

$$v_1 = 0,3626 x_1 + 0,0010 \quad \text{et} \quad v = 0,7952 x_1 + 0,0554.$$

Supposons maintenant qu'il n'y ait que de la vapeur au commencement; alors $x_1 = 1$, et on a

$$x = 0,9904;$$

le rapport d'expansion est

$$\frac{v}{v_1} = 2,338.$$

Comme on a ici $x < x_1$, la vapeur *se condense* dans l'opération; mais si le poids initial de la vapeur était égal à celui du liquide, c'est-à-dire si $x_1 = 0,5$, on trouverait

$$x = 0,5274,$$

et le rapport d'expansion serait

$$\frac{v}{v_1} = 2,470.$$

Dans ce cas, $x > x_1$; une partie de l'eau liquide se vaporiserait donc, et le poids de cette partie serait 0,0274.

Si l'expansion continuait jusqu'à ce que la pression d'équilibre fût égale à la pression extérieure, c'est-à-dire à une atmosphère, il faudrait employer l'équation (298); on y substituerait les nombres de la Table X qui correspondent à une atmosphère :

$$q_2 = 100,50 \quad \text{et} \quad r_2 = \rho_2 + A p_2 u_2 = 536,50.$$

Supposons que la quantité finale de vapeur x_2 soit égale à l'unité, c'est-à-dire qu'il n'y ait finalement que de la vapeur saturée sous la pression d'une atmosphère; en substituant dans l'équation (298) les valeurs données ci-dessus, on trouverait

$$x_1 = 1,042,$$

équation qui ne peut évidemment jamais être remplie, puisque x_1 ne peut dépasser 1. Ce résultat montre que la vapeur doit être surchauffée dans l'état initial.

Cela nous conduit à résoudre un problème qui offre un grand intérêt, parce qu'il montre très-clairement la différence des gaz permanents et des vapeurs saturées.

Nous supposerons que la pression extérieure que doit surmonter le mélange pendant sa dilatation soit nulle.

On réalise évidemment ce cas quand on met le réservoir

qui contient le mélange de vapeur et de liquide en communication avec un espace vide d'air. Le mélange se dilate alors sans effectuer de travail extérieur, et on demande quel est l'état final quand l'équilibre est établi. Nous avons trouvé (p. 147) que, pour un gaz permanent, la température *ne change pas* pendant une telle opération; mais on a un résultat très-différent pour un mélange de vapeur et de liquide (*). Il suffit de faire $p' = 0$ dans l'équation (297), et on obtient

$$q + x\rho = q_1 + x_1\rho_1. \tag{299}$$

Cette équation, jointe aux deux suivantes

$$v = xu + \sigma \quad \text{et} \quad v_1 = x_1 u_1 + \sigma,$$

résout déjà le problème. Mais ces trois équations sont les mêmes que celles que nous avons employées à la page 296 pour l'étude des lignes isodynamiques. Il suit de là que, dans le cas actuel, la courbe de la pression d'équilibre *acb* (*fig.* 37, p. 355) *est identique* à la courbe isodynamique des vapeurs. Mais l'étude de cette dernière nous a fait voir que la dilatation du mélange est accompagnée d'une *diminution de la température et de la pression*, et *de la vaporisation* d'une partie du liquide; et cela avait lieu pour *toutes* les vapeurs qui jusqu'ici ont été soumises à une pareille étude. Il faut donc que la vapeur contienne au commencement une certaine quantité de liquide, c'est-à-dire que $x_1 < 1$, pour qu'elle ne soit pas surchauffée après son introduction dans l'espace vide d'air.

Éliminant x et σ entre les équations précédentes, on trouve

$$\frac{\rho}{u}(v - v_1) = q_1 - q + x_1 u_1\left(\frac{\rho_1}{u_1} - \frac{\rho}{u}\right),$$

dans laquelle $v - v_1$ représente l'augmentation de volume, c'est-à-dire la capacité de l'espace qui était primitivement vide d'air.

(*) *Voyez* le Mémoire de l'Auteur : *Beiträge zur Theorie der Dämpfe* (*Annales de Poggendorff*, 1860).

La quantité de vapeur qui existe à la fin de la détente est

$$x = \frac{v - \sigma}{u}.$$

Imaginons dans un réservoir l'unité de poids d'un mélange d'eau et de vapeur sous la pression de 5 atmosphères; soit $x_1 = 0,974$ la quantité spécifique de vapeur : quel doit être le volume du réservoir vide d'air, pour que la détente amène la pression à 2 atmosphères? Quels seront le volume total v et la quantité spécifique de vapeur x à la fin de l'opération?

En nous servant des valeurs numériques de l'exemple précédent, on trouve, au moyen de l'équation (299),

$$x = 0,990.$$

Les volumes initial et final sont

$$v_1 = 0^{mc},3541 \quad \text{et} \quad v = 0^{mc},8515;$$

le volume du réservoir vide doit donc être

$$v - v_1 = 0^{mc},4974.$$

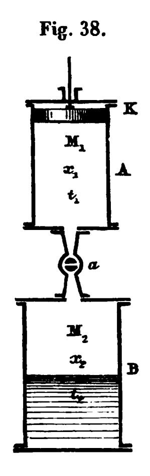
Puisque $x > x_1$, il y a vaporisation, comme on l'avait prévu.

Si nous avions choisi le volume du réservoir de manière que la pression finale fût réduite à une atmosphère, on aurait trouvé de la même manière $x = 1$ pour la quantité spécifique de vapeur à la fin de l'opération, et le volume de ce réservoir aurait dû être $v - v_1 = 1^{mc},2963$. Dans cette opération, toute l'eau qui existait au commencement serait réduite encore en vapeur; la vapeur serait surchauffée si l'on avait donné au réservoir vide une capacité supérieure à $1^{mc},2963$.

Problème II. — *On fait communiquer entre eux deux réservoirs qui contiennent des mélanges de vapeur et de liquide de la même espèce; on demande quel est l'état final de la masse totale, en supposant qu'au commencement les quantités spécifiques de vapeur et les pressions soient différentes dans les deux réservoirs, et qu'il n'y ait ni addition ni soustraction de chaleur.*

Le réservoir A (*fig.* 38) contient M_1 kilogrammes de mélange, dont une partie $M_1 x_1$ est à l'état de vapeur et l'autre $M_1(1 - x_1)$ à l'état de liquide; soient V_1 le volume, p_1 la pres-

Fig. 38.



sion et t_1 la température du mélange (le piston K, qui se trouve dans le réservoir A sur la figure, est supposé fixe pour le moment). Le réservoir B, qui est d'abord séparé du précédent au moyen du robinet *a*, contient $M_2 x_2$ kilogrammes de vapeur et $M_2(1 - x_2)$ kilogrammes de liquide sous la pression p_2 et à la température t_2; son volume est V_2. Nous supposons expressément que les deux réservoirs renferment des mélanges de vapeur et de liquide de *même espèce*, parce qu'on ne peut résoudre la question qu'à cette condition, lorsqu'on s'appuie sur les résultats d'expériences que l'on possède aujourd'hui.

Lorsqu'on ouvre le robinet *a*, les deux masses se mélangent; la température et la pression deviennent égales de part et d'autre; la quantité spécifique de la vapeur sera différente de x_1 et de x_2, les deux réservoirs n'en formant plus qu'un seul; en la désignant par x, on a finalement dans tout l'espace $(M_1 + M_2)x$ kilogrammes de vapeur et $(M_1 + M_2)(1 - x)$ kilogrammes de liquide à la température t et sous la pression p. Nous cherchons les valeurs de x, t et p.

Les volumes des réservoirs A et B ont respectivement pour expressions

$$V_1 = M_1(x_1 u_1 + \sigma),$$
$$V_2 = M_2(x_2 u_2 + \sigma).$$

Après le mélange, le volume de toute la masse est

$$V = (M_1 + M_2)(xu + \sigma).$$

Comme le volume total ne change pas, on a

$$V = V_1 + V_2;$$

d'où l'on tire finalement

(300) $$(M_1 + M_2)xu = M_1 x_1 u_1 + M_2 x_2 u_2,$$

équation qui renferme, comme inconnues, la quantité spécifique de vapeur x et la quantité u, fonction de la température.

Voici une seconde équation : soit U_0 le travail intérieur de l'unité de poids du liquide à o degré ; le travail intérieur U_1 de la masse M_1 avant le mélange sera en unités de chaleur, d'après l'équation (220),

$$AU_1 = M_1(AU_0 + q_1 + x_1\rho_1),$$

et le travail intérieur U_2 de la masse M_2 sera, par analogie,

$$AU_2 = M_2(AU_0 + q_2 + x_2\rho_2).$$

Après le mélange, le travail intérieur U de toute la masse est

$$AU = (M_1 + M_2)(AU_0 + q + x\rho);$$

mais, comme il n'y a ni addition ni soustraction de chaleur, ni perte ni gain de travail extérieur, il faut que le travail intérieur de la masse totale soit le même avant et après le mélange, de sorte que

$$U = U_1 + U_2.$$

De cette dernière équation, nous déduisons, en nous servant des trois équations qui la précèdent,

(301) $$(M_1 + M_2)(q + x\rho) = M_1(q_1 + x_1\rho_1) + M_2(q_2 + x_2\rho_2).$$

Cette équation jointe à l'équation (300) résout le problème

proposé. On remarquera qu'il suffit d'avoir le rapport $\frac{M_2}{M_1}$; en le désignant par k et en éliminant x entre les équations (300) et (301), on trouve

$$(302)\quad (1+k)q+(x_1u_1+kx_2u_2)\frac{\rho}{u}=(q_1+x_1\rho_1)+k(q_2+x_2\rho_2).$$

Cette équation peut servir à déterminer la température t et, par suite, la pression finale p; la quantité spécifique de vapeur x se trouve, d'après l'équation (300), au moyen de la formule

$$(303)\qquad (1+k)xu=x_1u_1+kx_2u_2.$$

Supposons qu'il y ait, dans le réservoir A, M_1 kilogrammes de vapeur d'eau saturée et sèche sous une pression de $1^{atm},5$, et, dans le réservoir B, $M_2=24,380\,M_1$ kilogrammes d'eau et de vapeur sous la pression de $\frac{1}{10}$ d'atmosphère; soit enfin $x_2=0,0095$ la quantité spécifique de vapeur dans ce réservoir; on a $k=24,380$, et les équations (302) et (303) donnent

$$q+0,1771\frac{\rho}{u}=72,99,\quad \frac{x}{u}=0,1771,$$

après qu'on y a introduit les nombres de la Table X

$$q_1=112,41,\quad \rho_1=487,01,\quad u_1=1,1258$$

pour la pression de $1^{atm},5$, et

$$q_2=46,28,\quad \rho_2=538,85,\quad u_2=14,5508$$

pour la pression de $0^{atm},1$.

La première de ces deux équations conduit, après quelques tâtonnements, à l'aide de la Table X, à la pression finale $p=0^{atm},2$, et à la température finale $t=60°,45$; car, si l'on met dans cette équation les valeurs $q=60,59$ et $\frac{\rho}{u}=69,95$, qui correspondent à cette pression, son premier membre devient 72,98. La valeur de u qui correspond à cette température est $u=7,5421$, et, par suite, on a pour la quantité

spécifique de la vapeur répandue à la fin dans tout l'espace $x = 0,0235$.

Au commencement, le poids de la vapeur contenue en A était $M_1 x_1 = M_1$ et celui de l'espace B était $M_2 x_2 = 24,380 M_1 x_2$ ou $0,2316 M_1$; par suite, le poids total de la vapeur était $1,2316 M_1$.

Après le mélange, le poids de la vapeur contenue dans les deux réservoirs réunis est $(M_1 + M_2)x = 0,5964 M_1$.

Le volume du réservoir A est d'ailleurs

$$V_1 = M_1 (x_1 u_1 + \sigma) = 1^{mc},1268 M_1,$$

et celui du réservoir B est

$$V_2 = M_2 (x_2 u_2 + \sigma) = 3^{mc},3945 M_1;$$

par suite, le rapport

$$\frac{V_2}{V_1} = 3.$$

L'exemple que nous venons de traiter indique ce qui se passe dans le condenseur d'une machine à vapeur. Le réservoir A représente le cylindre dans lequel la pression est de $1^{atm},5$; le réservoir B est le condenseur, dont la capacité est ordinairement triple de celle du cylindre, et dans lequel il y a, d'après notre hypothèse, de la vapeur et de l'eau sous une pression de $0^{atm},1$. Au moment où l'on fait communiquer le cylindre avec le condenseur, la pression du condenseur monte subitement à $0^{atm},2$, ou mieux la pression dans ces deux espaces devient $0^{atm},2$, pourvu que les proportions d'eau et de vapeur soient celles que nous venons de supposer. On observe, en effet, une augmentation subite de pression au manomètre du condenseur au moment où celui-ci communique avec le cylindre; mais, comme le condenseur est refroidi par un courant d'eau, cette pression ne se maintient pas, et elle redescend très-rapidement, comme l'indiquent les oscillations du manomètre. Nous reviendrons plus loin sur cette importante question.

Reprenons notre problème sous un autre point de vue.

Supposons qu'on envoie de la chaleur aux réservoirs après leur réunion, quand le mélange s'est effectué, jusqu'à ce que la pression commune soit élevée de p à p_1, p_1 étant la pression initiale du réservoir A (nous admettons que A est celui des réservoirs dans lequel la pression initiale est la plus grande). L'introduction de la chaleur se fait ici sous le volume constant $V_1 + V_2$, depuis la température t jusqu'à la température t_1, et la quantité spécifique de vapeur après le mélange x doit maintenant être considérée comme connue; on trouve immédiatement la quantité de chaleur à fournir Q, d'après l'équation (262), p. 339; on a, de cette manière,

$$Q = (M_1 + M_2)\left[q_1 - q + xu\left(\frac{\rho_1}{u_1} - \frac{\rho}{u}\right)\right],$$

ou bien

$$Q = (M_1 + M_2)\left[q_1 - q + xu\frac{\rho_1}{u_1} - x\rho\right].$$

Remplaçons dans cette équation les quantités xu et $x\rho$ par leurs valeurs déduites respectivement des équations (300) et (301); il vient alors, après réduction,

$$(304)\qquad Q = M_2\left[q_1 - q_2 + x_2 u_2\left(\frac{\rho_1}{u_1} - \frac{\rho_2}{u_2}\right)\right].$$

Cette quantité de chaleur est entièrement indépendante de la masse M_1 qui se trouve dans le réservoir A, et elle est identique à la quantité de chaleur qu'il aurait fallu envoyer au réservoir B avant le mélange pour y faire monter la pression de p_2 à p_1. On pouvait, du reste, prévoir ce résultat; car si nous avions opéré le mélange seulement après avoir ainsi échauffé le réservoir B, l'état final eût été évidemment le même que dans le premier cas, où l'on a fait le mélange *avant* d'introduire la quantité de chaleur Q.

C'est avec intention que j'ai présenté le problème sous ce second point de vue; j'ai voulu faire voir que l'on peut introduire indifféremment dans l'un ou l'autre des deux réservoirs la quantité de chaleur Q, si l'on veut qu'il y ait finalement dans les deux espaces la pression p_1 qui existait d'abord en A,

et qu'il est indifférent que l'introduction de la chaleur se fasse *avant* ou *après* le mélange.

Ces résultats ont une grande importance : ils nous serviront à trouver l'influence de l'espace nuisible du cylindre dans la machine à vapeur. Dans cette application, on doit assimiler la chaudière à vapeur au réservoir A et l'espace nuisible du cylindre au réservoir B. Ces deux espaces contiennent de la vapeur sous des pressions différentes ; au moment où s'ouvre le tuyau de communication, le piston est presque immobile, car il se trouve vers la fin de sa course. Soient maintenant M_2 la masse du mélange de vapeur et de liquide contenu dans l'espace nuisible au moment de l'ouverture, t_2 sa température et t_1 la température de la chaudière ; la formule (304) détermine la quantité de chaleur qu'il faut fournir à celle-ci pour que l'espace nuisible se remplisse de vapeur à la pression de la chaudière ; on peut même, comme je le montrerai plus tard, calculer par la même formule la quantité de vapeur qui passe dans l'espace nuisible.

Cette question offre encore de l'intérêt aux ingénieurs sous un autre point de vue.

Supposons qu'après le mélange, lorsque l'équilibre est rétabli dans les deux réservoirs A et B, on veuille enlever à toute la masse la quantité de chaleur nécessaire pour faire descendre la pression de p_1 à p_2, c'est-à-dire à la pression qui existait auparavant dans le réservoir B. En suivant la même marche que précédemment, on trouve qu'il faut soustraire la quantité de chaleur :

$$(304') \qquad Q = M_1 \left[q_1 - q_2 + x_1 u_1 \left(\frac{\rho_1}{u_1} - \frac{\rho_2}{u_2} \right) \right].$$

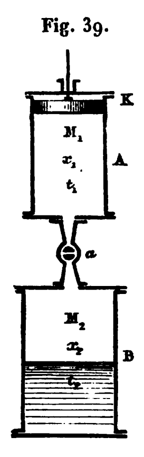
On peut imaginer qu'on ait soustrait cette chaleur d'abord du réservoir A, ce qui aurait réduit la pression de p_1 à p_2, et qu'on ait effectué le mélange seulement après cette opération.

Problème III. — *Théorie des condenseurs à parois refroidies extérieurement.*

Soit A (*fig.* 39) le cylindre à vapeur dans lequel se meut un

piston K qui se trouve actuellement à la fin de sa course; ce cylindre communique avec le condenseur B au moyen d'un

Fig. 39.



tuyau muni d'un robinet a, que nous supposons d'abord fermé. Le cylindre contient M_1 kilogrammes d'eau mêlée de vapeur sous la pression p_1, et le condenseur contient M_2 kilogrammes d'un mélange semblable sous la pression p_2; soient x_1 et x_2 les quantités spécifiques de vapeur dans le cylindre et dans le condenseur. Voici comment les choses se passent : on refroidit extérieurement la paroi du condenseur au moyen d'un courant d'eau froide; on ouvre le robinet, et on mélange les deux masses. On soustrait ensuite de la chaleur pour ramener la pression à celle du condenseur, et pour la maintenir constante pendant que le piston se rend à l'autre extrémité de sa course et chasse dans le condenseur, sous une pression constante p_2, tout le mélange de vapeur et de liquide resté dans le cylindre.

Cherchons la quantité de chaleur qu'il faut enlever par coup de piston au condenseur pour que la pression commune reste constante et égale à celle du condenseur, et aussi la masse de vapeur et de liquide qui se trouve dans le condenseur à la fin de l'opération. Au moment de l'ouverture du robinet, la pression prend dans les deux espaces la valeur moyenne p, et la quantité spécifique de la vapeur est x. Le piston est presque

immobile; alors la chaleur est soustraite d'abord sous un volume à peu près constant. Cette quantité de chaleur est, d'après l'équation (304'),

$$(305)\qquad Q_1 = M_1\left[q_1 - q_2 + x_1 u_1\left(\frac{\rho_1}{u_1} - \frac{\rho_2}{u_2}\right)\right],$$

et la quantité spécifique de vapeur x'_2 commune aux deux espaces est, après cette soustraction de chaleur, conformément à l'équation (261), p. 339,

$$(306)\qquad x'_2 = \frac{xu}{u_2}.$$

Le piston K se rend ensuite à l'autre extrémité de sa course; dans cette opération, la masse totale $M_1 + M_2$, que nous désignerons par M, est comprimée sous une pression constante p_2, et son volume est réduit de $V_1 + V_2$ à V_2.

En désignant par x''_2 la quantité spécifique de la vapeur à la fin de cette opération, on a, pour la quantité de chaleur Q_2 qu'il faut soustraire,

$$Q_2 = M r_2 (x'_2 - x''_2),$$

pour les volumes initial et final,

$$V_1 + V_2 = M(x'_2 u_2 + \sigma),$$
$$V_2 = M(x''_2 + \sigma),$$

et, par suite, pour leur différence, c'est-à-dire pour la diminution de volume,

$$(307)\qquad V_1 = M u_2 (x'_2 - x''_2).$$

En éliminant M entre cette équation et celle qui donne Q_2, on a

$$Q_2 = V_1 \frac{r_2}{u_2}.$$

Introduisons le volume du cylindre $V_1 = M_1(x_1 u_1 + \sigma)$ et négligeons σ, ce qui est toujours permis à cause de la peti-

tesse de cette quantité, nous aurons

$$Q_2 = M_1 x_1 u_1 \frac{r_2}{u_2} = M_1 x_1 u_1 \left(\frac{\rho_2}{u_2} + A p_2\right).$$

On conclut de là la quantité totale de chaleur Q qu'il faut soustraire du condenseur pendant une course du piston :

$$Q = Q_1 + Q_2,$$

ou bien

$$Q = M_1 \left[q_1 - q_2 + x_1 u_1 \left(\frac{\rho_1}{u_1} + A p_2\right)\right],$$

ou enfin

$$(308) \qquad Q = M_1 [q_1 - q_2 + x_1 (\rho_1 + A p_2 u_1)].$$

Dans les condenseurs refroidis extérieurement, on fait couler de l'eau froide le long de la surface; elle soustrait de la chaleur, et sa température s'élève de t_0 à t'_0 degrés. Soit M_0 le poids de cette eau par course du piston; la quantité de chaleur qui correspond à l'élévation de température $t'_0 - t_0$ est, d'après les notations adoptées $Q = M_0 (q'_0 - q_0)$, et la quantité M_0 sera donnée par l'équation suivante, qu'on obtient en portant la valeur Q dans l'équation (308) :

$$(309) \qquad M_0 = \frac{q_1 - q_2 + x_1 (\rho_1 + A p_2 u_1)}{q'_0 - q_0} M_1.$$

La quantité spécifique x''_2 de la vapeur qui se trouve dans le condenseur se détermine au moyen de l'équation (307), dans laquelle on fait $V_1 = M_1 x_1 u_1$, en se servant en même temps de l'équation (306) pour obtenir la valeur de x'_2. On a alors

$$M u_2 x''_2 = M x u - M_1 x_1 u_1.$$

Remplaçons dans cette équation M par $M_1 + M_2$ et la quantité Mxu par sa valeur tirée de l'équation (300), nous aurons

$$(310) \qquad (M_1 + M_2) x''_2 = M_2 x_2.$$

Cette équation montre qu'à la fin de l'opération la quantité spécifique de la vapeur dans le condenseur a changé, mais que le poids total $(M_1 + M_2) x''_2$ est le même qu'avant la réu-

nion du condenseur avec le cylindre, alors que le poids de la vapeur contenue dans le condenseur était $M_2 x_2$; la masse M_1, qui remplissait d'abord le cylindre à l'état d'un mélange de liquide et de vapeur sous la pression p_1, se trouve maintenant dans le condenseur à l'état d'eau à la température t_2. La pompe à air d'une machine à vapeur a donc uniquement pour objet, lorsqu'on se sert d'un condenseur refroidi extérieurement, d'extraire du condenseur M_1 kilogrammes d'eau par coup de piston, et la pompe d'alimentation doit les ramener à la chaudière. D'après cela, une machine à vapeur ainsi disposée serait une machine thermique complétement fermée, s'il n'y avait pas de pertes de vapeur et d'eau. Dans les applications de l'équation (309), on peut prendre pour la chaleur de l'eau $q = ct$, et faire $c = 1$. Supposons, en outre, que la vapeur du cylindre ne contienne pas d'eau, c'est-à-dire que $x_1 = 1$; la quantité totale de chaleur λ_1 peut être représentée, d'après les remarques de la page 275, par l'expression

$$\lambda_1 = q_1 + \rho_1 + A p_1 u_1;$$

on trouve alors, pour la quantité d'eau nécessaire au refroidissement,

$$(311) \qquad M_0 = \frac{\lambda_1 - t_2 - A u_1 (p_1 - p_2)}{t'_0 - t_0} M_1.$$

Si l'on néglige la quantité $A u_1 (p_1 - p_2)$, qui est petite, on a

$$(312) \qquad M_0 = \frac{\lambda_1 - t_2}{t'_0 - t_0} M_1.$$

C'est l'expression dont on s'est servi jusqu'à présent dans le calcul des machines à vapeur, en supposant, avec Watt, que la chaleur totale λ_1 soit constante et égale à 640.

Le procédé employé jusqu'ici pour obtenir cette formule est tout à fait inadmissible d'après les principes de la théorie mécanique de la chaleur. Les raisonnements que je viens de faire montrent cependant qu'on peut la considérer comme une formule approchée. Une détermination rigoureuse importe peu ici, parce qu'on désire seulement savoir dans le

calcul d'une machine à vapeur la valeur minimum de la quantité d'eau nécessaire au refroidissement. En réalité, on ne construit des machines à condensation que dans le cas où il y a plus d'eau de condensation que n'en demande le calcul.

Supposons qu'il y ait une pression moyenne $p_2 = 0^{atm},1$ dans le condenseur d'une machine à vapeur; que l'eau de condensation arrive à la température $t_0 = 15^o$ et qu'elle quitte la surface du condenseur à la température $t'_0 = 35^o$; supposons, en outre, qu'au moment de la réunion du condenseur et du cylindre, ce dernier contienne de la vapeur et du liquide sous une pression de $1^{atm},5$; je suppose à dessein que cette pression soit assez élevée pour mieux faire ressortir la différence des résultats déduits des formules précédentes.

Nous avons ici, d'après la Table X,

$$q_1 = 112,41, \quad \rho_1 = 487,01, \quad u_1 = 1,1258, \quad q_2 = 46,28.$$

La Table I, première partie, donne

$$q_0 = 15,005, \quad q'_0 = 35,037,$$

et, d'après l'équation (309),

$$M_0 = (3,301 + 24,439\, x_1) M_1.$$

Si la quantité spécifique de la vapeur dans le cylindre est $x_1 = 0,80$, il vient

$$M_0 = 22,852\, M_1.$$

Dans le cas où $x_1 = 1$, c'est-à-dire où la vapeur est sèche,

$$M_0 = 27,740\, M_1;$$

alors la formule approchée (311) donne, la température étant dans le condenseur $t_2 = 46^o,21$,

$$M_0 = 27,79\, M_1,$$

tandis qu'on déduit de la formule usitée (312), si l'on prend, avec Watt, $\lambda_1 = 640$,

$$M_0 = 29,69\, M_1.$$

On voit que cette valeur s'écarte notablement de la valeur

exacte. Cela vient de ce que l'expression $Au_1(p_1 - p_2)$ de l'équation (311) n'est pas assez petite pour être supprimée sans examen; mais on peut toujours supprimer le terme $Au_1 p_2$. Dans cette hypothèse, la formule plus exacte (311) donne, avec $x_1 = 1$,

$$(313) \qquad M_0 = \frac{t_1 + \rho_1 - t_2}{t'_0 - t_0} M_1.$$

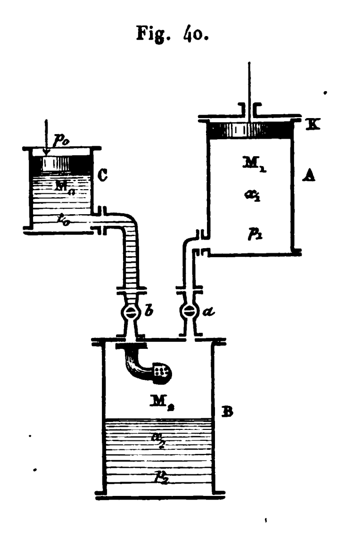
Dans l'exemple actuel, cette formule donne $M_0 = 27{,}66 M_1$, valeur bien plus exacte que la précédente.

La dernière formule est aussi simple que celle qu'on a employée jusqu'à présent, et elle est certainement préférable.

Problème IV. — *Théorie des condenseurs refroidis par injection.*

Soient toujours A (*fig.* 40) le cylindre à vapeur, B le condenseur, *a* le robinet qui les réunit, M_1 et M_2 les poids du mé-

Fig. 40.



lange de vapeur et d'eau contenus respectivement dans ces deux espaces. Le condenseur B est mis en communication, au moyen d'un tuyau muni d'un robinet *b*, avec un espace cylindrique C contenant M_0 kilogrammes d'eau froide à la tempé-

rature t_0; sur la surface de cette eau repose un piston dont la pression p_0 est celle de l'atmosphère.

Lorsque les trois espaces se trouvent séparés, on a, en conservant les notations du problème précédent, pour le travail intérieur des masses contenues dans le cylindre, dans le condenseur et dans le réservoir C respectivement,

$$(AU_0 + q_1 + x_1\rho_1)M_1,$$
$$(AU_0 + q_2 + x_2\rho_2)M_2,$$
$$(AU_0 + q_0)M_0.$$

Nous déduisons de là, pour le travail total intérieur U des trois masses séparées, en posant $M_1 + M_2 + M_0 = M$,

$$(314)\quad AU = MAU_0 + M_0 q_0 + M_1(q_1 + x_1\rho_1) + M_2(q_2 + x_2\rho_2),$$

ce travail étant exprimé en unités de chaleur.

Ouvrons maintenant les deux robinets a et b; les deux masses M_1 et M_2 se mêleront, et la pression prendra une valeur moyenne p. Le piston K commence à se mouvoir très-lentement; mais pendant ce temps de l'eau froide arrive du cylindre C; nous supposons que les choses soient réglées de façon que la pression descende rapidement jusqu'à la pression du condenseur p_2, et soit maintenue à cette valeur pendant que les deux pistons descendent dans les cylindres A et C. Lorsqu'ils sont arrivés à la fin de leurs courses, les masses M_1 et M_0 se trouvent dans le condenseur, et le poids total de la masse de vapeur et de liquide est $M = M_1 + M_2 + M_0$. Le poids M_0 de l'eau d'injection est choisi de manière que, finalement, après la réunion des masses dans le condenseur, la pression ait repris la valeur p_2; le travail intérieur de la masse totale aura pour expression, en unités de chaleur,

$$AU' = M(AU_0 + q_2 + x'_2\rho_2),$$

où x'_2 représente la quantité spécifique de la vapeur à l'état final.

La quantité U' n'est pas identique à la quantité U de l'équation (314), c'est-à-dire au travail intérieur avant le mélange,

car la masse totale a gagné pendant l'opération un travail extérieur, dont la valeur, exprimée en unités de chaleur, doit être retranchée de la quantité AU′ pour qu'on reproduise la quantité AU. Ce travail peut se déterminer facilement. Le piston K a parcouru sous une pression constante p_2 le chemin $M_1(x_1 u_1 + \sigma)$; le travail qui y correspond est, en unités de chaleur,

$$AM_1 p_2 (x_1 u_1 + \sigma).$$

Le piston C a parcouru l'espace $M_0 \sigma$ sous la pression atmosphérique p_0, et le travail qui s'y rapporte, évalué en unités de chaleur, est

$$AM_0 p_0 \sigma;$$

en retranchant la somme de ces deux travaux de la valeur de AU′ écrite ci-dessus, on doit reproduire la valeur initiale U du travail intérieur; nous obtenons ainsi

$$AU = M(AU_0 + q_2 + x'_2 \rho_2) - AM_1 p_2 (x_1 u_1 + \sigma) - AM_0 p_0 \sigma.$$

Égalons les deux valeurs de AU fournies par cette dernière équation et par l'équation (314), nous aurons, pour la quantité d'eau d'injection nécessaire,

$$M_0 = \frac{[q_1 - q_2 + x_1 \rho_1 + Ap_2(x_1 u_1 + \sigma)] M_1 + [M_2 x_2 - M x'_2] \rho_2}{q_2 - q_0 - Ap_0 \sigma}.$$

On peut simplifier cette expression. Le volume V_2 du condenseur se détermine à l'aide de l'eau qui s'y trouve avant l'injection; on a

$$V_2 = M_2 (x_2 u_2 + \sigma);$$

en nous servant de la masse qui s'y trouve après l'opération, nous trouvons cette autre expression :

$$V_2 = M(x'_2 u_2 + \sigma).$$

La quantité σ, volume spécifique de l'eau, peut être négligée dans les formules précédentes à cause de sa petitesse; on a donc, en égalant les valeurs précédentes de V_2,

$$M x'_2 = M_2 x_2.$$

Le premier membre de cette équation représente le poids de la vapeur du condenseur à la fin, tandis que $M_2 x_2$ donne le poids de la vapeur au commencement de l'opération ; le poids de la vapeur du condenseur est donc le même au commencement et à la fin. Il en résulte que la masse totale $(M_0 + M_1)$, qui a été refoulée dans le condenseur, y reste à *l'état liquide*, et doit en être expulsée à l'aide de la pompe à air. Cette pompe doit chasser aussi du condenseur l'air qui se trouve dans l'eau d'injection, et que cette eau abandonne puisqu'elle prend une température plus élevée et qu'elle supporte une pression plus faible. L'air contenu dans le condenseur n'a d'autre effet que d'augmenter légèrement la valeur de la pression p_2. Dans le calcul d'une machine à vapeur, on n'a à se préoccuper de cet air que pour les dimensions de la pompe à air : cette pompe a donc seulement pour objet d'extraire du condenseur l'air, l'eau d'injection et l'eau qui provient de la liquéfaction de la vapeur; mais elle ne sert nullement, comme on l'a supposé jusqu'ici dans le calcul des appareils de condensation, à retirer aussi de la vapeur du condenseur.

Mettons maintenant $M_2 x_2$ à la place de Mx'_2 dans l'expression qui fournit M_0, et négligeons les termes qui contiennent σ; nous aurons alors l'équation simplifiée

$$(315) \qquad M_0 = \frac{q_1 - q_2 + x_1(\rho_1 + A p_2 u_1)}{q_2 - q_0} M_1,$$

qui coïncide avec celle qui nous a donné la quantité d'eau nécessaire pour un refroidissement extérieur (309); elle en diffère uniquement par la quantité q'_2, qui remplace au numérateur la quantité q_2. Cette différence tient à ce que, dans le refroidissement par la surface, l'eau ne s'écoule pas, en général, avec la température t_2 du condenseur, mais dans la plupart des cas avec une température plus basse t'_2, comme cela a été indiqué plus haut.

Cette formule peut encore être simplifiée dans les applications. Prenons la chaleur spécifique de l'eau $c = 1$, alors on a

généralement $q = t$; négligeons aussi le terme $Ap_2 u_1$ qui influe peu, nous aurons alors

$$(316) \qquad M_0 = \frac{t_1 - t_2 + x_1 \rho_1}{t_2 - t_0} M_1.$$

On fera aussi ordinairement $x_1 = 1$, c'est-à-dire on supposera que le cylindre contienne au commencement de la vapeur sèche. La somme $q_1 + \rho_1$ représente d'ailleurs, d'après les indications de la page 262, la chaleur de la vapeur J_1. Ce que nous avons dit en étudiant les condenseurs refroidis extérieurement, relativement à la comparaison des formules précédentes avec celles que l'on trouve dans les ouvrages publiés jusqu'à présent sur la théorie des machines, doit être répété ici.

Lorsqu'on pose $x_1 = 1$, et lorsqu'on remplace ρ par la formule empirique de la page 273, on trouve approximativement

$$M_0 = \frac{575,40 + 0,209 t_1 - t_2}{t_2 - t_0} M_1.$$

Dans les machines à vapeur à condensation, la valeur de t_1 est comprise à peu près entre 80 et 100 degrés; en adoptant la valeur moyenne $t_1 = 95°$, on trouve, comme dernière approximation,

$$(317) \qquad M_0 = \frac{595 - t_2}{t_2 - t_1} M_1.$$

On ne peut pousser plus loin les simplifications.

Dans la formule dont on s'est servi pendant longtemps, on prenait pour la constante le nombre 640 au lieu de 595.

Posons, comme dans le problème précédent, pour la pression initiale de la vapeur, $p_1 = 1^{atm},5$; pour la pression dans le condenseur, $p_2 = 0^{atm},1$; et pour la température initiale de l'eau d'injection, $t_0 = 15°$; alors la formule (315) donne

$$M_0 = (2,114 + 15,657 x_1) M_1.$$

On en déduira, pour $x_1 = 0,8$,

$$M_0 = 14,64 M_1,$$

et pour $x_1 = 1$,

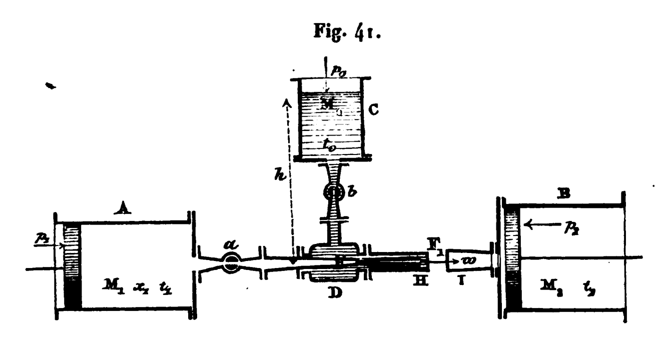
$$M_0 = 17,77 M_1.$$

Pour le même cas, les formules approchées (316) et (317) donnent respectivement $M_0 = 17,70 M_1$ et $17,58 M_1$, tandis que l'ancienne formule (312) conduit à la valeur $M_0 = 19,02 M_1$, qui s'éloigne beaucoup de la valeur exacte, et qui, par conséquent, doit être abandonnée.

Problème V. — *Étude de l'injecteur Giffard.*

Considérons d'abord l'appareil représenté dans la *fig.* 41; il se compose d'un cylindre A qui est muni d'un piston, et dans

Fig. 41.



lequel se trouvent de l'eau et de la vapeur sous la pression p_1 et à la température t_1; la quantité de vapeur contenue dans l'unité de poids du mélange est x_1. Le cylindre A est muni d'un tuyau d'écoulement conique, dont l'orifice F se trouve dans l'intérieur d'un manchon D portant un autre tuyau H, qui débouche en F_1 dans l'atmosphère. Le manchon D communique, à l'aide d'un tuyau, avec un réservoir C, dans lequel il y a de l'eau froide à la température t_0, et sous la pression atmosphérique p_0. Supposons que les réservoirs A et C soient d'abord fermés au moyen des robinets *a* et *b*; si l'on ouvrait ces deux robinets, de la vapeur s'échapperait de l'orifice F, mais elle serait immédiatement condensée par l'eau froide qui s'écoulerait du vase C; il s'échapperait donc de l'orifice F_1 un mélange d'eau venant des deux réservoirs. Nous supposerons, dans la suite, que la vapeur sorte du cylindre A sous la pres-

sion constante p_1, c'est-à-dire que le piston de ce cylindre se meuve de manière que cette pression soit maintenue, et que le niveau soit entretenu dans le réservoir C à une hauteur constante h au-dessus de l'axe du tuyau H. Le jet composé du mélange de l'eau froide et de la vapeur condensée est reçu par un autre tuyau I, et conduit dans un second cylindre B, où il repousse un piston en surmontant une pression constante p_2. Nous allons examiner cet appareil, et nous montrerons ensuite comment on peut passer de là à l'explication de l'injecteur Giffard.

Nous décomposerons les phénomènes en deux parties, en supprimant d'abord, par la pensée, le cylindre B et le tuyau I, et en faisant écouler dans l'air le jet par l'orifice F_1; soient t'_2 la température et w la vitesse avec lesquelles l'eau quitte cet orifice. Supposons que M_1 soit le poids de liquide et de vapeur qui sort du cylindre A dans une seconde, et que M_0 soit le poids de l'eau qui arrive du cylindre C pendant le même temps; $(M_1 + M_0)^{\text{kil}}$ d'eau sortiront dans une seconde de l'orifice F_1.

U_0 désignant toujours le travail intérieur de l'unité de poids de l'eau à la température o degré, le travail intérieur des M_1 kilogrammes d'eau avant le mélange est, d'après l'équation (220),

$$M_1 = \left[U_0 + \frac{1}{A}(q_1 + x_1 \rho_1)\right],$$

et celui du poids M_0 est

$$M_0\left(U_0 + \frac{1}{A} q_0\right).$$

Le travail intérieur qui se trouve avant le mélange dans l'ensemble des deux masses M_1 et M_0 est, par conséquent,

$$(318)\qquad U = (M_1 + M_0)\,U_0 + \frac{M_1}{A}(q_1 + x_1\rho_1) + \frac{M_0}{A} q_0.$$

La quantité totale d'eau $(M_1 + M_0)$ kilogrammes a la température t'_2, au moment où elle quitte l'orifice F_1; son travail inté-

rieur est donc

$$(M_1 + M_0)\left(U_0 + \frac{q'_2}{A}\right).$$

Mais, comme elle a en même temps la vitesse w, elle possède encore, sous forme de force vive, le travail

$$(M_1 + M_0)\frac{w^2}{2g},$$

que nous pouvons considérer comme un excès de travail intérieur.

Ajoutons les deux derniers travaux et retranchons-en la valeur de U donnée par l'équation (318), nous trouverons alors *l'excès du travail intérieur* de tout le mélange au moment où il quitte le tuyau d'écoulement sur celui que les deux masses possèdent *avant* leur réunion, et, si nous désignons cet excès par la lettre $\ddot{U}$, nous aurons

$$(319)\quad A\ddot{U} = (M_1 + M_0)\left(A\frac{w^2}{2g} + q'_2\right) - M_1(q_1 + x_1\rho_1) - M_0 q_0.$$

Mais, comme la masse totale n'a ni reçu ni cédé de la chaleur, cet excès de travail ne peut provenir que d'un gain de *travail extérieur*.

La masse qui se trouve dans le cylindre A a gagné le travail

$$L_1 = M_1 p_1 (x_1 u_1 + \sigma),$$

parce que le piston y a parcouru l'espace $M_1(x_1 u_1 + \sigma)$ sous la pression constante p_1. D'un autre côté, la masse M_0 supporte dans le réservoir C la pression atmosphérique et descend d'une hauteur mesurée par h; ce mouvement donne lieu à un gain de travail

$$L_2 = M_0 (h + p_0 \sigma).$$

Enfin la masse $M_1 + M_0$, dont le volume à la sortie du tuyau H est $(M_1 + M_0)\sigma$, surmonte la pression extérieure de l'atmosphère; cela correspond à une perte de travail

$$L_3 = -(M_1 + M_0)p_0\sigma.$$

On déduit de là, pour le travail total extérieur, que la masse

a gagné

$$M_1 p_1 x_1 u_1 + M_1 \sigma (p_1 - p_0) + M_0 h,$$

et cette quantité doit être égale à l'excès de travail $\ddot{U}$ déterminé par l'équation (319). En y remplaçant $\ddot{U}$ par cette valeur, on trouve, en ayant égard à la relation $r_1 = \rho_1 + A p_1 u_1$,

$$(320) \quad \left\{ \begin{aligned} &(M_1 + M_0)\left(A \frac{w^2}{2g} + q'_2\right) \\ &\quad = M_1 [q_1 + r_1 x_1 + A\sigma(p_1 - p_0)] + M_0 (Ah + q_0). \end{aligned} \right.$$

Dans l'injecteur Giffard, le niveau de l'eau du réservoir C est ordinairement situé au-dessous de l'appareil; si l'on voulait faire l'expérience précédente avec cet injecteur, c'est-à-dire si le jet d'eau devait s'élancer de l'orifice F_1 directement dans l'air, il suffirait de prendre simplement h avec le signe (—). h désignerait alors la hauteur à laquelle l'appareil devrait aspirer l'eau.

La formule fondamentale précédente donne lieu à une remarque importante; elle montre qu'on pourrait se servir de l'injecteur Giffard pour déterminer, par une méthode nouvelle, la chaleur totale λ_1 de la vapeur qui correspond à la pression p_1 et à la température t_1. Imaginons qu'on recueille l'eau qui s'écoule de l'orifice F_1 dans un réservoir où elle rentre au repos; le travail $\frac{w^2}{2g}$ de l'unité de poids se transforme alors en chaleur. La température étant finalement t_3 dans ce réservoir et la chaleur correspondante du liquide étant q_3, on a évidemment la relation

$$q'_2 + A \frac{w^2}{2g} = q_3.$$

Portons cette valeur dans l'équation (320), et supposons que le cylindre A fournisse de la vapeur saturée et sèche, c'est-à-dire que $x_1 = 1_1$; nous pourrons alors remplacer la quantité $q_1 + r_1$ par la chaleur totale λ_1, et nous aurons

$$(321) \quad (M_1 + M_0) q_3 = M_1 [\lambda_1 + A\sigma(p_1 - p_0)] + M_0 (Ah + q_0).$$

Il faut encore prendre h négativement lorsqu'il y a aspiration à la hauteur h. Toutes les quantités qui entrent dans cette formule peuvent, à l'exception de λ_1, se déterminer par l'observation. En effet, si nous remplaçons le cylindre A par une chaudière à vapeur, dans laquelle la vaporisation se fait d'une manière calme et uniforme, sous une pression connue p_1, nous pouvons admettre que la vapeur qui s'écoule est sèche. Laissons-la sortir pendant un certain temps, et évaluons le poids M_0 et la température t_0 de l'eau que l'appareil aspire, ainsi que le poids $M_1 + M_0$ et la température t_3 de l'eau qui s'écoule de l'orifice F_1, et que l'on recueille; nous pouvons alors calculer facilement la chaleur totale λ_1 à l'aide de la formule précédente, car les chaleurs du liquide q_0 et q_3, qui correspondent aux températures t_0 et t_3, peuvent se déterminer d'après la formule de M. Regnault (190), p. 254.

Complétons maintenant notre appareil en imaginant que nous rétablissions le cylindre B et le tuyau I (*fig.* 41). Le jet d'eau qui sort de l'orifice F_1 entre alors dans le tuyau I avec une vitesse w; il possède en entrant la température t'_2, et rentre au repos dans l'intérieur du cylindre. Soit t_2 la température qui y règne; le travail intérieur de l'unité de poids d'eau diminue de la quantité

$$\frac{w^2}{2g} + \frac{1}{A}(q'_2 - q_2).$$

Comme il n'y a ni introduction ni soustraction de chaleur, ce travail se transforme en travail extérieur. L'unité de poids de l'eau pénètre dans le cylindre B en surmontant une pression constante p_2, et effectue le travail $p_2\sigma$; mais, comme cette eau supporte en dehors du tuyau I la pression atmosphérique p_0, elle absorbe le travail $p_0\sigma$; le travail total extérieur cédé est donc $(p_2 - p_0)\sigma$ pour l'unité de poids d'eau, et cette quantité est égale à l'expression écrite ci-dessus. Égalons ces deux valeurs et réduisons, nous aurons

$$(322) \qquad A\frac{w^2}{2g} + q'_2 = q_2 + A\sigma(p_2 - p_0),$$

qui constitue la deuxième équation fondamentale du problème proposé.

Portons cette valeur de $A\frac{w_2}{2g}+q'_2$ dans l'équation (320), nous trouverons pour l'équation fondamentale de l'injecteur Giffard,

$$(323)\quad \begin{cases} (M_0+M_1)[q_2+A\sigma(p_2-p_0)] \\ \quad = M_1[q_1+x_1r_1+A\sigma(p_1-p_0)]+M_0(q_0-Ah). \end{cases}$$

On prendra h négativement, parce que, dans cet appareil, on aspire généralement l'eau froide d'alimentation.

Lorsque l'injecteur alimente la chaudière même qui lui fournit la vapeur, on a aussi $p_2=p_1$, et l'équation précédente donne alors le rapport du poids de l'eau d'alimentation M_0 au poids du mélange d'eau et de vapeur qu'il est nécessaire d'introduire dans la chaudière pendant le même temps; l'expression de ce rapport est

$$(324)\qquad \frac{M_0}{M_1}=\frac{q_1-q_2+x_1r_1}{q_2-q_0+A[h+\sigma(p_1-p_0)]}.$$

Cette nouvelle formule, à l'aide de laquelle nous pouvons juger les effets produits par un injecteur, conduit à des résultats très-remarquables et très-importants dans les applications. Il est vrai qu'elle ne nous permet pas de développer des formules et des règles d'après lesquelles les différentes parties d'un injecteur puissent être déterminées, quand on exige de lui un effet donné; mais elle nous donne le moyen de répondre à d'autres questions qu'on n'a pas pu résoudre jusqu'ici. Remarquons d'abord que le terme $A[h+\sigma(p_1-p_0)]$, qui est très-petit, peut être négligé; on conclut de là que la hauteur d'aspiration h influe extrêmement peu sur le rapport $\frac{M_0}{M_1}$. Cela n'empêche cependant pas que cette hauteur n'ait une grande influence sur le fonctionnement de l'appareil, et notamment sur sa mise en marche. Cette hauteur dépendra surtout de la pression qui règne dans l'espace D; notre formule ne nous apprend absolument rien sur cette pression et sur ce

qui se passe en général dans cet espace; elle montre seulement que la hauteur h influe très-peu sur le rapport $\frac{M_0}{M_1}$, quand la marche de l'appareil est normale.

La formule (324) devient, quand on efface le terme négligeable,

$$M_0(q_2 - q_0) = M_1(q_1 - q_2 + x_1 r_1).$$

Le premier membre de cette équation représente la quantité de chaleur qu'il faut fournir à l'eau d'alimentation pour la porter de sa température initiale t_0 à la température t_2, qu'elle possède au moment de son entrée dans la chaudière, et cette quantité de chaleur est égale, d'après la formule précédente, à celle que céderait une masse M_1 de vapeur et de liquide dont la portion $M_1 x_1$ serait à l'état de vapeur, si cette masse était transformée, par refroidissement *sous une pression constante* p_1, en eau liquide à la température t_2. En ajoutant aux deux membres de la dernière équation la quantité $M_1(q_2 - q_0)$, on a

$$(M_1 + M_0)(q_2 - q_0) = M_1(q_1 - q_0 + x_1 r_1).$$

Mais la différence $q_2 - q_0$ est approximativement proportionnelle à l'accroissement de température $t_2 - t_0$, et, comme ces deux valeurs de la température ne sont pas élevées, on peut prendre l'unité pour la chaleur spécifique de l'eau, et écrire $q_2 - q_0 = t_2 - t_0$; on trouve alors

$$(M_1 + M_0)(t_2 - t_0) = M_1(q_1 - q_0 + x_1 r_1).$$

On déduit de là l'élévation de température de l'eau d'alimentation, ainsi que la température t_2 que possède l'ensemble de l'eau d'alimentation et de la vapeur condensée que l'injecteur fournit à la chaudière. On a observé attentivement l'accroissement de température $t_2 - t_0$ de l'eau d'alimentation dans les expériences faites jusqu'à présent avec l'injecteur, ce qui me permet de comparer les formules précédentes aux résultats de l'expérience. M. Villiers (*) donne, par exemple,

---

(*) *Bulletin de la Société de l'industrie minérale*, t. V, 1859. *Voyez* aussi *Civilingenieur*, t. VI, p. 315, 1860. J'ai déjà étudié à la page 311 de cette dernière publication l'injecteur Giffard, en suivant une marche analogue à celle du texte; il est vrai qu'alors je n'ai pas donné autant de détails que dans le texte, et que j'ai fait quelques restrictions que j'ai laissées ici de côté.

les résultats suivants : la hauteur à laquelle l'injecteur devait aspirer l'eau était de 4 mètres et la tension de la vapeur dans la chaudière de $4^{atm},25$; la température correspondant à cette pression est $t_1 = 146°,19$; la chaleur du liquide et la chaleur de vaporisation sont $q_1 = 147,55$ et $r_1 = 503,54$.

La température initiale de l'eau d'alimentation était $t_0 = 23°,5$ et la température du jet $t_2 = 60°,5$. Par suite, l'accroissement de température était $t_2 - t_0 = 37°$. En faisant le calcul d'après la formule exacte (324), il faudrait prendre les valeurs $q_2 = 60,64$, $q_0 = 23,51$, qui correspondent aux températures t_2 et t_1; le terme que nous avons négligé dans les dernières considérations, mais que nous conservons ici, devient

$$A[h + \sigma(p_1 - p_0)] = 0,089.$$

La formule (324) donne alors

$$\frac{M_0}{M_1} = 2,335 + 13,529\,x_1.$$

Pour déterminer la quantité d'eau que la vapeur de la chaudière entraînait avec elle, on fit entrer le jet de vapeur dans un vase rempli d'une quantité d'eau dont le poids et la température étaient connus; l'augmentation de la température et du poids de cette eau fit alors connaître la quantité d'eau qui était mélangée avec la vapeur. On trouva ainsi que la vapeur était mélangée avec 3,5 pour 100 d'eau; cela donnerait $x_1 = 0,965$. En mettant ce chiffre dans l'équation précédente, on trouve

$$\frac{M_0}{M_1} = 15,390.$$

L'observation directe donna, pour le poids de l'eau d'alimentation aspirée, $M_0 = 850^{kil}$, et, pour celui du mélange de vapeur et d'eau, $M_1 = 57^{kil}$; d'où l'on tire le rapport

$$\frac{M_0}{M_1} = 14,912,$$

nombre qui diffère peu de celui qu'on a obtenu par le calcul. Il y a, en tout cas, une certaine incertitude dans la détermination

de la valeur de x_1. Si nous admettons comme exactes les valeurs observées de M_0 et M_1, la formule précédente donne, pour le cas actuel, $x_1 = 0,930$, c'est-à-dire 7 pour 100 d'eau entraînée mécaniquement avec la vapeur. La différence est d'ailleurs comparable aux erreurs d'observation, et il résulte de tout ce que nous venons de dire que la proportion de la vapeur x_1 contenue dans le mélange qui vient de la chaudière exerce une influence considérable sur le calcul et sur l'observation.

L'équation (324) peut donc être considérée comme une des formules fondamentales de l'injecteur; elle ne suffirait cependant pas seule, comme nous l'avons déjà remarqué. Pour avoir une théorie complète de cet appareil, théorie qui montrerait l'influence exercée par les dimensions des diverses pièces, il faudrait établir encore d'autres équations, ce qui exigerait une connaissance plus intime des phénomènes qui se passent dans l'espace D (*fig.* 41). Il faudrait établir, avant tout, une équation qui fût susceptible de faire connaître la pression qui s'exerce dans cet espace. J'ai fait une détermination analogue pour la pompe à jet d'eau de Thomson et pour des appareils semblables (*). C'est seulement quand on connaît cette pression qu'on peut trouver la quantité M_1 de vapeur et d'eau qui s'écoule par l'orifice F, au moyen de formules que je donnerai plus loin. On peut déterminer ensuite la quantité d'eau d'alimentation M_0 qui arrive du tuyau d'alimentation, avec des dimensions données, et la hauteur-limite à laquelle l'aspiration est encore possible.

J'ai publié ici ces recherches, malgré les lacunes qu'il y a à remplir (car les travaux publiés jusqu'à présent sur l'injecteur ne conduisent qu'à des formules approximatives plus ou moins applicables), parce qu'elles permettent encore de résoudre une autre question pratique très-importante, sur laquelle on a déjà beaucoup discuté : je veux parler de la comparaison de l'injecteur aux autres appareils d'alimentation, tels que les pompes.

(*) *Das Locomotivenblasrohr*, Zurich, 1863.

Je ferai remarquer immédiatement, parce que cela paraît évident, que le travail disponible d'une machine à vapeur est proportionnel à la quantité de chaleur qui entre dans la chaudière pendant l'unité de temps. La quantité de chaleur qu'absorbe un appareil d'alimentation donne, par suite, déjà une base pour son appréciation. On peut facilement déterminer cette quantité de chaleur pour l'injecteur Giffard.

Supposons que M_1 soit le poids de vapeur et d'eau que l'injecteur exige par seconde, et M_0 le poids d'eau d'alimentation qu'il fournit à la chaudière pendant ce même temps; alors M_1 sera aussi le poids de vapeur et d'eau qui se rend de la chaudière dans la machine, quand le régime est établi.

La quantité spécifique de vapeur du mélange M_1 fourni à l'injecteur étant désignée par x_1, la quantité de vapeur est $M_1 x_1$, et elle exige, pour se former dans la chaudière sous une pression constante, la quantité de chaleur $M_1 x_1 r_1$; mais, dans le même temps, l'injecteur introduit dans la chaudière une quantité d'eau $M_0 + M_1$ à la température t_2, et cette quantité doit être portée de nouveau à la température de la chaudière t_1 pour achever le cycle, ce qui exige une quantité de chaleur $(M_1 + M_0)(q_1 - q_2)$. La quantité de chaleur totale qui doit être introduite par seconde dans la chaudière pour l'alimentation seule, quand on emploie l'injecteur, est donc

$$(325) \qquad Q_1 = M_1 x_1 r_1 + (M_1 + M_0)(q_1 - q_2).$$

On peut mettre cette équation sous une autre forme. D'après l'équation fondamentale (324), on a

$$M_1(q_1 - q_2 + x_1 r_1) = M_0 \{ q_2 - q_0 + A[h + \sigma(p_1 - p_0)] \}.$$

Ajoutons $M_0 q_1$ aux deux membres de cette dernière équation, il vient

$$M_1 x_1 r_1 + (M_1 + M_0)(q_1 - q_2) = M_0 \{ q_1 - q_0 + A[h + \sigma(p_1 - p_0)] \}.$$

Le premier membre de cette équation est égal à Q_1, d'après l'équation (325); on a donc pour la quantité de chaleur em-

ployée à l'alimentation pendant une seconde,

(326) $$Q_1 = M_0 \{ q_1 - q_0 + A [h + \sigma (p_1 - p_0)] \}.$$

Cette formule conduit à un résultat extrêmement remarquable; elle montre que la quantité de chaleur employée à l'alimentation dépend du poids de l'eau d'alimentation M_0, c'est-à-dire de la dépense de vapeur de la machine, de la pression et de la température dans la chaudière, de la température initiale t_0 de l'eau d'alimentation, et de la hauteur h à laquelle on l'élève. Mais la quantité Q_1 *ne dépend ni de la quantité de vapeur que l'injecteur absorbe, ni de la température t_2 à laquelle l'eau est introduite dans la chaudière, ni des dimensions des diverses pièces de l'appareil.* On doit donc exiger uniquement d'un injecteur qu'il introduise dans la chaudière, sans perte de vapeur, le poids d'eau d'alimentation demandé M_0; lorsqu'il remplit cette condition, il constitue un appareil parfait, quelle que soit la quantité de vapeur qu'il consomme et quelle que soit la température que possède l'eau qu'il amène dans la chaudière.

Dans l'équation (326), on peut, sans hésitation, négliger le terme $A [h + \sigma (p_1 - p_0)]$, comme une quantité très-petite relativement à $q_1 - q_0$, et la quantité de chaleur que l'injecteur exige par seconde devient alors

(327) $$Q_1 = M_0 (q_1 - q_0).$$

Nous examinerons maintenant les effets d'une pompe d'alimentation ordinaire, afin de faire des comparaisons. Nous ferons d'abord abstraction des résistances, du frottement du piston, etc. Supposons que la pompe soit à simple effet; que l'axe du cylindre soit horizontal et qu'il coïncide avec l'axe du tuyau de l'injecteur HI (*fig.* 41). La pompe doit d'abord élever l'eau à la même hauteur h que précédemment. Si le coup de piston dure une seconde, il y aura M_0 kilogrammes d'eau élevés à la hauteur h pendant l'aspiration; mais, comme la pression atmosphérique p_0 ou la colonne d'eau correspondante σp_0 agit dans cette opération dans le sens du mouvement, le travail à dépenser sera $M_0 (h - p_0 \sigma)$. En revenant à sa pre-

mière position, le piston pousse cette quantité d'eau dans la chaudière en surmontant la pression constante p_1 de la chaudière; il faut donc qu'il effectue le travail $M_0 \sigma p_1$. Le travail total que la pompe d'alimentation absorbe par seconde est donc

$$M_0 [h + \sigma (p_1 - p_0)].$$

Dans la chaudière, il faut que la température de l'eau soit portée de t_0 à t_1, ce qui exige une quantité de chaleur

$$Q_1 = M_0 (q_1 - q_0);$$

et, pour déterminer toute la chaleur que l'alimentation exige avec la pompe, il faudrait y ajouter encore la quantité de chaleur qui correspond au travail que nous venons de déterminer; mais cette quantité de chaleur est, en tout cas, assez petite pour pouvoir être négligée devant $M_0 (q_1 - q_0)$. On conclut de là que les deux appareils d'alimentation, l'injecteur Giffard et la pompe d'alimentation, exigent, dans des circonstances identiques, la même quantité de chaleur, et que ces deux appareils se valent théoriquement.

Mais, en se plaçant au point de vue pratique, on doit préférer l'injecteur Giffard, parce que les résistances nuisibles qu'il faut vaincre dans le mouvement de la pompe exercent évidemment une influence beaucoup plus considérable que les pertes qui accompagnent le fonctionnement de l'injecteur; dans ce dernier, les pertes de chaleur par refroidissement extérieur ont seules une certaine importance.

Nous avons encore à déterminer le degré économique de l'injecteur. Il suffira de comparer la quantité de chaleur qu'il exige avec la chaleur totale qui entre dans la chaudière dans le même temps. Comme le *rapport* de ces deux quantités de chaleur influe seul, il n'est pas nécessaire de savoir ici quelle portion de la chaleur totale équivaut au travail disponible. Nous résoudrons cette question un peu plus tard.

Le poids M_0 de l'eau d'alimentation qui entre dans la chaudière pendant une seconde représente aussi le poids du mélange d'eau et de vapeur qui est envoyé à la machine dans le

même temps, et, par suite, $M_0 x_1$ est le poids de la vapeur; car la quantité spécifique de vapeur x_1 qui entre dans la machine est évidemment égale à celle que l'injecteur absorbe.

On a pour la quantité de chaleur Q_2 que la production de cette vapeur exige,

$$Q_2 = M_0 x_1 r_1.$$

L'appareil d'alimentation exige la quantité de chaleur Q_1, et la chaleur totale qui est envoyée par seconde dans la chaudière est $Q_1 + Q_2$; le degré économique de cet appareil a donc pour expression

$$\eta = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2},$$

ou bien, si l'on remplace par leurs valeurs les quantités qui entrent dans le second membre de cette équation,

$$\eta = \frac{q_1 - q_0}{q_1 - q_0 + x_1 r_1}.$$

Si l'on divise enfin les deux termes de la fraction par $q_1 - q_0$, il vient

(328) $$\eta = \frac{1}{1 + \frac{x_1 r_1}{q_1 - q_0}}.$$

Admettons, par exemple, que la chaudière produise de la vapeur sèche; alors $x_1 = 1$; dans ce cas, avec la température de l'eau d'alimentation $t_0 = 15°$, et pour des pressions dans la chaudière, qui sont respectivement $1\frac{1}{2}$, 4, 6, 8 atmosphères, on trouve

$$\eta = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6,422}, \quad \frac{1}{4,876}, \quad \frac{1}{4,385}, \quad \frac{1}{4,076}.$$

On conclut de là que la quantité de chaleur qu'exige l'injecteur, comparée à la chaleur qui entre dans la chaudière, est d'autant plus grande que la pression dans cette chaudière est plus élevée; cela se voit du reste directement sur la for-

mule (328), puisque la quantité r_1 diminue quand la température croît, tandis que q_1 augmente.

Cette dernière formule montre encore que le rapport η est d'autant plus grand que q_0 est plus petit, c'est-à-dire que la température t_0 de l'eau d'alimentation est plus basse. Les mêmes formules et les mêmes conclusions s'appliquent aux pompes d'alimentation, quand on fait abstraction des résistances dues aux frottements.

La présence de la quantité x_1 dans l'équation (328) peut étonner au premier moment; la manière dont elle y entre prouve que le rapport η est d'autant plus grand, que x_1 s'écarte davantage de 1, c'est-à-dire que la quantité d'eau qu'entraîne la vapeur de la chaudière est plus considérable. Mais il faut remarquer que la quantité η doit uniquement représenter la partie de la chaleur totale introduite dans la chaudière qui est employée à l'alimentation; elle ne doit nullement servir de mesure pour apprécier la bonté et la perfection de l'appareil; cela se voit déjà par les nombres écrits ci-dessus, car l'appareil paraît d'autant plus avantageux, que la quantité de chaleur qu'il emploie est moindre, et par conséquent que la quantité η *est plus petite*. On se tromperait aussi si l'on voulait considérer la quantité de chaleur Q_1 comme perdue. Les dernières formules s'appuient, en général, essentiellement sur l'hypothèse que la chaudière à alimenter fournit la vapeur à une machine dont la marche est normale, et c'est pour cela que, dans la discussion des formules (327) et (328), on doit avoir égard aux particularités que peut présenter la marche de la machine elle-même. Un examen approfondi de la question posée devient seulement possible quand on a donné la théorie complète de la machine à vapeur, ce qui sera fait plus loin. Je ferai voir alors que les formules (327) et (328) montrent l'existence d'une certaine imperfection dans le cycle de nos machines : imperfection qui ne se rapporte nullement à l'appareil d'alimentation, comme on pourrait le croire d'après ce qui vient d'être dit.

L'injecteur Giffard est, au contraire, un appareil *parfait*, ce qui se déduit déjà de cette circonstance, qu'il se comporte

comme une pompe d'alimentation qui travaille sans frottements. Cependant, au point de vue de l'alimentation, il ne peut être considéré comme un appareil excellent que pour les chaudières à vapeur, où la force vive perdue par des changements de vitesse brusque se manifeste sous la forme de chaleur, et est utilisée ainsi de nouveau sous cette forme.

Dans tout autre cas, où l'on a en vue d'obtenir à l'aide de l'injecteur des effets purement mécaniques, par exemple d'élever de l'eau d'un niveau à un autre, et lorsque l'augmentation de la température de l'eau qui a lieu dans cette opération n'est pas utilisée, l'injecteur est un appareil *très-imparfait*, aussi imparfait au point de vue de la Mécanique qu'une pompe d'injection à eau de Thomson.

X. — *De l'écoulement d'un mélange de vapeur et de liquide.*

Les propositions générales sur l'écoulement des liquides, que j'ai énoncées aux pages 154 et 158, sont applicables ici, de telle sorte que nous pourrions partir directement de l'équation (104), p. 158; je préfère cependant considérer cette question sous un autre point de vue, pour montrer que l'on peut arriver aux mêmes formules par des voies différentes (*).

Nous supposerons encore que l'écoulement se fasse sous une pression constante, et dans un espace où règne également une pression constante, moindre que la précédente. Nous admettrons de plus, expressément, que le mouvement soit permanent, et nous ferons en général les mêmes hypothèses

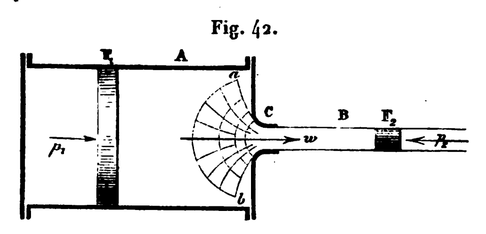
---

(*) J'ai donné pour la première fois les nouvelles formules relatives à l'écoulement des gaz et des vapeurs dans mon Mémoire : *Das Locomotivenblasrohr*, et plus tard je les ai insérées dans le *Civilingenieur*, t. X, p. 87, 1864. Plus tard, j'ai complété les considérations relatives à l'écoulement d'un mélange de vapeur et de liquide, en y comprenant l'écoulement des liquides fortement échauffés qui s'échappent de l'orifice en se vaporisant en partie.

que pour toutes les recherches hydrodynamiques du même genre.

Prenons un réservoir A (*fig.* 42) de forme cylindrique, dans lequel se trouvent la vapeur et le liquide à la température t_1 et

Fig. 42.



sous la pression p_1; soit x_1 la quantité spécifique de vapeur, et supposons que le piston soit poussé en avant avec une pression constante p_1, à mesure que le cylindre se vide. L'orifice C est prolongé au moyen d'un tuyau B de même section, muni d'un piston qui se meut sous l'action du mélange en surmontant une pression extérieure constante p_2.

Le tuyau B est très-long; le mélange entré dans ce tuyau suit le piston avec *une vitesse constante* w, et le vide laissé par derrière se remplit continuellement du nouveau mélange provenant du réservoir A.

Le changement d'état dont il s'agit a lieu d'une manière toute particulière et n'est point réversible; le mélange passe d'un état d'équilibre à un autre différent. La vitesse du mouvement *visible* des particules est extrêmement petite dans le réservoir A, dont la section est très-grande relativement à celle de l'orifice; nous supposons, en outre, que le poids du mélange qui passe avec une vitesse croissante à travers l'espace situé près de l'orifice, et qui forme une sorte d'entonnoir, soit également très-petit relativement au poids contenu dans le cylindre A. Soit U_1 le travail intérieur de la masse dans le réservoir A, travail qui correspond à la pression t_1, à la pression p_1 et au volume spécifique v_1.

Examinons l'unité de poids du fluide dans son trajet vers l'ajutage B; après son passage dans l'ajutage, il suit le piston avec une vitesse constante w. La masse fluide se trouve donc ici dans un état d'équilibre nouveau; toutes ses particules se

meuvent uniformément dans le tuyau B avec la vitesse w, et pendant ce mouvement la pression p_2, la température correspondante t_2 et le volume spécifique v_2 restent constants tant qu'il ne survient pas de changement de vitesse. Cela posé, j'admets que les relations qui existent entre le travail intérieur U_2 de la masse en mouvement, sa pression et son volume, quand on fait abstraction du travail correspondant au mouvement *visible*, sont les mêmes que si la masse était en repos. Par conséquent, si l'on connaissait pour le fluide considéré la fonction $U = F(p, v)$, on aurait au commencement de l'opération, lorsque le fluide se trouve encore dans le réservoir A,

$$U_1 = F(p_1, v_1),$$

et à la fin, lorsque le fluide s'avance uniformément dans le tuyau B,

$$U_2 = F(p_2, v_2).$$

Prenons encore, comme travail intérieur, le travail $\frac{w^2}{2g}$ qui correspond au travail *visible;* l'accroissement total du travail intérieur pendant le changement considéré sera

$$\frac{w^2}{2g} + U_2 - U_1.$$

On peut trouver une autre expression de cette quantité. L'unité de poids du fluide a absorbé le travail $p_1 v_1$ à cause de la constance de la pression dans le réservoir A, et elle a effectué le travail $p_2 v_2$ par son entrée dans le tuyau B, sous la pression constante p_2 (*voyez* p. 155); $p_1 v_1 - p_2 v_2$ est donc le travail gagné par le fluide. Supposons enfin que chaque unité de poids ait reçu du dehors, d'une manière quelconque, la quantité de chaleur Q; alors l'accroissement total du travail intérieur sera

$$\frac{Q}{A} + p_1 v_1 - p_2 v_2.$$

En égalant les deux expressions précédentes, nous obtenons la première formule fondamentale du problème

$$(329) \qquad A\frac{w^2}{2g} = Q - A(U_2 - U_1) + A(p_1 v_1 - p_2 v_2).$$

Cette équation est identique à l'équation (104); mais nous

avons en outre l'équation

$$(330) \qquad Q = A(U_2 - U_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p\,dv,$$

dont nous avons fait usage fréquemment ; elle exprime que le fluide passe en se dilatant, sous sa pleine pression, du volume initial v_1 au volume final v_2 en même temps qu'il absorbe de la chaleur.

On déduit de cette équation, en intégrant par parties,

$$Q = A(U_2 - U_1) + A(p_2 v_2 - p_1 v_1) - A\int v\,dp.$$

Cette dernière formule, jointe à l'équation (329), conduit à l'équation bien connue en hydrodynamique

$$\frac{w^2}{2g} = -\int v\,dp,$$

que l'on a toujours établie directement jusqu'ici.

J'ai simplement développé davantage le problème de l'écoulement en partageant l'équation bien connue, écrite ci-dessus, en deux équations (329) et (330), à l'aide des propositions de la théorie mécanique de la chaleur, et c'est cette séparation qui permet de bien voir la signification de cette équation, que l'on a intégrée jusqu'ici dans les recherches sur les gaz, en faisant des hypothèses assez arbitraires sur la relation qui lie v et p.

Les équations (329) et (330) s'appliquent aux fluides de toute espèce ; conservons-les encore un instant sous leur forme générale, et ramenons l'écoulement au cas ordinaire. Jusqu'ici nous avons supposé que le tuyau B (*fig.* 42) était très-long, et qu'un piston s'y mouvait sous la pression constante p_2 ; nous allons supposer maintenant que le tuyau soit coupé à une certaine distance de l'orifice, et qu'il débouche dans un deuxième réservoir de grandes dimensions, qui est rempli de fluide, et dans lequel la pression p_2 est maintenue constante.

Soient G le poids du fluide qui traverse par seconde une

section F quelconque du tuyau, et v_2 le volume spécifique du fluide dans ce tuyau; le volume du fluide qui traverse par seconde cette section est Gv_2, et cette quantité est identique à $F w$; nous avons donc

$$(331) \qquad G = \frac{F w}{v_2}$$

pour le poids du fluide qui passe par seconde à travers une section quelconque du tuyau. Ce poids est identique à celui qui sort du tuyau, et il représente la masse écoulée. Mais ici on suppose que la pression ait la valeur constante p_2 dans l'espace vers lequel se fait l'écoulement jusqu'à la section de l'orifice; cette hypothèse qu'on a toujours faite jusqu'à présent est, je crois, très-admissible.

Il y a lieu de croire que, si l'on veut être rigoureux, la pression extérieure est plus petite près de l'orifice que dans le reste de l'ajutage; mais la différence doit être extrêmement petite. Lorsqu'un jet de vapeur se rend par exemple dans l'air libre, et lorsqu'on approche de l'orifice un pendule, comme je l'ai fait, ce pendule est attiré vers le jet, mais très-faiblement; nous devons donc conclure de là qu'il n'y a qu'une petite diminution de pression.

Le volume spécifique v_2 ne convient au contraire que pour l'intérieur du tuyau et pour l'orifice. Lorsque le fluide est de l'air ou de la vapeur, le jet s'épanouit en quittant l'orifice sous forme d'entonnoir, et sous la pression constante p_2, d'après notre hypothèse (p. 161). La force vive du mouvement se transforme en mouvement moléculaire, en chaleur; et lorsque le repos est rétabli, le volume spécifique et la température sont autres qu'à l'orifice. Mais ce dernier phénomène importe peu; les questions principales qu'on se pose sont toujours : Quels sont la vitesse d'écoulement w, le poids du fluide qui passe à travers l'orifice dans l'unité de temps, et en général l'état du liquide à l'orifice? Les équations données ci-dessus répondent à ces questions; comme elles ne sont applicables que dans l'hypothèse d'un mouvement permanent, on peut réduire de plus en plus par la pensée la longueur du

tuyau, et employer aussi ces formules pour un simple orifice. Il n'y a qu'une seule détermination qui persiste : c'est l'influence qu'exercent sur l'écoulement les résistances passives, le frottement, etc., etc. On peut cependant admettre comme un fait certain que les deux équations (329) et (330) se conservent sans changement. La vitesse d'écoulement w est diminuée par les résistances ; le travail intérieur U_2 augmente d'une certaine quantité, et la force vive du mouvement visible $\frac{w^2}{2g}$ diminue de la même quantité ; le changement du travail intérieur est d'ailleurs accompagné d'un changement de volume spécifique v_2. Les équations dont nous parlons ne changent pas de forme pour cela ; mais elles deviennent d'autant plus impropres à la détermination de la vitesse w que l'influence des résistances est plus grande. Nous devons donc, jusqu'à nouvel ordre, supposer que l'influence des résistances soit négligeable, ce qui revient à supposer les orifices bien arrondis.

Appliquons maintenant nos équations à un mélange de vapeur et de liquide, s'écoulant à travers un orifice sous une pression constante.

Nous avons dans le réservoir d'écoulement la température t_1, la pression p_1 et la quantité spécifique de la vapeur x_1 ; dans la section de l'orifice, la température t_2 (celle qui correspond à la pression extérieure p_2), et la quantité spécifique de vapeur x_2.

Mettons dans l'équation (329), à la place de $A(U_2 - U_1)$, sa valeur déduite de l'équation (220)

$$A(U_2 - U_1) = q_2 - q_1 + x_2 \rho_2 - x_1 \rho_1,$$

et servons-nous en même temps des équations

$$v_1 = x_1 u_1 + \sigma, \quad v_2 = x_2 u_2 + \sigma, \quad r = \rho + Apu.$$

Nous trouvons alors

$$(332) \quad A\frac{w^2}{2g} = Q + x_1 r_1 - x_2 r_2 + q_1 - q_2 + A\sigma(p_1 - p_2).$$

L'équation (330), écrite en équation différentielle, est identique aux équations (222), (223), (227) et (228) (p. 289 et suivantes). Écrivons-la sous la forme (227) :

(333) $$dQ = dq + Td\left(\frac{xr}{T}\right).$$

Le poids du mélange qui s'écoule dans une seconde est, d'après l'équation (331),

(334) $$G = \frac{Fw}{x_2 u_2 + \sigma}.$$

Si l'on désigne par D le poids de la vapeur et par W celui du liquide, on a

(335) $$D = x_2 G \quad \text{et} \quad W = (1 - x_2) G.$$

Nos équations peuvent être employées dans un grand nombre de cas différents, suivant l'hypothèse que l'on fait sur le mode d'introduction de la chaleur. Dans l'équation (332), Q désigne la chaleur totale qu'on fournit à l'unité de poids du mélange pendant son trajet vers l'orifice, tandis que l'équation (333) indique d'une manière plus précise comment a lieu l'introduction de la chaleur; elle nous apprend comment la température et la quantité spécifique de vapeur changent quand on adopte une loi déterminée pour l'introduction de la chaleur. Le cas le plus habituel et le plus important dans les applications est celui où il n'y a ni addition ni soustraction de chaleur pendant le trajet vers l'orifice. On a dans ce cas $Q = 0$ et $dQ = 0$. Posons, pour simplifier,

$$\tau = \int_0^t \frac{dq}{T} = \int_0^t \frac{c\,dt}{T},$$

comme cela a déjà été fait (p. 313); l'équation (333) donne

(336) $$\frac{x_2 r_2}{T_2} - \frac{x_1 r_1}{T_1} = \tau_1 - \tau_2.$$

Cette équation fait connaître la quantité spécifique de vapeur x_2 à l'orifice. En éliminant $x_2 r_2$ entre les équations (332)

et (336), on trouve

$$(337)\ A\frac{w^2}{2g}=\frac{x_1 r_1}{T_1}(T_1-T_2)+(q_1-q_2)-T_2(\tau_1-\tau_2)+A\sigma(p_1-p_2).$$

équation qui permet de calculer directement la vitesse d'écoulement w.

Les équations (334) et (335) donnent aussi le poids du mélange qui sort de l'orifice dans une seconde; car on connaît la quantité spécifique de vapeur x_1, la pression p_1 dans le réservoir d'écoulement, et la pression extérieure p_2. Connaissant ces dernières quantités, et faisant usage des Tables, on détermine les températures t_1 et t_2. Appliquons les dernières formules à quelques cas qui ont de l'importance dans la pratique.

Problème I. — *Écoulement d'une vapeur sèche et saturée sans introduction ni soustraction de chaleur.*

Il suffit de faire $x_1=1$ dans les équations générales, et la question est résolue. Nous considérerons spécialement l'écoulement de la vapeur d'eau dans l'atmosphère. Le tableau auxiliaire de la page 307 nous sera très-utile.

La vapeur saturée sous une pression de 5 atmosphères passe d'une chaudière dans l'atmosphère à travers un orifice conique ou bien arrondi, ayant une section de F mètres carrés. La pression de l'air étant de 1 atmosphère, on a, d'après la Table X de l'Appendice, $t_1=152°,22$ et $t_2=100°$. Le tableau auxiliaire (p. 307) donne ensuite, pour 5 atmosphères,

$$\frac{r_1}{T_1}=1,17395,$$
$$q_1=153,741,$$
$$r_1=499,186,$$
$$\tau_1=0,44693,$$

et, pour 1 atmosphère,

$$\frac{r_2}{T_2}=1,43834,$$
$$q_2=100,500,$$
$$r_2=536,500,$$
$$\tau_2=0,31366;$$

en outre, on a

$$p_1 = 5,10334, \quad p_2 = 10334, \quad \sigma = 0,001, \quad A = \frac{1}{424},$$

et

$$u_2 = 1,6494.$$

L'équation (336) donne alors la quantité spécifique de vapeur à l'orifice,

$$x_2 = 0,9091.$$

On conclut de là que l'unité de poids du mélange contient 0,9091 de vapeur, et 0,0909 d'eau dans la section de l'orifice; comme nous trouvons dans cette section de l'eau et de la vapeur, il faut que pendant le trajet vers l'orifice, il se soit condensé une quantité de vapeur dont le poids est $0^{kil},0909$.

On tire de l'équation (337), en employant les nombres écrits ci-dessus,

$$A\frac{w^2}{2g} = 64,820,$$

et, par suite, on trouve pour la vitesse d'écoulement,

$$w = 734^m,32,$$

avec une accélération de la pesanteur, $g = 9^m,81$.

Le poids d'eau et de vapeur qui sort de l'orifice dans une seconde est, d'après l'équation (334),

$$G = 489,38F,$$

F étant évalué en mètres carrés. La proportion de vapeur est, d'après l'équation (335),

$$D = 444,90F,$$

et celle de l'eau,

$$W = 44^{kil},48F.$$

Lorsqu'on prend un orifice circulaire, on trouve dans le cas actuel que, pour faire écouler G kilogrammes de vapeur et d'eau dans une seconde, l'orifice doit avoir un diamètre

$$d = 5^{cent},102\sqrt{G}.$$

Veut-on un écoulement de 1 kilogramme de vapeur par seconde, le diamètre de l'orifice devra être de 5,102 centimètres.

Comme la question de l'écoulement de la vapeur d'eau dans l'air libre est d'une grande importance dans les applications, j'ai construit le tableau ci-contre (p. 409), qui n'a pas besoin d'être expliqué après l'exemple numérique que nous venons de traiter.

L'exemple et le tableau montrent qu'une partie de la vapeur se condense pendant son trajet vers l'orifice, et lorsqu'il s'agit d'un écoulement dans l'atmosphère, la quantité du liquide mêlée à la vapeur est d'autant plus grande que la pression dans la chaudière est plus élevée.

J'ai montré dans mon ouvrage (*Das Locomotivenblasrohr*, p. 89), qu'à une distance relativement minime de l'orifice et au dehors le liquide a disparu, et que même la vapeur est surchauffée. J'ai supposé, comme je l'ai déjà fait remarquer, que le jet s'épanouit en dehors de l'orifice sous une pression constante p_2, et que la force vive du mouvement se transforme en chaleur. On peut démontrer facilement par l'expérience, que le jet de vapeur d'eau qui sort de l'orifice entraîne de l'eau. Un jet de vapeur qui sort d'un orifice s'élargit en forme de cône, mais très-près de l'orifice le jet prend l'aspect de la partie inférieure de la flamme d'une bougie. On distingue dans l'intérieur du jet un petit cône de couleur grise, dont la base couvre l'orifice, et dont le sommet se trouve à l'extérieur; autour de ce cône le jet est diaphane et de couleur bleue. Il conserve cet aspect depuis le sommet du petit cône intérieur jusqu'à une certaine distance au delà; puis il devient trouble et commence à moutonner. Le cône intérieur de couleur grise est sans doute formé par le mélange d'eau et de vapeur, tandis que la partie bleuâtre et diaphane contient la vapeur surchauffée. Quant à la partie conique et moutonnée du jet qui se trouve un peu plus loin, elle est due à l'influence de l'air atmosphérique, qui refroidit la vapeur et en condense une partie.

On sait que l'on peut mettre impunément la main dans le

Écoulement de la vapeur d'eau sèche et saturée dans l'atmosphère.

PRESSION dans la chaudière en atmosphères.	$A\frac{w^2}{2g}$	VITESSE d'écoulement en mètres w.	QUANTITÉ spécifique de vapeur x dans la section de l'orifice.	VOLUME spécifique v dans la section de l'orifice.	POIDS EN KILOGRAMMES du fluide écoulé par seconde. (F est la section de l'orifice en mètres carrés.)			DIAMÈTRE de l'orifice en centimètres d.
					Mélange G.	Vapeur D.	Eau W.	
2	27,894	481,71	0,9597	1,5839	304,12.F	291,86.F	12,26.F	$6,472.\sqrt{G}$
3	44,228	606,57	0,9369	1,5463	392,27	367,52	24,75	5,699
4	55,827	681,48	0,9210	1,5201	448,32	412,90	35,42	5,331
5	64,820	734,32	0,9091	1,5005	489,38	444,90	44,48	5,102
6	72,179	774,89	0,8993	1,4843	522,05	469,48	52,57	4,939
7	78,397	807,57	0,8913	1,4711	548,95	489,28	59,67	4,816
8	83,792	834,90	0,8844	1,4597	571,96	505,84	66,12	4,716
9	88,561	858,33	0,8784	1,4498	592,03	520,04	71,99	4,637
10	92,824	878,74	0,8730	1,4409	609,85	532,40	77,45	4,569
11	96,677	896,80	0,8683	1,4332	625,86	543,44	82,42	4,509
12	100,203	913,00	0,8640	1,4261	640,21	553,14	87,07	4,460
13	103,452	927,69	0,8601	1,4196	653,48	562,06	91,42	4,416
14	106,456	941,06	0,8565	1,4137	665,67	570,15	95,52	4,362

jet de vapeur, même quand la vapeur s'écoule sous une pression très-forte. Cela vient de ce que la vapeur est surchauffée en dehors de l'orifice. Mais, d'après mes observations, il n'est pas possible d'approcher la main jusqu'au petit cône gris qui a pour base l'orifice : ce qui prouve que la vapeur est saturée et mélangée d'eau dans cet endroit. J'ai calculé dans le même ouvrage la longueur de ce cône, et j'ai déterminé, par suite, à quelle distance de l'orifice la vapeur passe de l'état saturé à l'état surchauffé.

Les formules précédentes s'appliquent à toutes les vapeurs qui se condensent lorsque l'expansion a lieu suivant une courbe adiabatique; mais elles ne s'appliquent plus à la vapeur d'éther dans les circonstances ordinaires, car cette vapeur sort surchauffée lorsque le réservoir d'écoulement ne contient pas d'éther liquide. Le jet de vapeur d'éther est, en effet, complétement transparent à partir de l'orifice, et l'on ne voit point le cône intérieur de couleur grise que l'on observe dans l'écoulement de la vapeur d'eau.

Les autres vapeurs peuvent aussi sortir surchauffées lorsqu'elles rencontrent des résistances considérables. L'augmentation du travail intérieur qui résulte de la diminution de la force vive se manifeste alors par une plus grande quantité spécifique de vapeur à l'orifice; cette quantité peut même, dans certaines circonstances, surpasser l'unité, ce qui montre que la vapeur est alors surchauffée; mais ce cas ne se présente que très-rarement avec la vapeur d'eau.

Les formules données plus haut ne sont pas commodes à appliquer, quand on n'a pas à sa disposition les tableaux de cet ouvrage; mais on peut les remplacer facilement par des formules approchées. Pour l'écoulement des vapeurs, on peut, sans hésitation, négliger le terme $A\sigma(p_1 - p_2)$, comme étant une quantité très-petite, et prendre pour la vapeur d'eau la chaleur spécifique $c = 1,0224$ dans l'intervalle des températures qui se présentent dans les chaudières à vapeur.

A cause de la relation $\tau = \int_0^t \frac{c\,dt}{T}$, on a

$$\tau_1 - \tau_2 = c \operatorname{lognép} \frac{T_1}{T_2},$$

et

$$q_1 - q_2 = c(T_1 - T_2);$$

l'équation (337) devient, après la substitution de ces valeurs et la suppression du dernier terme du second membre,

$$(338) \qquad A\frac{w^2}{2g} = \left(\frac{x_1 r_1}{T_1} + c\right)(T_1 - T_2) - c\,T_2 \operatorname{lognép} \frac{T_1}{T_2}.$$

Dans cette formule, on peut calculer la chaleur de vaporisation à l'aide de la formule approchée de M. Clausius

$$r_1 = 607 - 0{,}708\,t_1,$$

et poser, dans la plupart des cas, $x_1 = 1$.

Lorsque les différences de pression et de température sont petites, on a approximativement

$$c(T_1 - T_2) = c\,T_2 \operatorname{lognép} \frac{T_1}{T_2},$$

et, par suite,

$$(339) \qquad A\frac{w^2}{2g} = \frac{x_1 r_1}{T_1}(T_1 - T_2).$$

La quantité spécifique de vapeur x_2 dans l'orifice se détermine, d'après l'équation (336), au moyen de la formule

$$(340) \qquad \frac{x_2 r_2}{T_2} - \frac{x_1 r_1}{T_1} = c \operatorname{lognép} \frac{T_1}{T_2} \; (*).$$

Mais on pourrait aussi se servir de la formule approchée

$$x_2 = \frac{x_1 \rho_1}{\rho_2},$$

dont il a été question à la page 352.

(*) J'ai appliqué les formules approchées que je viens de donner ici dans mon ouvrage : *Das Locomotivenblasrohr*, p. 79-96; et je les ai comparées à cette occasion aux formules d'écoulement usitées.

Le poids de vapeur et d'eau qui traverse l'orifice en une seconde est, d'après l'équation (334), quand on néglige σ,

$$G = \frac{F w}{x_2 u_2}.$$

Problème II. — *Écoulement d'un liquide soumis à une pression égale à la tension maxima de sa vapeur relative à sa température t_1, sans introduction ni soustraction de chaleur.*

On se trouve dans ce cas lorsqu'on ouvre le robinet de vidange ou le robinet indicateur de niveau d'une chaudière à vapeur; ces robinets laissent sortir l'eau de la chaudière.

Pour étudier cette espèce d'écoulement, il faut égaler à zéro, dans les équations (336) et (337), la quantité spécifique de vapeur x_1; on obtient immédiatement la formule

$$(341) \qquad \frac{x_2 r_2}{T_2} = \tau_1 - \tau_2,$$

qui donne la quantité spécifique de vapeur dans la section de l'orifice, et la formule

$$(342) \qquad A\frac{w^2}{2g} = q_1 - q_2 - T_2(\tau_1 - \tau_2) + A\sigma(p_1 - p_2),$$

de laquelle on déduit la vitesse d'écoulement w.

Le poids G du mélange de vapeur et d'eau, celui de la vapeur D et celui de l'eau W, qui passent à travers l'orifice dans une seconde, se déterminent au moyen de nos formules; elles donnent

$$(343) \qquad G = \frac{F w}{x_2 u_2 + \sigma}, \quad D = x_2 G, \quad W = (1 - x_2) G.$$

L'équation (341) conduit, pour tous les liquides, à une valeur de x_2 plus petite que l'unité; ce qui montre qu'à l'orifice le liquide est toujours accompagné d'une certaine quantité de vapeur formée pendant le trajet vers cet orifice.

Examinons spécialement l'écoulement de l'eau chaude.

Imaginons, par exemple, une chaudière dans laquelle se

trouvent de l'eau et de la vapeur sous une pression de 5 atmosphères; la température t_1 y sera donc de 152°,22. En un point de la paroi qui est couvert d'eau se trouve un orifice bien arrondi vers l'intérieur, d'une section de F mètres carrés, par laquelle l'eau peut s'écouler dans l'atmosphère. En dehors de l'orifice, la pression est donc d'une atmosphère, et la température correspondant à cette pression est $t_2 = 100°$.

Nous pouvons employer les nombres de l'exemple précédent, et l'équation (341) nous donne d'abord pour la valeur de x_2 dans l'orifice :

$$x_2 = 0^{\text{kil}},0929.$$

De l'équation (342), on déduit ensuite

$$A\frac{w^2}{2g} = 3,516,$$

et on a, par conséquent, pour la vitesse w,

$$w = 171^{\text{m}},02.$$

Le poids du mélange, par seconde, est

$$G = 1008,9.F^{\text{kil}};$$

celui de la vapeur est

$$D = x_2 G = 103,0.F,$$

et celui du liquide

$$W = (1 - x_2)G = 1005,8.$$

On a calculé le tableau ci-après (p. 414) en procédant de la même manière.

Ce tableau fournit des résultats très-remarquables. On voit d'abord que l'eau qui sort par un orifice pratiqué en un point de la chaudière couvert d'eau est toujours mélangée de vapeur formée pendant son trajet vers l'orifice. Le poids de cette vapeur est *d'autant plus grand* que la pression dans la chaudière est *plus élevée*. Mais le poids G du mélange d'eau et de vapeur qui s'écoule dans une seconde à travers un ori-

fice est *à peu près constant, pour les différentes pressions, jusqu'à 14 atmosphères;* au moins les valeurs de ces poids augmentent-elles très-lentement avec la pression, comme le montre le tableau. La quantité qui passe à travers l'orifice est d'autant plus petite, que la pression dans la chaudière est plus considérable.

Écoulement de l'eau d'une chaudière à vapeur dans l'atmosphère.

PRESSION dans la chaudière en atmosphères.	$A\frac{w^2}{2g}$	VITESSE d'écoulement en mètres w.	QUANTITÉ spécifique de la vapeur dans l'orifice x_2.	POIDS EN KILOGRAMMES du fluide écoulé par seconde. (F est la section de l'orifice en mètres carrés.) Mélange G.	Vapeur D.	Eau W.
2	0,581	69,52	0,0379	1094,6.F	41,5.F	1053,1.F
3	1,531	112,85	0,0615	1101,6	67,7	1033,9
4	2,530	145,07	0,0789	1106,2	87,3	1018,9
5	3,516	171,02	0,0929	1108,9	103,0	1005,8
6	4,477	192,98	0,1045	1113,2	116,3	996,8
7	5,403	212,00	0,1146	1115,7	127,8	987,8
8	6,297	228,87	0,1235	1118,1	138,1	980,0
9	7,165	244,14	0,1315	1120,4	147,3	973,1
10	8,003	258,02	0,1387	1122,9	155,7	967,2
11	8,814	270,78	0,1454	1124,4	163,5	960,9
12	9,603	282,64	0,1515	1126,6	170,7	955,9
13	10,370	293,71	0,1573	1127,7	177,4	950,3
14	11,116	304,09	0,1626	1129,6	183,7	946,0

Les résultats que nous venons d'énoncer s'écartent beaucoup de ceux que l'on obtient en appliquant au problème actuel les formules ordinaires de l'hydraulique.

La formule qui sert pour l'écoulement de l'eau, dans les circonstances ordinaires, est, avec les notations précédentes,

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \sigma(p_1 - p_2),$$

dans laquelle γ désigne le poids spécifique de l'eau; cette

quantité et le volume spécifique σ de l'eau sont liés par la relation $\gamma\sigma = 1$. Cette formule donne les résultats suivants :

PRESSION dans la chaudière à la section de l'orifice en atmosphères.	VITESSE D'ÉCOULEMENT en mètres w.	QUANTITÉ D'EAU par seconde en kilogrammes $Fw\gamma$.
4	24,663	24663.F
8	37,673	37673.F
12	47,226	47226.F

Lorsqu'on compare ces valeurs à celles du tableau de la page 414, qui correspondent aux mêmes pressions, on voit que la vitesse d'écoulement w est plus petite, mais que le poids écoulé est beaucoup plus grand pour l'eau froide que pour l'eau chaude. Ainsi, pour les trois pressions indiquées, les rapports de ces quantités d'eau sont respectivement 24,16; 38,35; 49,30.

Ces grandes différences s'expliquent par la présence de la vapeur dans l'orifice. Dans l'écoulement de l'eau chaude tel que nous l'avons considéré, cette vapeur occupe la plus grande partie de l'orifice, parce qu'elle a un très-grand volume spécifique.

Les résultats des recherches précédentes pourraient facilement se vérifier par expérience. Il faudrait faire écouler l'eau d'une chaudière à vapeur en arrêtant l'alimentation, mais continuant à chauffer de manière que la pression fût constante; on déduirait le poids d'eau écoulé G de l'abaissement du niveau après un temps déterminé. Mes expériences personnelles n'ont pas conduit à un résultat concluant. L'eau s'écoulait d'une chaudière de locomotive sous une pression de 6 atmosphères, et j'avais l'intention de recueillir dans une jauge au moins le liquide sorti. J'ai changé à plusieurs reprises la manière de faire l'expérience, et je n'ai pu réussir, la vapeur entraînant avec elle la plus grande partie de l'eau. Il faut donc disposer l'expérience comme je l'ai dit plus haut, c'est-à-dire

mesurer l'eau sortie par l'abaissement du niveau dans la chaudière. L'occasion m'a malheureusement manqué jusqu'ici pour exécuter les expériences de cette manière.

Mais les phénomènes que j'ai observés sont en général d'accord avec les conclusions que l'on peut déduire de mes recherches, et aucune expérience n'infirme mes propositions. Une expérience bien simple, faisable avec une chaudière à vapeur quelconque, pourrait d'ailleurs les confirmer. Il suffirait de vider cette chaudière en partie, à l'aide du robinet de vidange, une première fois sous la pression la plus haute possible, puis ensuite sous une pression très-basse. Dans les deux expériences, si les niveaux de l'eau dans la chaudière sont les mêmes au commencement et à la fin de l'écoulement, la durée de l'opération doit être à peu près la même, d'après mes formules.

Les équations générales (341) et (342) peuvent se remplacer dans la pratique par des formules plus simples, suffisamment exactes. Je suppose toujours que la chaleur spécifique de l'eau soit constante et qu'elle ait la valeur moyenne $c = 1{,}0224$; je pose encore $\sigma = \frac{1}{\gamma}$, γ représentant le poids spécifique de l'eau ($\gamma = 1000$); l'équation (341) pourra s'écrire

$$(344) \qquad \frac{x_2 r_2}{T_2} = c \operatorname{lognép} \frac{T_1}{T_2},$$

et on aura, au lieu de l'équation (342),

$$(345) \qquad A\frac{w^2}{2g} = c(T_1 - T_2) - c\,T_2 \operatorname{lognép} \frac{T_1}{T_2} + A\frac{(p_1 - p_2)}{\gamma}.$$

Si l'on voulait encore négliger le dernier terme du deuxième membre de cette équation, ce que je ne crois pas faisable en général, on obtiendrait

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{c}{A}\left(T_1 - T_2 - T_2 \operatorname{lognép} \frac{T_1}{T_2}\right).$$

M. Rankine (*) a déjà fait usage du deuxième membre de

(*) *Philosophical Transactions*, 1854; — *Philosophical Magazine*, 1863.

cette équation, mais il lui attribue une autre signification. Il dit que cette expression représente le travail qui devient libre, quand 1 kilogramme d'eau qui se trouve sous la pression correspondant à la température T_1 est soumis subitement à la pression moindre qui est relative à la température T_2. Mes recherches montrent maintenant que cette expression a une signification bien plus générale, et que la formule de M. Rankine n'est qu'une formule approchée : le terme $A\frac{p_1 - p_2}{\gamma}$ de l'équation (315) n'est pas en général assez petit pour qu'on puisse le négliger, comme l'a fait M. Rankine.

Supposons enfin que l'écoulement de l'eau chaude se fasse avec de très-petites différences de pressions et de températures; on peut écrire

$$\text{lognép}\,\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_1 - T_2}{T_2},$$

et alors on a simplement, au lieu de l'équation (345),

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma};$$

c'est la formule donnée habituellement dans les traités d'hydraulique pour l'écoulement de l'eau par les orifices.

Dans cette dernière équation, comme dans toutes les formules précédentes, p_1 représente la pression dans le réservoir du liquide au niveau de l'orifice. Lorsque le niveau de l'eau est à une hauteur h au-dessus de cet orifice, et lorsque p_1 désigne la pression de la vapeur qui s'exerce sur le niveau de l'eau, il faut mettre dans toutes les formules précédentes

$$h + \frac{p_1}{\gamma}$$

à la place de

$$\frac{p_1}{\gamma}.$$

Je rappellerai en terminant que les équations dont on a fait

usage dans les deux derniers problèmes supposent formellement qu'il n'y ait ni introduction ni soustraction de chaleur dans la masse qui se trouve dans le réservoir d'écoulement et qui se rend à l'orifice; c'est très-probablement le seul cas qui se présente dans la pratique. J'aurais pu faire d'autres hypothèses; une de celles qui se présentent à l'esprit consiste en ce que la quantité spécifique de la vapeur x_1 contenue dans le mélange qui se rend à l'orifice reste constante. Il suffirait alors de faire $x_1 = x_2 = x$ dans les deux équations fondamentales (332) et (333). L'équation (333) nous apprend alors qu'il faut fournir ou enlever à la masse une quantité de chaleur dépendant de la valeur initiale de x_1.

Supposons, par exemple, qu'une chaudière à vapeur chauffée laisse écouler de l'eau non mêlée de vapeur à travers un tuyau recouvert par l'eau, il faudrait faire $x_1 = x = x_2 = 0$ dans les équations mentionnées. L'équation (333) donnerait alors

$$dQ = dq,$$

et en intégrant on aurait

$$Q = q_2 - q_1 = -(q_1 - q_2).$$

Telle serait la quantité de chaleur qu'il faudrait enlever à chaque unité de poids d'eau pendant son trajet vers l'orifice pour qu'il n'y eût pas de vaporisation.

L'équation (332) donne ici

$$A\frac{w^2}{2g} = Q + q_1 - q_2 + A\sigma(p_1 - p_2),$$

et, en y substituant la valeur de Q écrite ci-dessus, on aura

$$\frac{w^2}{2g} = \sigma(p_1 - p_2) = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}.$$

Nous retrouvons, comme cela devait être, la formule habi-

tuellement employée, quand l'eau s'écoule par un orifice sans éprouver de changement d'agrégation (*).

(*) Des recherches analogues à celles qui ont été faites à la page 168 à propos des gaz permanents pourraient naturellement suivre l'étude de l'écoulement du mélange de vapeur et de liquide; on peut étudier la précipitation du mélange de vapeur et de liquide qui se fait d'un réservoir dans un autre, en supposant que le volume reste constant. Mais ce problème n'a pas d'importance dans la pratique, et n'apprend rien de nouveau sur les propriétés des vapeurs. Je me borne donc à renvoyer le lecteur au Mémoire de M. Bauschinger : *Ueber das Ausströmen des Wasserdampfes aus einem Gefässe und Einströmen in ein solches*, qui a été publié dans le *Journal de Mathématiques et de Physique de Schlömilch*, 8e année, 1863, VIe cahier. Ce Mémoire contient les formules relatives à la vitesse d'écoulement des vapeurs, que j'avais déjà développées et appliquées avant M. Bauschinger, dans mon ouvrage : *Das Locomotivenblasrohr*.

CHAPITRE II.

DES VAPEURS SURCHAUFFÉES.

I. — *De la capacité calorifique des vapeurs.*

Nous avons déjà constaté à plusieurs reprises la différence qui existe entre les vapeurs saturées et les vapeurs non saturées ou surchauffées (p. 98 et 239). Si nous pouvions trouver pour les vapeurs surchauffées une équation qui exprimât la relation entre la pression p, le volume spécifique v et la température absolue T, cette équation, jointe aux formules de la théorie mécanique de la chaleur, devrait nous conduire à des formules exprimant *à la fois* les propriétés des vapeurs saturées et des gaz permanents; car nous devons considérer ces derniers comme des vapeurs très-éloignées de leur point de condensation. Toutes les formules que nous avons données plus haut pour les vapeurs saturées et pour les gaz permanents ne s'appliquent qu'aux états-limites, et même l'état du gaz permanent ne peut être atteint rigoureusement par aucun gaz et par aucune vapeur.

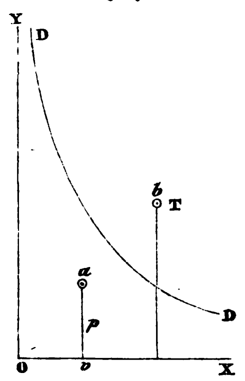
Considérons une vapeur pour laquelle on connaît, par un tracé graphique DD (*fig.* 43), *la courbe d'une quantité de vapeur constante* correspondant à la quantité spécifique de la vapeur $x = 1$; on peut savoir facilement si le poids de l'unité de vapeur est surchauffé ou saturé, lorsqu'on donne le volume spécifique v et la pression spécifique p. Prenons v pour abscisse et p pour ordonnée d'un point a; si ce point tombe dans l'espace compris entre la courbe-limite DD et les axes de coordonnées, la vapeur sera saturée et mélangée avec une certaine quantité de liquide. La quantité de vapeur x étant

connue, on a la relation

$$v = xu + \sigma,$$

dans laquelle u et, à la rigueur, σ doivent être considérées comme des fonctions de la température ou de la pression. Il

Fig. 43.



existe donc, pour un mélange de vapeur et de liquide, une équation entre le volume, la pression et la quantité spécifique de vapeur au moyen de laquelle on peut déterminer une de ces trois quantités, quand les deux autres sont données.

Lorsque le point a tombe sur la courbe DD, $x = 1$; et, pendant le changement suivant cette courbe, le volume spécifique ne dépend que de la pression ou de la température. Enfin, dans le cas où le point a prend la position b dans l'espace situé en dehors de la courbe DD, on a une autre relation

$$v = F(p, T).$$

Il faut alors considérer le volume comme une fonction de la pression et de la température; ces deux dernières quantités sont indépendantes l'une de l'autre, tandis qu'elles sont liées pour les vapeurs saturées par une relation qu'on a pu déterminer au moins par expérience.

Si le point b (*fig.* 43) est situé à une distance *très-considérable* de la courbe DD, la dernière formule prend la forme

$$pv = RT,$$

qui a été établie pour les gaz permanents, et dans laquelle R est une constante qui dépend de la nature de la vapeur. Plus le point *b* se rapproche de la courbe DD, plus les écarts deviennent grands; aussi l'équation précédente ne s'applique pas aux cas que l'on rencontre ordinairement.

Jusque dans ces derniers temps, on a pourtant appliqué les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, que cette équation exprime, même aux vapeurs saturées; mais on ferait bien de renoncer à ces lois, dont les expériences de M. Regnault et les théorèmes de la théorie mécanique de la chaleur démontrent l'inexactitude, parce que les écarts sont tellement grands pour les vapeurs saturées, et même pour les vapeurs légèrement surchauffées, que les résultats ainsi obtenus ne peuvent même pas servir pour une première approximation.

On se trouvait, il est vrai, dans une situation embarrassante lorsqu'il s'agissait de certaines questions, telles que celle des machines qui emploient de la vapeur surchauffée, et, faute de notions théoriques suffisantes sur les vapeurs, on était obligé de se contenter de ces résultats.

Les expériences que l'on connaissait ne contribuaient pas non plus à éclaircir la question. On a, en effet, suivi deux voies : dans l'une, on a cherché la chaleur spécifique des vapeurs sous une pression constante; dans l'autre, on a cherché le coefficient de dilatation de la vapeur d'eau surchauffée.

La plus ancienne détermination de la capacité calorifique c_p de la vapeur d'eau non saturée (*voyez* p. 105 et les suivantes) est due à Delaroche et Berard, qui ont trouvé $c_p = 0,847$. M. Regnault a trouvé plus tard $c_p = 0,4750$, et il a donné finalement, comme moyenne tirée de plusieurs expériences, la valeur $c_p = 0,4805$; il a aussi opéré sur plusieurs autres vapeurs. Nous pouvons accepter le dernier nombre avec beaucoup de confiance, d'autant plus qu'il coïncide avec le résultat d'une autre série d'expériences du même auteur.

On n'a pas réussi à déterminer théoriquement la capacité calorifique c_p, puisque les résultats des calculs de MM. Holtzmann, Redtenbacher, Rankine et G. Schmidt diffèrent beaucoup les uns des autres.

Quant à la dilatation de la vapeur d'eau surchauffée, les expériences faites par M. Siemens (*) et par MM. Fairbairn et Tate (**) montrent que le coefficient de dilatation est très-variable; il ne s'approche de la valeur $\alpha = 0,003665$ relative aux gaz permanents, que si la vapeur est très-fortement surchauffée, et il est d'autant plus grand que l'état de la vapeur se rapproche davantage de la courbe-limite DD. Ainsi M. Siemens indique que la vapeur d'eau saturée sous une pression d'une atmosphère, et, par suite, à une température de 100 degrés, se dilate respectivement 5, 4, 3 et 2 fois autant que l'air atmosphérique, lorsque, séparée de l'eau et maintenue sous une pression constante, elle reçoit des élévations de température de : 10 degrés; 15°,6; 26°,5 et 86°,1.

Les expériences de MM. Fairbairn et Tate présentent des écarts analogues.

Voilà ce que l'on savait sur les propriétés des vapeurs surchauffées, lorsque M. Hirn fit faire un grand pas en avant, aussi bien par la découverte d'une nouvelle loi que par des expériences spéciales.

Avant d'exposer le théorème de M. Hirn, je ferai connaître d'abord mes propres recherches sur les vapeurs surchauffées, et je montrerai qu'on peut aller plus loin qu'on ne l'a fait jusqu'ici, sans se servir de nouveaux théorèmes, en s'appuyant seulement sur la théorie mécanique de la chaleur et sur les théorèmes relatifs aux propriétés des vapeurs surchauffées. Ce sera le meilleur moyen d'aborder le théorème de M. Hirn.

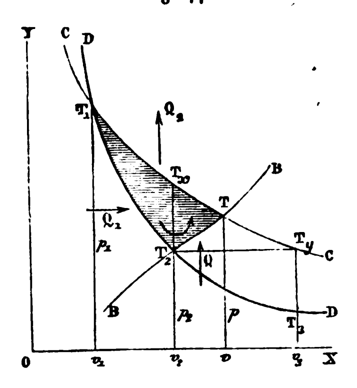
L'unité de poids d'une vapeur quelconque saturée, mais sèche, se trouve d'abord sous la pression p_1 et sous le volume v_1, puis elle passe à la pression p_2 et au volume v_2; on connaît les températures $T_1 = a + t_1$ et $T_2 = a + t_2$ qui correspondent à ces états, et les extrémités des coordonnées se trouvent sur la courbe-limite DD (*fig.* 44), qui représente la courbe d'une quantité de vapeur constante pour la vapeur pure ($x = 1$), et dont le tracé est connu par les recherches précédentes.

(*) *Civil Engineer and Architect's Journal*, 1852, p. 294.

(**) *Phil. Magazine*, t. XXI, 1861, p. 233.

Je fais passer par le premier point T_1 une courbe quelconque CC et par le point T_2 une autre courbe quelconque BB;

Fig. 44.



ces deux courbes se coupent, par exemple, au point T, dont les coordonnées sont p et v. Ces trois courbes, dont une seule DD est déterminée, forment une surface ombrée sur la figure. Appelons U_1, U_2 et U les travaux intérieurs de l'unité de poids de la vapeur respectivement dans les états-limites T_1, T_2, T; si nous décrivons un cycle dans la direction de la flèche, nous avons, d'après les théorèmes connus,

$$(346) \qquad Q_2 - Q_1 - Q = AL_2 - AL_1 - AL.$$

Il faut fournir les quantités de chaleur Q_1 et Q, et produire les travaux L_1 et L pendant les trajets T_1T_2 et T_2T; soustraire la chaleur Q_2 et dépenser le travail L_2 pendant le trajet TT_1.

La quantité de chaleur Q_1 est, d'après l'équation (239),

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} h\,dt.$$

Le travail L_1, qui est ici produit, se trouve au moyen de l'équation (240), lorsqu'on l'intègre et lorsqu'on y fait $x_1 = 1$:

$$AL_1 = \int_{t_1}^{t_2} h\,dt - (q_2 - q_1) - (\rho_2 - \rho_1),$$

ou bien

$$AL_1 = Q_1 + (q_1 + \rho_1) - (q_2 + \rho_2).$$

Pendant le trajet TT_1 (courbe CC), il faut enlever la quantité de chaleur

$$Q_2 = A(U - U_1) + AL_2.$$

Portons ces valeurs de Q_1, Q_2 et AL_1 dans l'équation (346), nous trouvons, après quelques réductions,

$$(347) \quad Q = A(U - U_1) + (q_1 + \rho_1) - (q_2 + \rho_2) + A\int_{v_2}^{v} p\,dv.$$

C'est la quantité de chaleur qui a été fournie à la vapeur pendant le trajet T_2T sur la courbe BB. Le changement devant se faire suivant un trajet réversible, nous avons pu, dans le développement de la dernière formule, remplacer le travail L par l'expression

$$L = \int_{v_2}^{v} p\,dv.$$

L'équation (347) est vraie, quelles que soient les lois auxquelles sont soumises les courbes CC et BB.

L'intégrale qui figure dans cette équation peut s'écrire, quand on intègre par parties,

$$\int_{v_2}^{v} p\,dv = pv - p_2 v_2 - \int_{p_2}^{p} v\,dp,$$

ou, si l'on ajoute et si l'on retranche le terme $p_1 v_1$ dans le second membre,

$$\int_{v_2}^{v} p\,dv = (pv - p_1 v_1) + p_1 v_1 - p_2 v_2 - \int_{p_2}^{p} v\,dp.$$

Mais les états $(p_1 v_1)$ et $(p_2 v_2)$ sont relatifs *à une vapeur sèche et saturée ;* nous pouvons donc poser $v_1 = u_1 + \sigma$ et $v_2 = u_2 + \sigma$, et nous obtenons alors

$$A\int_{v_2}^{v} p\,dv = A p_1 u_1 - A p_2 u_2$$
$$+ A(pv - p_1 v_1) + A\sigma(p_1 - p_2) - A\int_{p_2}^{p} v\,dp.$$

Lorsqu'on met cette valeur dans l'équation (347), en observant que la quantité $q + \rho + Apu$ représente généralement la chaleur totale λ, que les expériences de M. Regnault nous donnent en fonction de la température, on obtient

$$(348)\quad \left\{\begin{aligned} Q = {} & A(U - U_1) + \lambda_1 - \lambda_2 \\ & + A\sigma(p_1 - p_2) + A(pv - p_1 v_1) - A\int_{p_1}^{p} v\,dp. \end{aligned}\right.$$

Nous allons maintenant faire une hypothèse sur l'une des deux courbes CC et BB. Supposons, par exemple, que la courbe BB soit une ligne droite $T_2 T_y$ parallèle à l'axe des abscisses (*fig.* 44); le changement se fera alors sous *une pression constante* $p = p_2$; par suite, $dp = 0$, et, si T_y désigne la température à l'extrémité de la courbe, on a

$$Q = c_p(T_y - T_2).$$

En supposant c_p constant ou en prenant pour cette quantité, si elle est variable, une valeur moyenne constante, on tire de l'équation (348)

$$(349)\quad \left\{\begin{aligned} c_p(T_y - T_2) = {} & A(U_y - U_1) \\ & + \lambda_1 - \lambda_2 + A\sigma(p_1 - p_2) + A(p_2 v - p_1 v_1); \end{aligned}\right.$$

U_y désigne le travail intérieur dans l'état T_y (*fig.* 44).

Supposons à présent que la courbe BB soit une ligne droite $T_2 T_x$ parallèle à l'axe des ordonnées, le passage de la courbe-limite DD à la courbe CC se fait *sous un volume constant* $v = v_2$; il faut alors faire dans l'équation (347) $dv = 0$, et, en désignant par c_v la chaleur spécifique à volume constant, on a

$$Q = c_v(T_x - T_2);$$

T_x est la température que la vapeur possède à l'intersection de la courbe CC. En mettant encore U_x à la place de U, on aura

$$(350)\quad c_v(T_x - T_2) = A(U_x - U_1) + (q_1 + \rho_1) - (q_2 + \rho_2).$$

Les deux dernières équations nous seront très-utiles ulté-

rieurement; avant de nous en servir faisons encore une remarque.

Si nous faisions continuer la dilatation suivant la courbe DD (*fig.* 44) jusqu'au point T_3, qui se trouve sous la même ordonnée que T_y, et auquel correspondent les valeurs p_3, v_3 et t_3, nous déduirions de l'équation (350) par analogie

(351) $$c_v(T_y - T_3) = A(U_y - U_1) + (q_1 + \rho_1) - (q_3 + \rho_3).$$

Nous allons d'abord employer les dernières équations pour calculer les capacités calorifiques c_p et c_v, en supposant que :

Les vapeurs surchauffées se comportent exactement comme les gaz permanents, même jusqu'à leur point de condensation.

Dans cette hypothèse, la courbe isothermique (T = const.) serait identique, comme cela a lieu pour les gaz (p. 120), à la courbe isodynamique (U = const.), et elle serait une hyperbole équilatère.

On aurait alors $pv = p_1 v_1 = p_2 v_3$, et encore

$$U_x = U_y = U_1,$$
$$T_x = T_y = T_1;$$

les équations (349) et (350) donnent simplement

$$c_p(T_1 - T_2) = \lambda_1 - \lambda_2 + A\sigma(p_1 - p_2),$$
$$c_v(T_1 - T_2) = (q_1 + \rho_1) - (q_2 + \rho_2).$$

En différentiant, nous trouvons, pour la chaleur spécifique à *pression constante*,

(352) $$c_p = \frac{d\lambda}{dt} + A\sigma\frac{dp}{dt},$$

et pour la chaleur spécifique à *volume constant*,

(353) $$c_v = \frac{dq}{dt} + \frac{d\rho}{dt}.$$

On peut calculer les quantités c_p et c_v d'après ces formules, car λ, q, ρ sont des fonctions connues de la température. Quand on introduit les formules empiriques des pages 254, 259 et 273 dans les équations précédentes, on trouve que c_p et c_v augmentent lentement avec la température. Nous pouvons né-

gliger, dans l'équation (352), le deuxième terme du second membre; alors, pour la température $t = 0$, nous aurons

$$c_p = \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_0 \quad \text{et} \quad c_v = \left(\frac{dq}{dt}\right)_0 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_0.$$

La dernière de ces formules peut encore s'écrire

$$c_v = \left(\frac{dJ}{dt}\right)_0,$$

dans laquelle J désigne la chaleur de la vapeur.

Les formules empiriques connues pour la vapeur d'eau donnent pour résultats

$$c_p = 0,305 \quad \text{et} \quad c_v = 0,209,$$

parce que

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_0 = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_0 = -0,791.$$

Les nombres du tableau suivant ont été calculés de cette manière.

VAPEURS SATURÉES.	CHALEUR SPÉCIFIQUE à pression constante c_p.	CHALEUR SPÉCIFIQUE à volume constant c_v.	CHALEUR spécifique à pression constante, d'après les expériences de M. Regnault.
Eau	0,3050	0,2090	0,4805
Éther	0,4500	0,4225	0,4797
Alcool	"	"	0,4534
Acétone	0,3664	0,3046	0,4125
Chloroforme	0,1375	0,1195	0,1567
Chlorure de carbone	0,1462	0,1296	"
Sulfure de carbone	0,1460	0,1207	0,1596

L'examen de ce tableau montre que le calcul conduit toujours à des valeurs de la chaleur spécifique à pression constante inférieures à celles que M. Regnault a trouvées par expérience. Comme tout nous porte à accepter les nombres de M. Regnault avec la plus grande confiance, nous devons

regarder comme inexactes les hypothèses sur lesquelles sont fondées les formules (352) et (353). Et d'abord la courbe isodynamique des vapeurs n'est pas identique à la courbe isothermique, et il y a pour cela encore d'autres raisons auxquelles j'ai fait allusion à la page 126. Si nous voulons appliquer les formules générales (349) et (350), nous devons faire d'autres suppositions; la loi de M. Hirn, jointe aux données expérimentales de M. Regnault, nous offre un moyen de résoudre la question.

II. — *Loi de Hirn.*

M. Hirn a établi dans ces derniers temps (*) que le travail intérieur U d'une vapeur surchauffée est proportionnel au produit pv à partir du point de condensation jusqu'au point où elle possède les mêmes propriétés que les gaz permanents; en d'autres termes, si nous conservons les notations introduites plus haut, *la courbe isodynamique des vapeurs serait une hyperbole équilatère*, mais la courbe isothermique serait différente.

Concevons l'unité de poids de la vapeur saturée et sèche occupant le volume v_1 sous la pression p_1; si nous faisons communiquer l'espace que remplit cette vapeur avec un réservoir vide d'air, la vapeur sera surchauffée après la dilatation (*voyez* p. 367).

Appelons v le volume et p la pression à la fin de l'opération, on aurait, d'après M. Hirn,

$$pv = p_1 v_1,$$

car le travail intérieur U ne change pas, pendant que la vapeur se détend pour occuper l'espace vide d'air sans recevoir ni perdre de la chaleur.

(*) Hirn, *Théorie mécanique de la chaleur*, 1re Partie, 2e édit., Paris, 1865.

Voyez aussi, pour ce qui concerne les recherches de M. Hirn sur les vapeurs surchauffées :

Combes, *Exposé des principes de la Théorie mécanique de la chaleur* (*Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale*), t. XI, 1864, p. 447.

On pourrait calculer à l'aide de cette formule la pression finale p pour un volume donné. Mais elle ne donne pas d'indication directe sur la température finale. Cette température ne saurait être la même que la température initiale; car la courbe isothermique serait identique à la courbe isodynamique, et nous avons reconnu plus haut que cela était inadmissible.

On voit maintenant en quoi l'hypothèse de M. Hirn diffère de celle qu'on a admise jusqu'à présent; l'hypothèse de M. Hirn admet seulement la même ligne isodynamique que l'autre; mais elle n'admet plus la même ligne isothermique, laquelle devra être déterminée par des recherches spéciales.

Lorsqu'on accepte l'opinion de M. Hirn et qu'on prend sa loi pour base de calculs, on trouve, comme nous le ferons voir, une coïncidence satisfaisante entre les résultats des calculs et tous ceux qu'on a pu tirer des observations faites sur les vapeurs surchauffées.

Néanmoins la loi de M. Hirn ne me paraît pas parfaitement exacte; mais elle s'approche tant de la vérité, qu'on peut l'accepter jusqu'à ce que cette question soit complétement résolue. Il en est de la loi de M. Hirn comme de celles de Mariotte et de Gay-Lussac, qui ne sont vraies qu'approximativement pour les gaz permanents.

La véritable forme de la ligne isodynamique me paraît pouvoir être déterminée par les considérations suivantes :

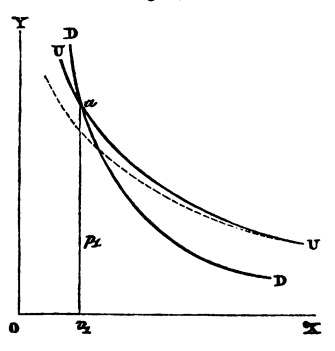
Supposons que la courbe isodynamique UU passe par le point a de la courbe limite DD, alors il y a pour la plupart des vapeurs, comme je l'ai montré p. 299, une condensation de vapeur lorsqu'on les comprime suivant la ligne isodynamique, et j'ai trouvé pour la vapeur d'eau en particulier (*voyez* p. 298) que la ligne isodynamique est représentée d'une manière suffisamment exacte par la formule empirique

$$pv^{\nu} = p_1 v_1^{\nu},$$

pourvu qu'on parte de la courbe limite DD, c'est-à-dire que la vapeur soit sèche et saturée au commencement; l'exposant

$\nu = 1,0456$. Cette valeur est donc déjà très-près de l'unité pour un mélange de vapeur et de liquide. En rapprochant ce

Fig. 45.



fait de la loi de M. Hirn, je suis conduit à penser que la courbe isodynamique de la vapeur est cette courbe qui traverse la courbe-limite, sans que sa loi soit modifiée par là. La valeur de ν que nous venons de prendre est une valeur moyenne trouvée par un procédé analogue à celui qui à fourni l'exposant μ de la courbe adiabatique (p. 330). Comme celle de μ, la valeur de ν varie peu, et par suite la formule précédente représenterait exactement l'équation de la courbe isodynamique des vapeurs, si l'on pouvait tenir compte de la variabilité de ν. Il y a lieu de croire que la valeur de ν diminue rapidement jusqu'à l'unité, si en partant de la courbe-limite DD on suit la courbe du côté de l'espace qui correspond aux vapeurs surchauffées, c'est-à-dire que la courbe isodynamique se transforme très-vite dans une hyperbole équilatère comme cela est représenté dans la *fig.* 45.

Revenons au cycle indiqué tout à l'heure, et supposons que la courbe CC (*fig.* 44) soit la courbe isodynamique, alors on peut faire $U_y = U_x = U_1$ dans les équations (349) à (351), et les équations (349) et (351) donneront alors

$$c_p(T_y - T_2) = \lambda_1 - \lambda_2 + A\sigma(p_1 - p_2) + A(p_2 v - p_1 v_1)$$

et

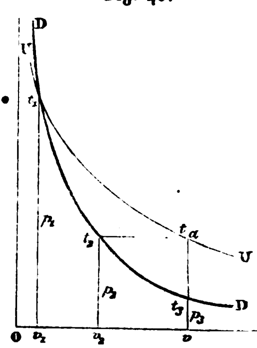
$$c_v(T_y - T_3) = (q_1 + \rho_1) - (q_3 + \rho_3).$$

Ces formules sont applicables quel que soit le tracé véritable de la ligne isodynamique. D'après la loi de M. Hirn on aurait

$$p_2 v = p_1 v_1,$$

et alors le terme $A(p_2 v - p_1 v_1)$ disparaîtrait dans la première des deux équations précédentes; mais nous conserverons encore ce terme, laissant non résolue la question du véritable tracé de la courbe. Nous introduirons aussi une notation plus simple conforme à la *fig.* 46 en écrivant T au lieu de T_y et en dési-

Fig. 46.



gnant les températures mesurées en degrés centigrades par t_1, t_2, t_3 et t.

Supposons que la vapeur surchauffée soit caractérisée dans l'état a par le volume v, la pression $p = p_2$, la température t; que la ligne isodynamique UU, et les droites parallèles aux axes qui passent par le point a coupent la courbe-limite respectivement aux points t_1, t_2 et t_3, auxquels correspondent les pressions p_1, p_2, p_3 et les volumes v_1, v_2, v_3. Introduisons enfin *la chaleur de la vapeur* $J = q + \rho$ (équation 206). En additionnant les formules empiriques des pages 254 et 273, qui donnent les valeurs de q et de ρ, on peut déterminer facilement des formules empiriques qui donnent J pour les diverses vapeurs. Nous obtenons alors au lieu des deux équations écrites ci-dessus les suivantes :

(354) $c_p(t - t_2) = \lambda_1 - \lambda_2 + A\sigma(p_1 - p_2) + A(p_2 v - p_1 v_1)$,

(355) $c_v(t - t_3) = J_1 - J_3$.

Nous n'emploierons ces deux formules, bien qu'elles s'appliquent à toutes les vapeurs, que pour la *vapeur d'eau surchauffée ;* nous pouvons donc poser, d'après ce qui a été dit p. 259,

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0,305(t_1 - t_2).$$

Pour la chaleur spécifique à volume constant c_p, nous prenons d'après M. Regnault 0,4805, et nous admettons, d'après lui, qu'elle est indépendante de la pression et de la température.

Lorsque nous avons choisi les pressions p_1 et p_2, les températures t_1 et t_2 et les volumes v_1 et v_2 sont connus à l'aide des Tables de l'Appendice, puisque la courbe limite DD est relative à la vapeur saturée.

En adoptant la loi de M. Hirn, c'est-à-dire en supposant que la courbe UU soit une hyperbole équilatère, on doit faire dans l'équation (354) $p_2 v = p_1 v_1$; cette relation donne alors le volume v de la vapeur qui a été surchauffée de t_2 à t à partir de la pression p_2.

Ce volume est

$$(356) \qquad v = \frac{p_1 v_1}{p_2}.$$

L'accroissement de volume est

$$(357) \qquad v - v_2 = \frac{p_1 v_1 - p_2 v_2}{p_2},$$

et la surchauffe est, d'après l'équation (354),

$$(358) \qquad t - t_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + A\sigma(p_1 - p_2)}{c_p}.$$

On peut déduire de là facilement la température t de la vapeur surchauffée dont le volume est v et la pression $p = p_2$.

On peut ensuite chercher dans la Table X de l'Appendice, quelle température t_3 correspond à celle de la vapeur saturée dont le volume coïncide avec celui (v) de la vapeur surchauffée, et on connaît alors J_3; l'équation (355) donne alors la cha-

leur spécifique *à volume constant*

$$c_v = \frac{J_1 - J_3}{t - t_3}. \tag{359}$$

On voit combien il est facile maintenant de déterminer la pression, le volume et la température d'une vapeur surchauffée dans diverses circonstances, et on peut espérer établir en suivant cette voie la vraie relation qui existe entre p, v, t ou T. On verra tout à l'heure jusqu'à quel point cet espoir est permis.

Soient, par exemple, $p_2 = 1$ et $p_1 = 5$ atmosphères; d'après la Table X, on a

$$v_2 = u_2 + \sigma = 1{,}6504 \quad \text{et} \quad v_1 = u_1 + \sigma = 0{,}3636,$$
$$t_2 = 100^\circ \quad \text{et} \quad t_1 = 152^\circ{,}22.$$

D'après l'équation (356), on a pour le volume de la vapeur surchauffée sous la pression d'une atmosphère

$$v = 1^{mc}{,}8182,$$

et pour l'accroissement de volume

$$v - v_2 = 0^{mc}{,}1678;$$

enfin la surchauffe est, avec $c_p = 0{,}4805$,

$$t - t_2 = 33^\circ{,}35,$$

et, par suite, la température de la vapeur surchauffée est

$$t = 133^\circ{,}35, \quad \text{d'où} \quad T = 273 + t = 406^\circ{,}35.$$

Si l'on avait pour cette vapeur surchauffée la même relation entre le volume $v = 1{,}8182$, la pression $p = 10334$, et la température $t = 133^\circ{,}35$ que pour les gaz permanents, à savoir :

$$pv = R(a + t),$$

on tirerait de cette formule

$$R = 46{,}239.$$

La Table X montre que le volume $v = 1{,}8182$ correspond à peu près à celui de la vapeur saturée à la pression de 0,9 at-

mosphère et à la température $t_3 = 97°,08$, et la même Table donne

$$J_3 = q_3 + \rho_3 = 97,543 + 498,610 = 596,153;$$

on trouve semblablement

$$J_1 = 608,735.$$

D'après cela, l'équation (359) donne

$$c_v = 0,3469,$$

et pour

$$k = \frac{c_p}{c_v} = 1,385,$$

résultat qui diffère peu de celui qu'on a trouvé pour les gaz permanents.

On pourrait déterminer de cette manière l'état de la vapeur surchauffée pour un grand nombre de points situés comme le point a en dehors de la courbe DD (*fig.* 46).

J'ai calculé ainsi une suite de points et j'ai rassemblé les résultats dans le tableau ci-contre, j'ai pris $p_2 = 1$ atmosphère pour tous les points, et $p_1 = 1, 2, 3, 4, \ldots 14$ atmosphères. J'ai joint à ce tableau un autre qui contient un extrait des expériences de M. Hirn.

La comparaison des deux tableaux montre une coïncidence presque parfaite; mais on n'a pas pu pousser le calcul aussi loin que l'expérience; la plus grande surchauffe du premier tableau est de $161°,30 - 100° = 61°,30$. On ne peut aller plus loin, parce qu'il faudrait prendre une pression auxiliaire p_1 supérieure à 14 atmosphères, ce qui dépasserait les limites entre lesquelles on peut appliquer les formules empiriques de M. Regnault. Ce premier tableau est pourtant très-instructif, puisqu'il prouve qu'on s'est appuyé pour le calculer sur certaines suppositions non justifiées; ce sont les valeurs de R inscrites dans sa dernière colonne qui donnent lieu à cette objection. On voit en effet que R augmente d'abord avec la température, puis qu'il diminue à partir de la température $t = 137°,84$. Une pareille variation de la quantité R est impos-

Vapeur d'eau surchauffée sous la pression d'une atmosphère.

PRESSION AUXILIAIRE p_1 en atmosphères.	VOLUME SPÉCIFIQUE v en mètres cubes.	TEMPÉRATURE t en degrés centigrades.	$R = \frac{pv}{a+t}$
	1,6504	100,00	45,724 (*)
2	1,7195	113,13	46,017
3	1,7622	121,63	46,146
4	1,7935	128,08	46,210
5	1,8182	133,35	46,239
6	1,8386	137,84	46,248
7	1,8562	141,78	46,247
8	1,8716	145,30	46,237
9	1,8851	148,50	46,218
10	1,8974	151,43	46,197
11	1,9085	154,14	46,173
12	1,9187	156,68	46,145
13	1,9280	159,06	46,115
14	1,9368	161,30	46,085

(*) La vapeur est saturée à 100 degrés sous la pression d'une atmosphère.

Expériences de M. Hirn sur la vapeur d'eau surchauffée sous la pression d'une atmosphère.

TEMPÉRATURE EN DEGRÉS CENTIGRADES t.	VOLUME SPÉCIFIQUE v.
100	1,6504 (*)
118,5	1,74
141	1,85
148,5	1,87
162	1,93
200	2,08
205	2,14
246,5	2,29

(*) La vapeur est saturée à 100 degrés sous la pression d'une atmosphère.

sible, car elle est en contradiction avec les idées que nous avons sur les propriétés des gaz et des vapeurs. On comprend que la valeur de R varie, puisque les vapeurs surchauffées n'obéissent pas aux lois de Mariotte et de Gay-Lussac aux environs de leurs points de saturation. Mais comme les vapeurs se rapprochent d'autant plus des gaz qu'elles sont plus surchauffées, la variation de R devrait être tout autre que celle du tableau; la valeur de R doit évidemment croître continuellement avec la température, et elle *doit s'approcher de plus en plus d'une certaine valeur constante;* plus la vapeur est près de cette limite, mieux elle ressemble à un gaz permanent.

On peut essayer de déterminer cette valeur limite. D'après les remarques de la page 283, nous pouvons admettre que la densité de la vapeur fortement surchauffée est $\varepsilon = 0,622$; ce nombre se trouve au moyen de la composition chimique de la vapeur d'eau : il a été du reste déterminé expérimentalement par Gay-Lussac, et il convient aussi à la vapeur d'eau saturée sous une pression très-faible (tableau de la page 280); nous admettons, en effet, d'après M. Clausius, que la vapeur d'eau saturée se comporte comme un gaz permanent sous une faible pression.

Quand la température est assez élevée pour que la loi

$$pv = R(a + t)$$

soit admissible, on devrait avoir, d'après les indications de la page 102,

$$R = \frac{29,272}{0,622} = 47,061,$$

valeur que nous pouvons admettre provisoirement comme valeur limite. Les expériences ultérieures pourront tout au plus montrer que ce nombre est encore un peu trop faible.

On devrait donc s'attendre à ce que, dans notre tableau de la page 436, les valeurs de R s'approchassent de plus en plus du nombre 47,061, ce qui n'a pas lieu.

On peut montrer encore d'une autre manière qu'on a dû

faire pour calculer ce tableau une ou plusieurs hypothèses inadmissibles.

D'après l'équation (53), p. 98, on a trouvé pour un gaz permanent

$$\frac{v}{v_0} = \frac{p_0}{p} \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_0}.$$

Lorsque la dilatation a lieu sous une pression constante, on en déduit le coefficient de dilatation

$$\alpha = \frac{v_0 - v}{v t_0 - v_0 t}.$$

En se servant de notre tableau pour de petites variations de volume, on peut employer la dernière formule pour déterminer la variation du coefficient de dilatation de la vapeur surchauffée soumise à la pression constante de l'atmosphère.

Ainsi pour une augmentation de la température de 100 degrés à 113°,13, il y a un changement de volume de 1,6504 à 1,7197 (*voyez* le tableau); avec ces valeurs, la formule précédente donne

$$\alpha = 0,004692.$$

On trouve de la même manière pour les changements de température suivants :

De	113°,13	à	133°,35	$\alpha = 0,004178$
De	133,35	à	151,43	$\alpha = 0,003548$
De	151,43	à	161,30	$\alpha = 0,003085$

Ce calcul confirme le résultat connu, que le coefficient de dilatation des vapeurs surchauffées *diminue* quand la surchauffe augmente, et qu'il est par conséquent maximum au point de saturation. Mais les nombres écrits ci-dessus montrent une diminution qui ne peut avoir lieu en réalité; d'après la théorie des gaz la valeur de α ne peut descendre en aucun cas et pour aucune vapeur au-dessous de la valeur

$$\alpha = \frac{1}{273} = 0,003663.$$

Il résulte de tout ce que nous venons de dire que les hypothèses sur lesquelles on a basé le calcul du tableau ne sont pas admissibles. Par conséquent, ou la loi de M. Hirn n'est pas acceptable, et par conséquent on ne peut pas annuler le terme $(p_2 v - p_1 v_1)$ dans l'équation (354), ou bien les chaleurs spécifiques de la vapeur surchauffée à pression constante et à volume constant ne sont pas constantes.

Si nous voulions écarter ces deux suppositions, nous devrions écrire les deux formules (354) et (355), relatives au cycle représenté par la *fig.* 46, sous la forme suivante :

$$(360) \quad \int_{t_2}^{t} c_p\, dt = \lambda_1 - \lambda_2 + \mathrm{A}\sigma(p_1 - p_2) + \mathrm{A}(p_2 v - p_1 v_1),$$

$$(361) \quad \int_{t_3}^{t} c_v\, dt = \mathrm{J}_1 - \mathrm{J}_3.$$

Ces équations sont en tout cas exactes d'après les lois de la théorie mécanique de la chaleur; mais elles ne peuvent servir sous cette forme dans les applications, faute de données expérimentales suffisantes.

M. Hirn suppose que les chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant varient; on peut admettre la possibilité d'une variation de c_p pour la vapeur d'eau, car M. Regnault a constaté une variation pour d'autres vapeurs (celles d'acide carbonique et de sulfure de carbone); il paraît cependant résulter des expériences de M. Regnault que c_p est à peu près constant pour la vapeur d'eau, ou au moins que cette quantité varie très-lentement. Si donc on parvenait à des variations très-fortes de c_p par de nouvelles recherches basées sur la loi de Hirn, l'exactitude de cette loi serait mise en doute : c'est un sujet d'étude.

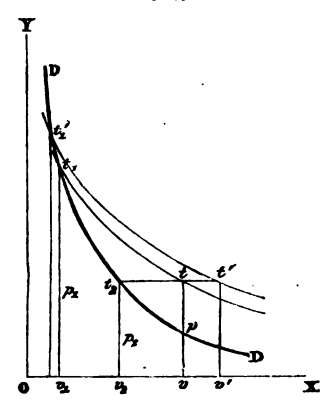
Lorsqu'on adopte la loi de Hirn, on a, au lieu de l'équation (360),

$$\int_{t_2}^{t} c_p\, dt = \lambda_1 - \lambda_2 + \mathrm{A}\sigma(p_1 - p_2).$$

Supposons que la dilatation de la vapeur surchauffée sous la

pression constante p_2 continue encore jusqu'à la température t' (*fig.* 47), et faisons passer par le point t' une nouvelle

Fig. 47.



courbe isodynamique, qui coupe la courbe limite en un point correspondant à la température t'_1; alors on a, comme dans l'équation précédente,

$$\int_{t_2}^{t'} c_p\, dt = \lambda'_1 - \lambda_2 + A\sigma(p'_1 - p_2).$$

En retranchant membre à membre ces deux équations et en supposant que l'accroissement de température $t' - t$ soit petit, et qu'on puisse regarder c_p comme constant dans cet intervalle, on a

$$(362) \qquad c_p(t' - t) = \lambda'_1 - \lambda_1 + A\sigma(p'_1 - p_1).$$

Si l'on suppose maintenant que le point t soit situé assez loin de la courbe limite pour que la vapeur suive les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, il viendra

$$p_2 v = R(a + t) \quad \text{et} \quad p_2 v' = R(a + t'),$$

ou, d'après la loi de Hirn,

$$p_1 v_1 = R(a + t) \quad \text{et} \quad p'_1 v'_1 = R(a + t').$$

En retranchant ces deux dernières équations membre à

membre, on a

$$t' - t = \frac{p'_1 v'_1 - p_1 v_1}{R}$$

ou

$$t' - t = \frac{Ap'_1 u'_1 - Ap_1 u_1 + A\sigma(p'_1 - p_1)}{AR}.$$

Lorsqu'on porte cette valeur dans l'équation (362) et lorsqu'on passe à la différentielle, on trouve

$$(363) \qquad \frac{c_p}{AR} = \frac{\frac{d\lambda_1}{dt_1} + A\sigma\frac{dp_1}{dt_1}}{\frac{d(Ap_1 u_1)}{dt_1} + A\sigma\frac{dp_1}{dt_1}}.$$

Pour être certain que la vapeur soit très-surchauffée et se comporte comme un gaz, il faut supposer la pression p_1 très-grande et la pression p_2 très-petite; lorsqu'on prend pour p_1 la valeur la plus grande de la Table X, c'est-à-dire 14 atmosphères, on peut calculer le second membre de l'équation précédente à l'aide du tableau de la page 307 et des formules empiriques données pour λ et Apu (p. 259 et 273).

J'ai trouvé pour la pression demandée

$$\frac{c_p}{AR} = 5,115.$$

Si je prends maintenant pour R la valeur limite probable 47,061, je trouve pour la vapeur d'eau fortement surchauffée

$$c_p = 0,568,$$

nombre beaucoup plus grand que celui qu'a donné M. Regnault.

Puisqu'on suppose que la vapeur prend l'état de gaz pour une surchauffe relativement peu considérable, il faudrait, d'après les calculs précédents, qu'il y eût une augmentation très-rapide et très-grande de la chaleur spécifique à pression constante; ce serait une propriété de la vapeur que M. Regnault n'eût pu ignorer.

M. Regnault trouve au moyen de quatre séries d'expé-

riences :

$$c_p = 0,46881; \quad 0,48111; \quad 0,48080; \quad 0,47963;$$

et donne seulement la première de ces valeurs comme une valeur un peu incertaine.

Je crois devoir conclure que le désaccord dont il s'agit provient de l'hypothèse de M. Hirn. La courbe isodynamique n'est pas une hyperbole équilatère, au moins s'écarte-t-elle beaucoup d'une hyperbole dans les environs du point de condensation. Cette question, qui malheureusement n'a pas encore reçu de solution définitive, a été au moins considérablement avancée par les travaux de M. Hirn. Je n'ai pu me dispenser d'en parler, parce que sa solution rigoureuse est d'une grande importance pour la mécanique appliquée, et j'ai voulu appeler l'attention sur les nouveaux essais faits dans cette voie; j'ai suivi dans mon exposition une voie différente de celle qu'ont adoptée MM. Hirn et Combes.

L'idée fondamentale de M. Hirn mérite en tout cas la plus grande attention; si l'on pouvait parvenir à bien connaître la courbe isodynamique des vapeurs, on aurait à sa disposition, en joignant à cette donnée les propositions relatives aux vapeurs saturées et aux gaz permanents, les bases nécessaires pour établir la relation qui lie la pression, le volume et la température des vapeurs surchauffées; il suffirait de suivre la voie que j'ai indiquée plus haut.

On peut représenter la courbe isodynamique par l'équation

$$pv^n = p_1 v_1^n,$$

en laissant le coefficient n encore variable pour le moment; on aurait au point de condensation sur la courbe limite DD (*fig.* 47), d'après les indications de la page 431,

$$n = \nu = 1,0456;$$

mais ce nombre se rapprocherait rapidement de l'unité à mesure que le point t dont les coordonnées sont p et v s'éloigne de la courbe limite.

On pourrait peut-être déjà arriver à une meilleure concordance avec les expériences et trouver au moins des formules empiriques applicables à la mécanique, si l'on adoptait provisoirement pour n une valeur constante comprise entre 1 et 1,0456. On prendrait aussi avec M. Regnault une chaleur spécifique constante $c_p = 0,4805$.

Supposons n connu, on trouverait pour le cas représenté dans la *fig.* 46, exactement comme on a fait (p. 434) en adoptant l'hypothèse de M. Hirn, le volume spécifique de la vapeur surchauffée avec les pressions limites p_1 et p_2 à l'aide de l'équation

$$v = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}} v_1.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (314), on aurait la surchauffe $t - t_2$ et on déterminerait d'après cela la température t de la vapeur surchauffée sous le volume v et sous la pression $p = p_2$.

Je m'abstiendrai cependant de suivre cette voie, parce que le succès est douteux, et parce qu'on fait une hypothèse incertaine en supposant que la courbe isodynamique traverse la courbe limite sans changer de nature.

C'est probablement la découverte d'une loi générale sur les actions mutuelles des particules des gaz et des vapeurs, et sur la nature de leurs mouvements d'oscillation qui conduira à une connaissance complète des vapeurs surchauffées. Il n'y a jusqu'à présent aucun lien entre les formules auxquelles conduit la théorie mécanique de la chaleur d'un côté pour les gaz permanents et d'un autre pour les mélanges de vapeur et de liquide. La découverte de ce lien et de la loi suivant laquelle se fait le passage d'un état limite à l'autre sera comprise certainement parmi les découvertes les plus importantes des sciences physiques.

ADDITION DES TRADUCTEURS.

Depuis la publication de cet Ouvrage, M. Zeuner a publié deux Mémoires sur la vapeur d'eau surchauffée (*); nous croyons devoir extraire de ces Mémoires ce qui complète le Chapitre précédent.

Admettons que la chaleur spécifique à pression constante de la vapeur d'eau c_p soit une quantité constante, au moins dans les circonstances ordinaires, ce qui est conforme aux expériences de M. Regnault, et supposons que la courbe adiabatique de la vapeur d'eau surchauffée soit comme celle des gaz représentée par la formule

$$pv^k = \text{const.},$$

M. Zeuner trouve entre la pression spécifique p, le volume spécifique v, et la température absolue T la relation

$$(\alpha) \qquad pv = \mathrm{BT} - \mathrm{C}p^{\frac{k-1}{k}};$$

quand il s'agit d'un gaz parfait, on sait que $k = c_p : c_v$; mais cela n'a plus lieu pour les vapeurs, dont la chaleur spécifique à volume constant c_v varie. On détermine la valeur de la constante B à l'aide de la formule

$$(\beta) \qquad \mathrm{B} = \frac{c_p(k-1)}{\mathrm{A}k},$$

dans laquelle A est l'équivalent calorifique de l'unité de travail, et quant à C, c'est une constante qu'il faut déterminer à l'aide des expériences; il en est de même pour la valeur de k.

D'après les expériences de M. Regnault, M. Zeuner prend $c_p = 0,4805$ pour la vapeur d'eau surchauffée, et des considé-

(*) *Theorie der überhitzten Wasserdämpfe : Journal de la Société des Ingénieurs allemands*, t. XI, 1867; — *Ueber das Verhalten der überhitzten Wasserdämpfe : Civilingenieur*, t. XIII, 1867.

rations particulières lui font adopter

$$k = \frac{4}{3},$$

et, par suite,

$$\frac{k-1}{k} = \frac{1}{4}.$$

Lorsque la pression p est exprimée en kilogrammes par mètre carré, il faut poser $C = 192,50$, et la formule (β) donne

$$B = 50,933.$$

Quand p est donné en atmosphères, il faut porter dans l'équation (α) les valeurs

$$C = 0,18781 \quad \text{et} \quad B = 0,0049287.$$

Si la formule fondamentale (α) s'applique *généralement* à la vapeur d'eau surchauffée, elle doit convenir encore à l'état limite, c'est-à-dire à la vapeur saturée. En effet, en se servant des constantes données ci-dessus et de la relation que M. Regnault a établie entre p et t, on tire de cette formule le volume spécifique v de la vapeur d'eau saturée, et les nombres qu'on obtient coïncident d'une manière remarquable avec ceux que fournissent les Tables de l'Appendice. Ces nombres concordent aussi assez bien avec ceux que M. Hirn a trouvés par l'expérience, comme le montre le tableau suivant :

PRESSION en atmosphères.	TEMPÉRATURE en degrés centigrades.	VOLUMES SPÉCIFIQUES en mètres cubes.	
		(D'après les expériences de M. Hirn.)	[D'après la formule (α)].
1	118,5	1,74	1,7417
1	141	1,85	1,8526
3	200	0,697	0,6947
4	165	0,4822	0,4733
4	200	0,522	0,5164
4	246	0,5752	0,5731
5	162,5	0,3758	0,3731
5	205	0,414	0,4150

L'exactitude de la formule fondamentale (α) est encore prouvée par la considération suivante : on déduit aisément de cette formule le coefficient de dilatation α_v de la vapeur d'eau surchauffée relatif *à un changement de volume :*

$$\alpha_v = \frac{1}{273 - \frac{C}{B} p^{\frac{k-1}{k}}},$$

et le coefficient de dilatation α_p relatif à un changement de pression :

$$\alpha_p = \frac{1}{273 - \frac{C}{Bk} p^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Les deux valeurs diffèrent l'une de l'autre, et comme $k > 1$, la dernière est toujours un peu plus petite que la première; enfin ces deux valeurs sont un peu plus grandes que

$$1 : 273 = 0,003665,$$

et croissent avec la pression. Ces résultats concordent parfaitement avec les observations de M. Regnault sur les propriétés des gaz. On aurait $C = 0$ pour un gaz parfait; alors les formules précédentes donnent $\alpha_v = \alpha_p = 0,003665$, et la formule ($\alpha$) se réduit à la forme connue $pv = BT$, qui exprime à la fois la loi de Mariotte et celle de Gay-Lussac.

Voici les résultats du calcul des dernières formules pour la vapeur d'eau surchauffée :

PRESSION en atmosphères.	COEFFICIENT DE DILATATION :	
	à pression constante α_v.	à volume constant α_p.
0,1	0,003975	0,003892
0,5	0,004150	0,004017
1	0,004257	0,004090
5	0,004629	0,004343
10	0,004872	0,004501

En partant de l'équation (α), et suivant la marche adoptée dans le texte pour les gaz permanents (p. 111 à 113), on retrouve aussi les équations générales

$$(\gamma)\quad \begin{cases} dQ = \dfrac{A}{k-1}(v\,dp + kp\,dv), \\ dQ = c_p\left(dt - \dfrac{k-1}{k}\dfrac{T}{p}dp\right), \\ dQ = c_v\left(dt + (k-1)\dfrac{T}{v}dv\right). \end{cases}$$

Ces équations sont identiques à celles qui ont été trouvées pour les gaz permanents; mais la quantité c_v est variable pour la vapeur surchauffée. On déduit de la première de ces équations la relation

$$\frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{k-1}{1 - \dfrac{C}{B}\dfrac{p^{\frac{k-1}{k}}}{T}},$$

d'après laquelle on peut calculer c_v. Lorsque la surchauffe augmente, c'est-à-dire quand la température T s'élève, le rapport $c_p : c_v$ se rapproche de la valeur constante k; la même chose arrive si la pression p diminue : on reconnaît encore de cette manière que la vapeur d'eau saturée se rapproche d'autant plus d'un gaz permanent, que sa pression est moindre.

Pour un gaz parfait $C = 0$, le rapport $c_p : c_v$ est identique a la constante k.

Les deux formules que M. Zeuner donne pour la chaleur de la vapeur J (p. 262) et la chaleur totale λ (p. 259) donnent lieu à quelques observations. La chaleur de la vapeur indique, comme on sait, la quantité de chaleur qu'un kilogramme de vapeur contient de plus qu'un kilogramme d'eau prise à zéro; on trouve ici pour sa valeur

$$(\delta)\qquad J = J_0 + \frac{1}{k-1}Apv.$$

La chaleur totale, c'est-à-dire la quantité de chaleur nécessaire pour réduire en vapeur sous une pression constante 1 kilogramme d'eau prise à zéro, est donnée par la formule

$$(\varepsilon) \qquad \lambda = J_1 + \frac{k}{k-1} Apv.$$

Dans ces deux dernières formules, qui sont susceptibles d'être transformées encore à l'aide de l'équation (α), J_1 désigne une constante dont la valeur est 476,11.

La première de ces équations exprime d'ailleurs la loi de M. Hirn (p. 429), que M. Zeuner a continué à admettre après ses nouvelles recherches.

L'équation (ε), appliquée à la vapeur d'eau saturée, donne des valeurs qui s'accordent avec celles que l'on tire de la formule bien connue de M. Regnault (p. 259); mais la formule de M. Zeuner s'applique aussi à la vapeur d'eau surchauffée.

Les équations générales (γ) permettent donc de traiter tous les problèmes relatifs à la vapeur d'eau surchauffée, comme on a traité dans cet Ouvrage les problèmes relatifs aux gaz et aux vapeurs saturées. M. Zeuner résout, dans les Mémoires cités, une série de problèmes, parmi lesquels ceux qui traitent de l'emploi de la vapeur surchauffée dans les machines à vapeur et du mélange des vapeurs ont une importance toute particulière pour la mécanique appliquée.

Nous nous contenterons d'indiquer les équations qui représentent, pour la vapeur d'eau surchauffée, les lignes adiabatiques, isodynamiques et isothermiques. M. Zeuner suppose, *à priori*, que l'équation de la courbe adiabatique (p. 127), relative à la vapeur d'eau surchauffée, coïncide avec celle des gaz; il remplace seulement la constante $k = 1,410$, qui se rapporte aux gaz, par $k = \frac{4}{3}$. Il regarde cette hypothèse comme suffisamment justifiée par l'exactitude des conséquences qu'il en déduit. Nous devons faire remarquer qu'elle s'accorde assez bien avec les récentes expériences que M. Hirn a faites en

collaboration avec l'un de nous (*). Bien que nos expériences ne nous aient pas montré la constance rigoureuse de k, les nombres qu'on en déduit pour cette quantité s'écartent assez peu de $\frac{4}{3}$ pour que la constante de M. Zeuner soit acceptable dans les applications techniques.

La formule (δ) donne immédiatement l'équation de la courbe isodynamique (p. 118), qui indique la loi suivant laquelle la pression varie avec le volume, quand le travail intérieur et, par suite, la chaleur de la vapeur J sont constants; cette équation est

$$pv = \text{const.}$$

Comme pour les gaz, c'est une hyperbole équilatère (loi de Hirn).

L'équation de la courbe isothermique, qui montre comment la pression varie avec le volume quand la température reste constante, se déduit de l'équation (α) et prend la forme

$$\text{BT} = pv - \text{C}p^{\frac{k-1}{k}} = \text{const.}$$

Cette courbe diffère donc de la courbe isothermique des gaz. A l'aide des équations (γ), on peut facilement démontrer que, si la chaleur est introduite à une température constante dans une vapeur surchauffée, *toute* cette chaleur ne se transforme pas en travail extérieur, comme dans le cas d'un gaz parfait (proposition de M. Clausius), mais qu'une partie de cette chaleur produit du travail intérieur. Cette partie a pour expression

$$\frac{c_p}{k}\frac{\text{C}}{\text{B}}\left(p_2^{\frac{k-1}{k}} - p_1^{\frac{k-1}{k}}\right),$$

dans laquelle on désigne par p_2 et p_1 les pressions initiale et finale, tandis que toute la chaleur fournie est

$$\text{Q} = c_p \cdot \frac{k-1}{k}\,\text{T}\,\text{log nép}\,\frac{p_2}{p_1}.$$

(*) *Mémoire sur la détente de la vapeur d'eau surchauffée*, par MM. Hirn et Cazin (*Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. X).

La différence de ces deux valeurs donne la chaleur qui se transforme en travail extérieur, de laquelle on déduit facilement le travail lui-même. Ces résultats sont parfaitement conformes aux notions généralement reçues sur les propriétés des vapeurs surchauffées.

Nous ferons enfin remarquer que M. Hirn s'est occupé, en même temps que M. Zeuner, de la théorie de la vapeur d'eau surchauffée. M. Hirn donne comme formule fondamentale

$$pv = \mathrm{BT} - \mathrm{C}v^{-(k-1)},$$

dans laquelle les constantes B, C et k diffèrent de celles qui entrent dans la formule de M. Zeuner.

On arrive facilement à l'équation de M. Hirn, quand on regarde comme constante la chaleur spécifique à volume constant, au lieu de la chaleur spécifique à pression constante.

M. Zeuner et M. Hirn (*) font remarquer expressément que, sans doute, leurs équations ne sont qu'approximatives. Ces deux équations doivent être considérées comme une *seconde* approximation de l'équation générale des vapeurs et des gaz, tandis que l'équation usitée $pv = \mathrm{RT}$ paraît être une première approximation.

La formule de M. Zeuner est celle qui peut donner le plus facilement la solution des problèmes que l'on a en vue; car on donne, au moins pour les usages techniques, la pression p et la température T, parce que ces valeurs se déterminent facilement et sûrement par l'observation; on cherche par le calcul le volume spécifique v. La formule de M. Zeuner donne immédiatement cette quantité, tandis qu'il faut la tirer par tâtonnements de la formule de M. Hirn.

(*) *Mémoire sur la Thermodynamique*, par M. G. A. HIRN; Paris, Gauthier-Villars, 1867.

CHAPITRE III.

THÉORIE NOUVELLE DES MACHINES A VAPEUR.

I. — *Remarques préliminaires.*

La théorie d'une machine motrice doit faire connaître l'effet que peut produire avec cette machine une force donnée, les conditions auxquelles doivent satisfaire les organes de transmission, la disposition et la marche de la machine, pour que la plus grande partie possible du travail engendré soit transmise par les organes et utilisée. Le constructeur ne demande qu'en second lieu à la théorie des formules aussi simples et aussi rigoureuses que possible, d'après lesquelles il puisse calculer les dimensions générales d'une machine nouvelle, afin qu'il soit certain que la machine produira l'effet demandé, en utilisant la plus grande partie possible du travail disponible.

Mais il demande, *en premier lieu,* à la théorie les règles et *les principes* qui doivent le guider dans la construction et la disposition du générateur de la force. Il veut savoir si le cycle d'opérations est convenable, quelles sont les meilleures manières d'utiliser le travail, quelle influence exerce sur l'effet de la machine chacune de ses parties considérée à part, quelles sont les parties qui exercent le plus d'influence, et quelles modifications il faut introduire dans la machine pour l'améliorer.

La question, posée dans ces termes généraux, se résout, quelle que soit la machine motrice, au moyen de la méthode employée dans les recherches théoriques sur les roues hydrauliques et les turbines par MM. Poncelet, Redtenbacher, Weisbach, Combes, etc., dont le nom fait autorité en mécanique appliquée.

On détermine d'abord *le travail disponible*, c'est-à-dire le travail mécanique qui est mis à notre disposition par le générateur dans l'unité de temps, et que nous cherchons à utiliser; considérant ensuite une machine d'un système donné, on détermine *le travail effectif*, c'est-à dire le travail qui est réellement transmis aux organes de la machine. Nous le désignerons par L, quand nous l'évaluerons en kilogrammètres. Pour le déterminer, on évalue les différentes pertes du travail disponible L_1, L_2, L_3, etc., qui ont lieu dans la machine, et on retranche leur somme du travail disponible L_m; on a ainsi

$$L = L_m - (L_1 + L_2 + L_3 + \ldots).$$

Divisons les deux membres de cette équation par L_m, et désignons le rapport $\frac{L}{L_m}$, qu'on appelle *le rendement* de la machine, par la lettre η, nous aurons

$$(364) \qquad \eta = 1 - \left(\frac{L_1}{L_m} + \frac{L_2}{L_m} + \frac{L_3}{L_m} + \ldots\right).$$

J'appellerai les termes $\frac{L_1}{L_m}$, $\frac{L_2}{L_m}$, ..., les *pertes d'effet*, tandis que η est l'effet produit. Plus le rendement η s'approche de l'unité, plus la machine est parfaite. La valeur de η mesure donc la perfection et la valeur du système. On peut discuter les expressions analytiques des effets perdus; elles nous indiquent les améliorations possibles, elles nous fournissent des règles de construction et nous apprennent quelles sont les pertes les plus considérables. C'est à ces dernières qu'il faut surtout s'attacher pour découvrir par la théorie des perfectionnements dans la disposition de la machine.

Cette voie, qui est la plus rationnelle, a été suivie avec succès dans la théorie des moteurs hydrauliques, et spécialement des turbines; mais on a procédé autrement pour les machines qui emploient la chaleur, telles que les machines à vapeur : c'est qu'on ne savait pas déterminer d'une manière sûre le travail disponible de ces machines. Je montrerai dans la suite que cette détermination est très-facile, quand on s'appuie sur

les principes de la théorie mécanique de la chaleur, et qu'il n'y a aucune difficulté à faire la théorie exacte d'une machine à vapeur. Je ferai voir qu'on peut calculer le rendement d'une machine à vapeur d'après la formule (364), parce qu'on peut exprimer analytiquement les divers effets perdus, au moins ceux qui exercent sur le rendement la plus grande influence.

Le résultat principal de toutes les théories de la machine à vapeur consistait jusqu'ici dans une équation relative au travail *effectif* L de la machine, qu'on utilisait, soit pour le calcul des dimensions des machines nouvelles à construire, soit pour apprécier l'influence de diverses circonstances sur la valeur du travail L.

On n'avait pas déterminé le rendement tel que nous l'avons défini, parce qu'on ne possédait pas de formule pour calculer le travail disponible, c'est-à-dire celui que la vapeur tient réellement à notre disposition, et qu'on pourrait utiliser si la machine était parfaite, s'il n'y avait aucune espèce de perte. C'est pour cela qu'on ne pouvait comparer les machines à vapeur aux autres machines et qu'on ne pouvait même pas reconnaître, si la manière usitée d'utiliser la vapeur était conforme aux principes théoriques.

On a quelquefois calculé le rendement d'une machine à vapeur, en divisant le travail de la machine, déterminé au moyen du frein ou de l'indicateur, par la *valeur calculée* L du travail effectif; mais le résultat obtenu n'a aucune signification et ne peut en aucun cas servir à apprécier la valeur de la machine. En outre, comme nous l'avons déjà dit plusieurs fois, on a établi l'expression du travail effectif L, et notamment pendant la détente de la vapeur, en se servant d'hypothèses que la théorie mécanique de la chaleur rejette comme inadmissibles. Il est donc indispensable d'appliquer les principes exposés plus haut à l'étude de la plus importante de toutes nos machines, et d'établir une théorie des machines à vapeur qui satisfasse à la fois aux exigences de la nouvelle théorie de la chaleur et à celles de la mécanique appliquée. L'exposé suivant n'est cependant pas le premier essai qu'on ait fait pour

appliquer les propositions de la théorie mécanique de la chaleur; mais les auteurs qui ont fait des essais de ce genre ont procédé d'une autre manière. C'est M. Clausius (*) qui a traité cette question avec le plus de détails; mais il se contente d'établir une formule générale pour le travail effectif L; il compare les résulats de cette formule avec ceux des formules de M. de Pambour, et il en conclut les propriétés que possède la vapeur dans le cylindre. M. Clausius ne s'occupe pas du travail disponible des machines à vapeur, ni des *pertes d'effet* que j'ai définies; il étudie la machine à vapeur plutôt au point de vue de la physique qu'au point de vue de la mécanique appliquée; ses formules sont d'ailleurs tellement compliquées, qu'elles ne doivent guère servir pour apprécier la valeur d'une machine déjà construite et qu'elles sont encore moins propres au calcul d'une machine à construire.

J'irai dans ce Chapitre aussi loin que le but de ce livre me le permet; mais je ne puis pas épuiser la question; je dois me contenter de traiter les questions principales et d'effleurer seulement les questions secondaires, surtout celles qui concernent la détermination de certaines constantes à l'aide d'expériences qui ont été faites ou qui sont encore à faire.

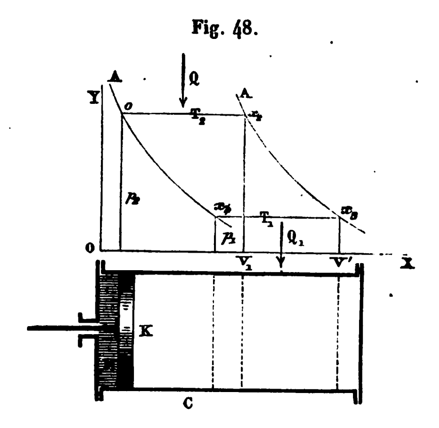
II. — *Du travail disponible dans les machines à vapeur.*

Pour établir la formule qui doit servir à calculer le travail disponible d'une machine à vapeur, on peut prendre trois points de départ différents, et on obtient trois formules différentes que je développerai successivement, afin de démontrer qu'une seule de ces formules peut être recommandée pour la mécanique appliquée, tandis que les deux autres doivent être rejetées par cette branche de la science pour des raisons que nous donnerons dans la suite; une de ces deux dernières formules est nouvelle, tandis que l'autre a déjà été proposée pour la même objet par Clapeyron.

(*) Clausius, Mémoire V : *Sur l'application de la théorie mécanique de la chaleur à la machine à vapeur.*

Première expression du travail disponible. — L'établissement de cette première formule nous conduit en même temps

Fig. 48.



aux dispositions que doit avoir une machine à vapeur théoriquement parfaite; la comparaison faite entre cette machine et les machines à vapeur telles qu'on les construit en réalité, nous apprendra si nous avons réellement utilisé conformément aux principes le travail que la vapeur met à notre disposition.

Soit C le cylindre de la machine à vapeur dans lequel se meut un piston K; supposons qu'il y ait à gauche du piston au moment où il est à la fin de sa course M kilogrammes d'eau (*) à la température t_2 ou à la température absolue T_2; pour empêcher la formation de la vapeur nous supposons que le piston supporte de l'autre côté une pression p_2 par unité de surface, qui soit égale à la tension maxima de la vapeur pour la température t_2.

Imaginons le cycle suivant :

1° On envoie du dehors de la chaleur à l'eau, et le piston recule sous la pression constante p_2. Dans cette opération, la

(*) Les équations que nous allons développer sont applicables à un liquide quelconque accompagné de sa vapeur, mais nous parlerons de l'eau en général, comme on fait dans l'hydrodynamique. Il faut, bien entendu, quand on s'occupe d'un cas spécial, mettre dans les formules les nombres qui correspondent au liquide en question et à sa vapeur.

température T_2 reste constante comme on sait, parce que l'eau passe à l'état de vapeur sous une pression constante. Si le volume est devenu V_1, la quantité spécifique de la vapeur étant x_2, il s'est formé Mx_2 kilogrammes de vapeur et le reste de la masse $M(1 - x_2)^{kil}$ est à l'état liquide. La quantité de chaleur qu'il a fallu fournir étant désignée par Q, on a d'après les formules déjà données

$$(365) \qquad Q = M r_2 x_2.$$

2° Faisons passer maintenant par les points o et x_2 (*fig.* 48) deux courbes adiabatiques A, A, et faisons dilater le mélange sans addition ni soustraction de chaleur jusqu'à ce que le volume soit devenu V' et que la pression ait diminué jusqu'à p_1; la quantité spécifique de la vapeur x_3 à la fin de la dilatation se tirera, d'après l'équation (243), p. 313, de la relation

$$(366) \qquad \frac{r_1 x_3}{T_1} + \tau_1 = \frac{r_2 x_2}{T_2} + \tau_2.$$

3° Comprimons maintenant la masse sous une pression constante p_1 jusqu'à ce que la courbe des pressions, qui est ici une ligne droite parallèle à l'axe des abscisses, coupe en x_4 la courbe adiabatique du point o. En désignant par x_4 la quantité spécifique de la vapeur qui correspond à cette période, on a aussi pour cette courbe adiabatique la relation

$$(367) \qquad \frac{r_1 x_4}{T_1} + \tau_1 = \tau_2,$$

puisque la quantité spécifique de la vapeur est nulle au point o.

Pendant la compression la température T_1 est restée constante; la quantité de chaleur Q_1 qu'il a fallu soustraire dans cette opération est donc

$$Q_1 = M r_1 (x_3 - x_4),$$

et si l'on remplace dans le second membre de cette formule $r_1(r_3 - x_4)$ par sa valeur tirée des équations (366) et (367), il

vient

$$Q_1 = M r_2 x_2 \frac{T_1}{T_2}. \tag{368}$$

4° Comprimons enfin le mélange suivant la courbe adiabatique $x_4 o A$ jusqu'à ce que nous soyons revenu à l'état initial, c'est-à-dire jusqu'à ce que toute la vapeur se soit réduite en eau à la température T_2 sous la pression p_2; le cycle est alors achevé et peut être recommencé de la même manière.

Le travail L gagné dans cette opération est représenté par la surface $o x_2 x_3 x_4$ (*fig.* 48), dont le contour est précisément la courbe tracée pour cette machine à vapeur par l'indicateur de Watt. Comme la quantité de chaleur Q a été introduite, tandis que la quantité de chaleur Q_1 a été soustraite, $Q - Q_1$ est la chaleur disparue, et, d'après les principes de la théorie mécanique de la chaleur, on a entre cette dernière quantité et le travail gagné la relation

$$AL = Q - Q_1.$$

En vertu des équations (365) et (368), il vient

$$L = \frac{M x_2 r_2}{A T_2} (T_2 - T_1), \tag{369}$$

ou encore

$$L = \frac{Q}{A T_2} (T_2 - T_1), \tag{370}$$

cette dernière est identique à l'équation générale trouvée déjà page 223 pour le travail disponible des machines thermiques; les développements donnés pages 231 et suivantes s'appliquent donc à l'équation (370).

Supposons que la pression p_2 à laquelle correspond la température T_2 soit la plus forte que comportent les dimensions de la machine et que la pression p_1 correspondant à la température T_1 soit la plus faible qu'on puisse atteindre dans la troisième période pendant le refroidissement; alors L représente, d'après l'équation (370), *le maximum de travail qu'il est possible de gagner avec cette machine,* puisque la vapori-

sation s'est effectuée sous la pression constante p_2. En effet, si p_2 et p_1 sont la plus forte et la plus faible pression qui puissent être atteintes dans le cycle que nous venons de décrire d'après les dispositions de la machine et d'après le mode de refroidissement, il faut que la vaporisation se fasse suivant le trajet ox_2 (*fig.* 48) sous la pression *constante* la plus élevée p_2 (à la température constante T_2) et que la compression s'effectue suivant le trajet $x_3 x_4$ sous la pression *constante* p_1 (à la température constante T_1). Si la pression était à un certain instant plus petite que p_2 pendant la vaporisation et plus grande que p_1 pendant la compression, le travail serait moindre, comme on le reconnaît facilement. J'ai déjà démontré ce fait dans l'étude des machines thermiques; nous avons trouvé à cette occasion que les courbes ox_2 et $x_3 x_4$ (*fig.* 48) doivent être des courbes isothermiques, pour que le travail soit maximum : c'est ce qui a lieu ici, puisque, pour les mélanges de vapeur et de liquide, les courbes d'égale pression et celles d'égale température sont identiques.

Il résulte de ce qui précède que le système de machine que nous venons d'examiner réalise une machine *parfaite*, et qu'au point de vue théorique, il n'y aurait rien à critiquer dans nos machines à vapeur, si la vapeur parcourait réellement le cycle que nous avons décrit. Cela n'a cependant pas lieu : le cycle d'une machine à vapeur réelle est, comme on le verra plus tard, un peu différent du cycle précédent; ce n'est donc pas un cycle parfait, et il résulte de là que nous ne pouvons pas, même en faisant abstraction des résistances nuisibles, *gagner* le maximum de travail qu'une quantité de chaleur Q mise à notre disposition serait capable de fournir. Mais une machine à vapeur est d'autant meilleure que son travail se rapproche davantage de ce travail maximum; je considère donc le travail L donné par l'équation (370) comme le travail disponible d'une machine à vapeur, en comparant le travail de la machine réelle à celui de la machine parfaite, qui exige la même quantité de chaleur dans le même temps et qui accomplit son cycle entre les mêmes pressions limites p_2 et p_1, ou, ce qui est la même chose, entre les mêmes températures limites T_2 et T_1.

La différence de température $T_2 - T_1$ est pour cette machine la chute (de température) disponible et $\frac{Q}{AT_2}$ est le poids thermique qui est à notre disposition à la hauteur T_2, et que l'on fait descendre en lui faisant produire du travail de la hauteur de chute $T_2 - T_1$.

Le cycle d'une machine à vapeur réelle n'est pas parfait, parce que nous ne pouvons pas (et nous ne pourrons jamais y parvenir) exécuter dans le même espace, c'est-à-dire dans le cylindre à vapeur les quatre périodes du cycle décrit sur la *fig.* 48. Dans l'opération que nous effectuons réellement, nous sommes obligés de faire passer le corps intermédiaire, c'est-à-dire le mélange de vapeur et de liquide, d'un espace dans un autre. Dans l'un d'eux, la chaudière à vapeur, on introduit la chaleur; de là on conduit le mélange dans le cylindre où il se répand sous une pression constante et se dilate ensuite; la soustraction de chaleur a lieu dans le condenseur, si nous ne considérons d'abord que la machine à condensation, et la dernière période, celle de la compression suivant la courbe adiabatique jusqu'au moment où le mélange est réduit entièrement en eau, manque tout à fait dans nos machines; elle est remplacée par une autre opération. C'est en cela que consiste l'imperfection du cycle de nos machines à vapeur; nous donnerons plus tard de plus amples détails sur cette question.

Les machines à vapeur deviennent plus volumineuses qu'une machine parfaite, parce que nous ne pouvons pas effectuer toute l'opération dans le même espace (*). La machine à vapeur a ce défaut, comme les machines à air dilaté. Dans les machines à air chaud les diverses opérations du cycle ne peuvent pas avoir lieu dans le même espace; nous sommes obligés de chauffer et de refroidir, de dilater et comprimer l'air dans *différents espaces;* voilà pourquoi ces machines occupent

(*) La première machine à vapeur que construisit Papin était, chose singulière, une machine parfaite d'après son principe; car Papin avait l'intention d'effectuer les diverses opérations du cycle dans le même espace, le cylindre à vapeur.

un espace relativement considérable. Sous ce point de vue, elles ne sont cependant pas aussi inférieures aux machines à vapeur qu'on le pense généralement, parce que dans la comparaison avec la machine à vapeur on ne considère pas *la chaudière;* mais pour être exact, il faut considérer tout l'espace qu'occupe l'installation de la chaudière.

C'est la formule (370) que j'emploierai désormais pour calculer le travail disponible d'une machine à vapeur; si l'on prend la seconde pour unité de temps, Q est la quantité de chaleur qu'il faut introduire dans la chaudière dans une seconde; T_2 est la plus haute température (absolue) qu'on rencontre dans l'opération, *celle de la vapeur dans la chaudière;* T_1 est la plus basse température, celle du condenseur, quand la machine est à condensation, sinon T_1 est la température de la vapeur saturée sous la pression d'une atmosphère; pour la vapeur d'eau, on a $t_2 = 100°$ et $T_2 = 373°$. Nous pouvons considérer une machine à vapeur sans condensation comme une machine à condensation pour laquelle la température est 100 degrés et la pression une atmosphère dans le condenseur. Bien que cela paraisse évident, nous l'expliquerons néanmoins plus tard. (Il est question de machines qui travaillent avec de la vapeur d'eau.)

Lorsque les quantités Q, T_2 et T_1 sont données, on peut calculer facilement, d'après l'équation (370), le travail disponible L de la machine à vapeur en question. Les températures T_2 et T_1 sont données le plus souvent directement; il n'en est pas de même de la quantité de chaleur Q; il faut la déterminer à part pour la machine réelle. Sa valeur pour une machine parfaite est, d'après l'équation (365), $Q = Mx_2 r_2$; pour une machine ordinaire, nous trouverons dans la suite pour Q une expression également très-simple. Nous aurons toujours une valeur *plus grande* que celle qui correspondrait dans les mêmes circonstances à une machine parfaite.

Supposons d'abord qu'il soit possible de construire une machine à vapeur parfaite, et demandons-nous quelles quantités de vapeur et de chaleur correspondraient à des effets donnés.

Dans l'équation (369) Mx_2 représente le poids de la vapeur

pendant la première période du cycle; lorsque L donne le travail en kilogrammètres par seconde, Mx_2 exprime aussi la quantité de vapeur qui doit être produite dans une seconde. En désignant cette quantité par D, on a

$$L = \frac{D r_2}{AT_2}(T_2 - T_1).$$

Désignons le travail en chevaux-vapeur par N, et par D_h la quantité de vapeur produite dans une heure; on a alors en mesures françaises

$$N = \frac{L}{75} \quad \text{et} \quad D_h = 3600\,D.$$

Portons les valeurs de L et de D tirées de ces équations dans l'équation précédente, et faisons $A = \frac{1}{424}$; nous aurons

$$\frac{N}{D_h} = 0,001570\,\frac{r_2}{T_2}(T_2 - T_1),$$

et en renversant le rapport

(371) $$\frac{D_h}{N} = \frac{636,792}{\frac{r_2}{T_2}(T_2 - T_2)}.$$

En posant encore $D_h = 100^{\text{kil}}$ dans l'avant-dernière équation, on a

(372) $$N = 0,157037\,\frac{r_2}{T_2}(T_2 - T_1).$$

La formule (371) donne la quantité de vapeur, exprimée en kilogrammes, que dépense par heure et par cheval une machine parfaite qui emploie la vapeur d'eau saturée; dans la pratique, on estime souvent le degré de perfection d'une machine d'après cette quantité.

La formule (372) donne le travail d'une machine parfaite qui produit dans une heure 100 kilogrammes de vapeur.

On voit de suite avec quelle facilité on peut calculer ces deux quantités pour une machine parfaite : il suffit de connaître la température t_2 de la chaudière et la température t_1

du condenseur, et ces quantités se trouvent dans la Table X, quand on donne les pressions p_2 et p_1 qui leur correspondent. La même Table peut servir à calculer la chaleur de vaporisation r_2, au moyen de la formule

$$r_2 = \rho_2 + A p_2 u_2.$$

C'est à l'aide de ces deux formules que j'ai calculé les deux tableaux qui suivent. Pour les machines à condensation, j'ai pris la pression du condenseur $p_1 = \frac{1}{10}$ d'atmosphère, et par suite $t_1 = 46,21$; alors $T_1 = 319,21$; pour les machines sans condensation $p_1 = 1$ atmosphère : par suite, $t_1 = 100°$, et $T_1 = 373$.

Quantité de vapeur exprimée en kilogrammes, que produit par heure et par cheval une machine à vapeur parfaite.

TENSION de la vapeur en atmosphères.	MACHINES	
	avec condensation.	sans condensation.
$1\frac{1}{2}$	7,078	33,143
3	5,767	14,914
4	5,375	11,947
5	5,117	10,387
6	4,929	9,406
8	4,670	8,217
10	4,496	7,507

Ce tableau donne les valeurs minima des quantités de vapeur dont nous devons nous rapprocher le plus possible dans la réalité. Remarquons d'abord les différences qui existent entre la machine avec condensation et les machines sans condensation. Les nombres relatifs à ces deux systèmes diffèrent d'autant moins que la tension de la vapeur est plus elevée, et diminuent dans les deux systèmes quand la pression de la chaudière augmente.

On conclut aussi de ce tableau que la condensation est tout au plus à recommander pour les machines à pression moyenne, mais qu'elle ne l'est pas pour les pressions de 6, 8 et 10 atmosphères; la quantité de vapeur par cheval est, il est vrai, moindre pour les machines avec condensation que pour les autres, mais la différence est petite; et comme on ne peut pas pousser la dilatation de la vapeur aussi loin qu'on l'a supposé ici (de 6, 8, 10 atmosphères à $\frac{1}{10}$), les nombres qui conviennent aux machines réelles se rapprochent beaucoup dans les deux systèmes.

Dans les machines *sans* condensation, les fortes pressions sont préférables d'après le tableau, et il paraît même qu'on aurait avantage à dépasser la limite de 10 atmosphères; on l'a déjà fait pour des locomotives.

Les nombres des tableaux sont bien inférieurs à ceux que l'on adopte dans la pratique.

Pour des machines *avec* condensation, on compte ordinairement, pour une basse pression, 34 kilogrammes de vapeur par cheval; pour une pression moyennne, 30 kilogrammes, et pour une haute pression sans condensation, 30 kilogrammes encore. La comparaison de ces nombres avec ceux du tableau indiquerait la grande infériorité des machines que l'on construit; aussi cette comparaison n'est-elle pas admissible. Les derniers nombres doivent représenter des valeurs maxima et supposent expressément que la machine travaille avec le minimum de dilatation; on ne les donne pas pour juger la machine, mais pour servir de base au calcul de la chaudière et des appareils d'alimentation et de condensation; on construit ces appareils avec des dimensions telles que la machine puisse, dans certaines circonstances, produire un travail bien plus grand que celui qu'on exige d'elle dans des circonstances normales.

Les nombres qu'ont fait connaître les expériences faites sur des machines travaillant dans de bonnes conditions se rapprochent bien plus des nombre de notre tableau, et le rapport de ces nombres donne immédiatement le rendement.

Travail effectué par une machine à vapeur parfaite, exprimé en chevaux-vapeur pour une production de 100 *kilogrammes de vapeur par heure.*

TENSION de la vapeur en atmosphères.	MACHINES avec condensation.	MACHINES sans condensation.
$1\frac{1}{2}$	14,127	2,531
3	17,341	6,705
4	18,601	8,369
5	19,543	9,627
6	20,288	10,631
8	21,414	12,169
10	22,241	13,320

Comme les nombres de ce tableau se tirent simplement de l'équation (372), et que leurs rapports sont inverses de ceux du tableau précédent, ils ne donnent pas lieu à de nouvelles remarques.

Mais nous avons à examiner une seconde forme de l'équation (370). En effet, dans cette équation, rapportons Q et L à la seconde de temps, et appelons Q_h la quantité de chaleur exprimée en calories qu'il faut fournir par heure à la machine; introduisons encore le travail disponible évalué en chevaux-vapeur en posant $L = 75\,N$ et $Q = \frac{Q_h}{3600}$, nous aurons alors

$$(373) \qquad \frac{Q_h}{N} = \frac{636{,}792\,T_2}{T_2 - T_1}.$$

Cette équation *donne la quantité de chaleur qu'il faut fournir par heure et par cheval de travail disponible*. Le tableau qui suit a été calculé avec les mêmes hypothèses que le tableau précédent.

Quantité de chaleur nécessaire par heure et par cheval de travail disponible.

TENSION de la vapeur en atmosphères.	MACHINES avec condensation.	MACHINES sans condensation.
$1\frac{1}{2}$	3738,4	17505,2
3	2954,7	7641,2
4	2715,0	6034,5
5	2554,3	5185,0
6	2435,5	4647,7
8	2268,3	3991,1
10	2152,6	3594,2

Les nombres de ce tableau représentent encore des valeurs minima. Ils sont inférieurs à ceux qui mesurent la chaleur qu'exigent les machines réelles.

Si l'on considère une machine à vapeur parfaite, la quantité de chaleur qu'il faut soustraire par heure et par cheval se tire des équations (365) et (368), p. 456. En opérant la même transformation que précédemment, on trouve pour cette quantité

$$\frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{Q_h}{N}.$$

Remarquons que les valeurs du dernier tableau ne dépendent pas de l'espèce de vapeur; on peut employer indifféremment des vapeurs d'eau ou d'éther, ou toutes les deux à la fois; ces valeurs sont également applicables à des machines à air chaud. (*Voyez* p. 209.)

Les exemples précédents, ainsi que l'équation (370), montrent que le travail L, qui correspond à la quantité de chaleur Q, dans un cycle parfait, ne dépend que des températures limites; j'en conclus que, d'après la théorie, les machines à vapeur d'éther de M. Du Tremblay ne peuvent donner de

meilleurs résultats que les machines ordinaires à vapeur d'eau. M. Du Tremblay réunit deux machines, dont l'une travaille avec de la vapeur d'eau, l'autre avec de la vapeur d'éther. Admettons que les deux machines exécutent des cycles parfaits, et qu'on enlève à la vapeur d'eau de la chaleur au moyen d'éther liquide, qui s'évapore dans cette opération, et qui, à la fin, est condensé de nouveau à la température T_1; rien n'est changé, par cette disposition, dans la formule (273). T_2 est la température à laquelle la vapeur d'eau est produite, et T_1 est celle à laquelle la condensation de l'éther a lieu. La valeur de T_2 ne peut pas être plus élevée dans cette machine combinée que dans une machine ordinaire à vapeur d'eau, et la température T_1 ne peut pas non plus descendre plus bas. L'intervalle de température est le même, et le travail disponible correspondant à une quantité de chaleur déterminée Q ne peut être différent dans les deux machines. Mais la comparaison des dimensions de machines qui travaillent avec diverses vapeurs est une autre question à laquelle je reviendrai.

L'équation fondamentale (370) nous apprend que, dans une machine à vapeur parfaite, le travail correspondant à une certaine quantité de chaleur ne dépend que de l'intervalle des températures $T_2 - T_1$, c'est-à-dire de la chute de température, et dans cette équation $\frac{Q}{AT_2}$ représente le poids thermique que nous avons à utiliser avec la hauteur de chute $T_2 - T_1$.

Revenons un instant à la comparaison que j'ai donnée p. 232; on peut considérer $\frac{Q}{AT_2}$ comme le poids d'un liquide placé au niveau T_2, qu'on peut faire descendre au niveau T_1, en lui faisant produire un travail. Lorsqu'on fait construire une turbine, on indique la quantité d'eau et la hauteur de chute dont on dispose. De même, si l'on veut une machine à vapeur, on indique la pression dans la chaudière, et par suite la position du niveau supérieur, c'est-à-dire la température T_2, en demandant une machine à vapeur à basse, à moyenne ou à haute pression; on donne ensuite la position du niveau inférieur, c'est-à-dire la température T_1, quand on demande une ma-

chine avec ou sans condensation ; enfin, en fixant la quantité de combustible qu'on doit consommer dans l'unité de temps, on donne la quantité de chaleur Q qui doit entrer dans la chaudière, ce qui fait connaître indirectement le poids thermique.

Le problème que le constructeur doit résoudre consiste à construire la machine, de telle sorte qu'elle utilise le plus complétement possible le travail qui correspond au poids thermique et à la hauteur de chute de température qui sont donnés. Rien n'est changé dans notre comparaison, si la pression varie souvent dans nos chaudières entre des limites étendues, et si la quantité de chaleur qui entre dans la chaudière est soumise à certaines variations, à cause de la conduite du feu. Seule la température T_1 varie peu dans les différentes machines ; elle est surtout déterminée par la condition que la machine soit avec ou sans condensation.

Ce problème est donc analogue à celui que résout le constructeur d'une turbine, lorsqu'il a une quantité d'eau variable, un niveau d'eau supérieur variable, et enfin un niveau d'eau inférieur à peu près constant.

Deuxième expression du travail disponible. — La formule (370), qui donne le travail maximum correspondant à la quantité de chaleur Q, montre que l'on doit rendre la différence de température $T_2 - T_1$ aussi grande que possible, par suite augmenter la valeur de T_2 et diminuer celle de T_1 le plus qu'on peut.

Pour ce qui concerne la température T_1, nous sommes astreints à des limites déterminées; il en est autrement de T_2, qui représente la température de la vapeur dans la chaudière. Il faudrait prendre pour cette quantité une valeur aussi élevée que possible, et par conséquent, comme Carnot et Clapeyron l'ont établi les premiers, avoir dans la chaudière *une température aussi voisine que possible de celle du foyer.* Appelons cette dernière température T'', nous aurons alors, pour le travail maximum correspondant à la quantite de chaleur Q,

$$(374) \qquad L = \frac{Q}{AT''}(T'' - T_1).$$

En prenant 1000 degrés pour la température du foyer, on aurait $T'' = 1273°$. Cette formule donnera alors, pour la même quantité de chaleur Q, un plus grand travail disponible que la formule donnée plus haut, dans laquelle on avait, à la place de T'', la température T_1 de la vapeur contenue dans la chaudière. Laquelle des deux formules faut-il adopter?

Quelques auteurs paraissent considérer la valeur que donne la formule précédente comme le maximum absolu du travail de la machine à vapeur, ou, pour me servir d'une expression pratique, comme le travail disponible. Ainsi M. Clausius (*Mémoire V*, p. 187) compare, par exemple, la valeur qu'on obtient en prenant $T'' = 1000 + 273$, et $T_1 = 50 + 273$ aux valeurs qu'on obtient en prenant pour T'' les températures usitées de la vapeur. Il conclut de là *que les machines à vapeur ordinaires présentent une imperfection inhérente à leur nature même.*

Je ne partage pas cette manière de voir, si elle est fondée seulement sur les résultats auxquels conduit la formule précédente, et, à mon avis, cette formule ne peut pas servir pour juger les machines à vapeur, parce qu'en l'employant on fait tacitement une hypothèse irréalisable.

L'équation (374) suppose que la température dans la chaudière soit la même que celle du foyer; avec la seule température moyenne de 1000 degrés, nous serions conduits à une pression énorme de la vapeur, à laquelle aucune chaudière ne résisterait : nous supposons, bien entendu, que la chaudière contienne un mélange de vapeur et de liquide; mais, en faisant même abstraction de ce fait, et en admettant la possibilité d'une pareille température dans la chaudière, il faut encore avoir égard à une autre circonstance. La formule suppose que la source de chaleur, c'est-à-dire le corps qui fournit la chaleur à la chaudière, possède la même température T'' tant qu'il est en contact avec le corps auquel il doit fournir la chaleur, c'est-à-dire avec la chaudière, ou, plus exactement, elle exige que la source de chaleur ait une température infiniment peu supérieure à T''.

Mais cela n'a nullement lieu ici. Ce sont les gaz de la com-

bustion qui constituent le corps fournissant la chaleur à la chaudière, et les choses se passent en réalité de la manière suivante : l'air atmosphérique qui passe à travers la grille prend la chaleur qui devient libre dans la combustion; une partie se combine avec le combustible, avec dégagement de chaleur, puis le mélange des gaz se refroidit en cédant la plus grande partie de leur chaleur à la chaudière; quand ils la quittent pour passer dans la cheminée, leur température est considérablement diminuée. Nous avons donc une source de chaleur qui subit de fortes variations de température; il faut tenir compte de cette circonstance. Si nous faisons usage de la formule (374), nous adoptons tacitement l'hypothèse inadmissible que les gaz de la combustion ne subissent pas de changements de température tant qu'ils sont en contact avec les parois de la chaudière, et cela ne pourrait évidemment arriver que si le poids des gaz qui passent dans l'unité de temps à travers les carneaux, et, par suite aussi, la quantité de combustible qui brûle sur la grille *étaient infiniment grands.*

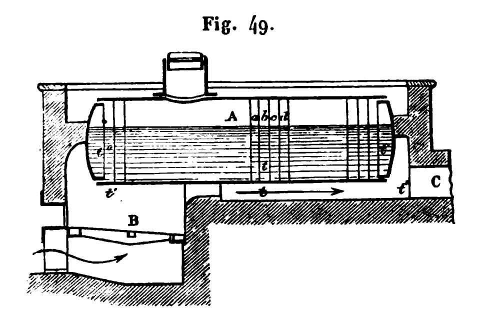
Je conclus de là que l'équation (374) n'a aucune valeur, au moins pour la question que nous traitons; elle doit être rejetée pour l'appréciation technique des machines à vapeur.

Troisième expression du travail disponible. — Dans les recherches que nous avons faites jusqu'ici lorsqu'il était question de fournir ou de soustraire de la chaleur à un corps, nous ne considérions que les changements d'état de *ce dernier*; mais le phénomène de l'échauffement ou du refroidissement consiste toujours dans l'action réciproque de deux corps au moins, dont l'un reçoit la chaleur et dont l'autre la cède. Pour étudier plus exactement ce phénomène, il faut donc, en général, observer aussi les changements d'état du deuxième corps, que nous avons jusqu'ici considéré simplement comme source de chaleur, mais auquel nous avons néanmoins attribué tacitement certaines propriétés. En disant, par exemple, qu'un corps recevait de la chaleur et se dilatait à une température constante, nous nous faisions tacitement une certaine

idée de la nature de la source, c'est-à-dire du corps qui fournissait cette chaleur; nous lui supposions la propriété de céder la chaleur au premier corps simplement par contact, et de maintenir sa température constante, sans changer lui-même de température. Mais cela n'est possible que si le corps qui joue le rôle de source est infiniment grand par rapport à celui qui reçoit la chaleur. Dans la réalité, les choses se passent donc d'une autre manière, et la production de la vapeur dans les chaudières présente un cas particulier, que nous examinerons spécialement ici.

Considérons une chaudière à vapeur A (*fig.* 49). Les gaz qui ont dans le foyer B la température la plus haute t'' passent

Fig. 49.



près des parois de la chaudière et lui cèdent dans leur trajet une grande partie de leur chaleur. Ils quittent les parois avec une température t' bien inférieure à t'', et se rendent dans la cheminée en traversant le conduit C. Dans la chaudière même, la température t_1 est plus basse encore, et elle peut être considérée comme constante dans toute l'étendue de la chaudière: c'est la température qui correspond à la pression p_1 de la vapeur. Nous nous trouvons, par conséquent, dans le cas où le corps qui reçoit la chaleur se maintient à une température constante, tandis que la source de chaleur subit de grandes variations de température. La chaleur ou, mieux, le poids thermique tombe d'une température élevée à une température plus basse. Nous devons évidemment considérer cette espèce de transport de chaleur comme inutile, s'il s'agit de transformer la chaleur en travail. Si nous voulons attribuer cette

imperfection à la machine elle-même, il faut calculer son travail disponible au moyen d'une autre formule, que je vais établir.

Les gaz ne peuvent céder de la chaleur qu'en subissant un refroidissement de t'' à t'; pour qu'il y eût une utilisation complète de la chaleur, la température de l'eau de la chaudière devrait varier et être égale en chaque point à celle que possèdent les gaz qui passent au même point. Cela n'est pas possible avec les dispositions ordinaires, mais on peut partir du cas limite suivant : j'imagine toute l'étendue de la chaudière partagée en un nombre infiniment grand de compartiments $a, b, c, d, \ldots$ (*fig.* 49), et je considère chaque compartiment comme une chaudière à vapeur indépendante alimentant une machine parfaite spéciale. La température est différente dans les divers compartiments; mais elle est toujours dans chacun d'eux égale à celle que possèdent les gaz en contact. Soient t la température du compartiment b, T la température absolue, dQ la quantité de chaleur qui y entre en une seconde; le travail maximum, pour un cycle complet, est donné par la formule

$$dL = \frac{dQ}{AT}(T - T_1),$$

pourvu que T_1 soit la température limite inférieure, laquelle est la même pour tous les compartiments. L'équation précédente peut encore s'écrire

$$dL = \frac{dQ}{A} - T_1\frac{dQ}{AT}.$$

Soient G le poids des gaz du foyer qui passent en une seconde auprès du compartiment b, et c leur chaleur spécifique à pression constante; la quantité de chaleur que les gaz cèdent aux compartiments sera

$$(375)\qquad dQ = -cGdT.$$

Nous pouvons évidemment considérer la pression comme constante dans tout le foyer, et désigner par dt ou dT l'abais-

sement de température des gaz occasionné par leur passage auprès du compartiment *b*. En portant cette valeur de dQ dans la dernière expression de dL, on a

$$(376) \qquad dL = \frac{dQ}{A} + \frac{cGT_1}{A}\frac{dT}{T}.$$

On trouve, en intégrant l'équation (375) et se servant des notations définies plus haut,

$$(377) \qquad Q = cG(T'' - T').$$

Telle est la quantité de chaleur que les gaz fournissent par seconde à l'ensemble des compartiments, abstraction faite des pertes de chaleur occasionnées par les parois du foyer.

L'intégration de l'équation (376) donne, d'un autre côté,

$$L = \frac{Q}{A} - \frac{cGT_1}{A}\,\text{lognép}\,\frac{T''}{T'},$$

et il vient par l'élimination de la quantité cG, entre cette dernière équation et l'équation (377),

$$(378) \qquad L = \frac{Q}{A}\left(1 - \frac{T_1}{T'' - T'}\,\text{lognép}\,\frac{T''}{T'}\right).$$

Je donne cette formule comme une nouvelle équation pouvant servir à calculer le travail disponible des machines à vapeur; elle suppose expressément qu'on tienne compte de la perte de travail, qui tient au mode de production de la vapeur. D'un autre côté, cette perte ne peut pas non plus être considérée comme une perte proprement dite, puisqu'il est évidemment impossible de réaliser l'opération qui vient d'être imaginée, même en faisant abstraction des conditions de température et de pression.

Prenons, par exemple, la température dans le foyer $t'' = 1000°$, par suite $T'' = 1273°$, la température des gaz à la sortie $t' = 300$, et, par suite, $T' = 573°$, et supposons, comme cela a été fait pour l'établissement de l'équation (378), que la limite inférieure de la température soit égale pour tous les cycles qui correspondent aux différents compartiments; cette tempéra-

ture sera, pour une machine avec condensation, comme ci-dessous, $t_1 = 46^\circ,21$, et, pour une machine sans condensation, $t_1 = 100^\circ$; alors l'équation (378) donnera, pour le travail disponible respectivement,

$$L = 253,073\,Q \quad \text{ou} \quad L = 224,270\,Q.$$

La quantité de chaleur qu'il faut fournir à la machine, par heure et par cheval (de travail disponible), se déterminera de la même manière qu'à la page 461; il sera

$$\frac{Q_h}{N} = 1066,9 \quad \text{ou} \quad \frac{Q_h}{N} = 1203,9.$$

(*Voyez* le Tableau, p. 465.)

En développant le logarithme népérien de l'équation (378) en une série dans laquelle on fait ensuite $T'' = T'$, on retombe sur la formule (374); mais l'équation (377) donne bien une valeur infinie pour le poids G des gaz qui passent en une seconde le long de la chaudière.

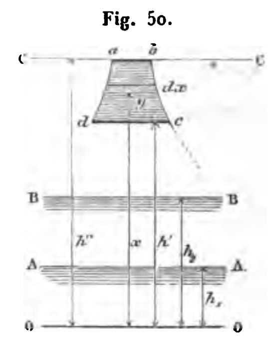
En comparant les résultats des trois formules que nous venons de donner, on voit que la première formule (370) est la seule admissible, et qu'elle doit être employée dans l'appréciation de la machine à vapeur.

Quoique je puisse considérer maintenant cette question comme achevée, je crois utile d'indiquer quelques théorèmes analogues de l'hydraulique, qui faciliteront l'intelligence des théorèmes relatifs au travail disponible de la machine à vapeur.

Supposons que *abcd* (*fig.* 50) soit la section d'un canal d'eau, et que le niveau soit à une hauteur h'' au-dessus d'un certain niveau OO, qui sera, pour plus de simplicité, le niveau de la mer. Soient h' la hauteur du fond du canal au-dessus de OO, y la largeur variable du canal dépendant de la hauteur x. L'eau arrive dans ce canal avec une certaine vitesse moyenne w, que nous supposerons assez petite pour qu'on puisse négliger la force vive du mouvement. Soient en outre BB et AA les niveaux de deux larges bassins dont les hauteurs au-dessus de OO sont exprimées respectivement par h_2 et h_1. Lorsque la forme de la section est connue, et quand toute la hauteur

de chute, depuis le niveau CC jusqu'au niveau AA, est réelle-

Fig. 50.



ment utilisable, nous pouvons calculer le travail mis à notre disposition par l'eau qui s'écoule.

L'eau sort de la tranche horizontale ydx avec la vitesse w, et le poids dG de la quantité d'eau qui traverse cette tranche dans une seconde a pour expression

$$dG = \gamma w y dx,$$

γ désignant le poids spécifique de l'eau.

Quand ce poids descend lentement de la hauteur x jusqu'au niveau de la mer en effectuant du travail, on gagne un travail

$$dW = x\,dG.$$

Nous pouvons donc dire que dW est le travail que cette tranche d'eau met à notre disposition par seconde.

On tire de là

$$dG = \frac{dW}{x},$$

et en égalant les deux expressions trouvées par dG, il vient

(379) $$dW = \gamma w y x dx.$$

Mais en réalité nous n'avons à notre disposition que la hauteur $(x - h_1)$ jusqu'au niveau AA; le maximum du travail dL que nous pouvons gagner réellement est donc

$$dL = (x - h_1)\,dG.$$

En éliminant dG entre cette dernière équation et l'une des précédentes, on a

$$dL = dW - h_1 \frac{dW}{x},$$

et en combinant cette dernière avec l'équation (379), on trouve

$$(380) \qquad dL = dW - \gamma \varpi h_1 y dx.$$

Si nous pouvions intégrer l'équation (379), nous trouverions le travail total W que le canal met à notre disposition par seconde, tandis que l'intégration de l'équation (380) nous ferait connaître le travail maximum L, qu'il serait possible de réaliser par seconde dans les circonstances données. Pour pouvoir intégrer, il faut connaître la section du canal. Supposons que la largeur y du canal varie avec x, de manière que le produit $yx = a =$ const. L'intégration des équations entre les limites $x = h'$ et $x = h''$ donnera

$$W = \gamma \varpi a (h'' - h'),$$

et

$$L = W - \gamma \varpi h_1 a \log \text{nép} \left(\frac{h''}{h'}\right).$$

Si on élimine le produit $\gamma \varpi a$, ces deux équations donnent finalement pour le travail disponible

$$(381) \qquad L = W \left[1 - \frac{h_1}{h'' - h'} \log \text{nép} \left(\frac{h''}{h'}\right)\right].$$

[*Voyez* l'équation (378), p. 472.]

Imaginons maintenant que le canal soit remplacé par un grand réservoir d'une profondeur très-petite, dans lequel G' kilogrammes d'eau arrivent par seconde; le travail disponible serait alors $W = G'h''$, et le travail maximum qu'on pourrait utiliser serait $L = G'(h'' - h_1)$.

L'élimination de G' entre ces deux expressions donne

$$(382) \qquad L = \frac{W}{h''}(h'' - h_1).$$

Dans le cas où, par suite de certaines circonstances, il faudrait laisser non utilisée toute la hauteur, depuis le niveau CC du canal jusqu'au niveau du réservoir BB, c'est-à-dire où il faudrait laisser tomber l'eau qui vient du canal jusqu'au niveau BB sans l'employer, le travail qui est disponible au niveau BB serait $W = G''h_2$, et l'on aurait, pour le travail que l'on peut utiliser quand l'eau descend jusqu'au niveau AA, $L = G''(h_2 - h_1)$, ou, en éliminant G'',

$$(383) \qquad L = \frac{W}{h_2}(h_2 - h_1).$$

Les trois dernières formules sont identiques aux trois équations que j'ai établies pour le travail disponible de la machine à vapeur.

Dans ces dernières figure la chaleur fournie mesurée en travail $\left(\frac{Q}{A}\right)$; au lieu de cette quantité, nous avons ici le travail W.

De même ici les distances respectives des niveaux au niveau de la mer remplacent les températures absolues qui entrent dans les trois équations citées. L'analyse que nous venons de signaler montre clairement les phénomènes qui se passent dans une machine à vapeur. La chaudière nous présente un cas analogue à celui qui est représenté par l'équation (383). Le combustible fournit la chaleur à la chaudière, de même que l'eau d'un canal fournit du travail au bassin dans lequel elle s'écoule. La chaudière constitue un grand réservoir dans lequel tombe la chaleur; mais c'est un réservoir dans lequel nous pouvons, pour ainsi dire, régler le niveau BB en modifiant la pression de la vapeur; seulement les limites qui nous sont imposées sont assez restreintes.

Ces développements justifient, je l'espère, l'usage que je vais faire de l'équation (370) pour calculer le travail disponible des machines à vapeur.

III. — *Du cycle des machines à vapeur réelles.*

Le cycle que parcourent nos machines à vapeur réelles est bien un cycle *complet;* car le corps intermédiaire, qui est un mélange de vapeur et de liquide, revient à son état initial à la fin de chaque opération; mais ce cycle n'est pas un cycle *parfait*, parce que nous n'effectuons pas (même en faisant abstraction des résistances passives) le cycle qui donne le maximum du travail. Cela tient à la disposition des organes de la machine.

Cherchons quel est le cycle que nous pouvons réaliser dans les circonstances *les plus favorables*.

Prenons une machine à double effet, et faisons les hypothèses suivantes ;

1° Il n'y a pas d'espace nuisible;

2° La pression de la vapeur qui entre dans le cylindre est égale à la pression dans la chaudière;

3° La contre-pression de la vapeur située derrière le piston est égale à la pression dans le condenseur si la machine est à condensation, et à la pression atmosphérique si la machine est sans condenseur;

4° Pendant la détente, la pression diminue depuis celle de la chaudière jusqu'à celle du condenseur ou de l'atmosphère : nous disons qu'une pareille détente est *complète;*

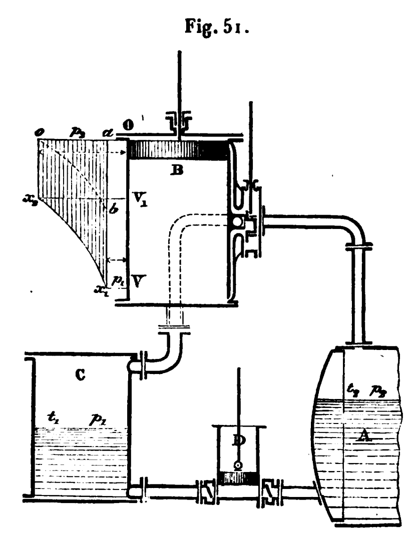
5° Enfin, la disposition des soupapes permet de tenir complétement ouvert le tuyau d'entrée de la vapeur tant que dure son introduction, et d'avoir une libre communication pendant toute la course du piston entre l'espace qui se trouve derrière lui et le condenseur, ou l'atmosphère.

Soient A (*fig.* 51) la chaudière dans laquelle on a une pression p_2 et une température t_2; B le cylindre à vapeur; C le condenseur dans lequel la vapeur et l'eau se trouvent sous la pression p_1; enfin, D la pompe à air servant aussi de pompe d'alimentation; elle doit retirer du condenseur la vapeur condensée pour la refouler dans la chaudière. A côté du cylindre B,

j'ai représenté le *diagramme* correspondant à cette machine : il indique simplement le cycle des opérations.

Le piston est en haut de sa course; la vapeur arrive sur sa surface supérieure; l'ordonnée Oo représente la pleine pres-

Fig. 51.



sion p_2, qui reste constante pendant que le piston parcourt l'espace V_1. A partir de là, la détente commence, et elle continue jusqu'à ce que la vapeur occupe le volume V, et que la pression ait diminué de p_2 à p_1. Lorsque le piston remonte, cette vapeur est transportée sous la pression constante p_1 dans le condenseur ou dans l'atmosphère; dans le dernier cas, où la machine est sans condensation, nous pouvons considérer l'atmosphère comme un condenseur dans lequel la pression est celle de l'atmosphère, et où la condensation de la vapeur a lieu à la température $t_1 = 100$ degrés.

Le travail que la vapeur a effectué dans cette opération, par course du piston, est représenté par la surface ombrée aox_2x_1a, que l'on peut mesurer facilement. Supposons que M kilogrammes de vapeur et d'eau passent par course du piston de la chaudière au cylindre; que la quantité spécifique de la vapeur soit x_2; que Mx_2 soit le poids de la vapeur, et $M(1 - x_2)$ celui de l'eau; le volume du mélange, au commencement de

la détente, sera

(384) $$V_1 = M(x_2 u_2 + \sigma),$$

et le travail pendant la pleine pression

(385) $$L' = Mp_2(x_2 u_2 + \sigma).$$

La détente a lieu suivant la courbe adiabatique, et le travail de la détente L″ est, d'après l'équation (247), p. 322,

(386) $$L'' = \frac{M}{A}(q_2 - q_1 + x_2\rho_2 - x_1\rho_1).$$

Comme le volume final V a pour expression

(387) $$V = M(x_1 u_1 + \sigma),$$

le travail de la contre-pression de la vapeur L‴ sera

(388) $$L''' = Mp_1(x_1 u_1 + \sigma),$$

x_1 désignant, dans les deux dernières formules, la quantité spécifique de la vapeur à la fin de la détente.

On tire de là, sans difficulté, le rapport de la détente $\frac{V_1}{V}$, et le travail total L gagné par course du piston et mesuré en unités de chaleur; car on a

$$AL = A(L' + L'' - L''').$$

En désignant par r, comme précédemment, la chaleur de vaporisation, et en rappelant la relation $r = \rho + Apu$, nous aurons, après avoir remplacé L′, L″, L‴, par leurs valeurs

(389) $$AL = M[q_2 - q_1 + r_2 x_2 - r_1 x_1 + A\sigma(p_2 - p_1)].$$

Il faut encore faire disparaître de cette équation la quantité x_1, qui n'est pas donnée directement, et cela se fait à l'aide de l'équation (243), qui a été donnée à propos de la courbe adiabatique (p. 313), et qui devient ici

(390) $$\frac{x_2 r_2}{T_2} + \tau_2 = \frac{x_1 r_1}{T_1} + \tau_1.$$

Nous obtenons ainsi, pour le travail de la vapeur par course

du piston,

$$(391)\quad \left\{\begin{aligned} AL = M\Bigg[&\frac{r_2 x_2}{T_2}(T_2 - T_1) + q_2 - q_1 \\ &- T_1(\tau_2 - \tau_1) + A\sigma(p_2 - p_1)\Bigg], \end{aligned}\right.$$

que nous pouvons regarder comme la formule fondamentale des machines à vapeur réelles.

Avant de continuer cette étude, j'appellerai l'attention du lecteur sur un résultat singulier. La parenthèse de l'équation (391) devient identique à l'expression (337), que j'ai établie (p. 406) en étudiant l'écoulement des mélanges de vapeur et de liquide, quand on intervertit les indices; on a donné l'indice 1, dans cette dernière, aux quantités qui correspondent à la pression supérieure, et l'indice 2 à celles qui se rapportent à la pression inférieure. La comparaison de ces deux équations donne la relation

$$L = M\frac{w^2}{2g}.$$

Par conséquent, lorsqu'un mélange de vapeur et de liquide, pesant M kilogrammes, sort directement dans l'atmosphère de la chaudière d'une machine sans condensation, la masse M *gagne à l'état de force vive exactement le même travail que celui que l'on peut gagner à l'aide de la machine dans les circonstances les plus favorables.*

Cette proposition pourrait nous donner le moyen de chercher la valeur des machines motrices (roues à réaction à vapeur, turbines à vapeur) dans lesquelles on utilise l'écoulement d'un mélange de vapeur et de liquide. Cette idée a été déjà poursuivie plusieurs fois. Je ne chercherai pas à tirer parti de cette proposition en ce moment, parce que cela m'éloignerait du but de cet ouvrage.

On pourrait facilement remplacer la formule (391) par des formules approximatives plus simples en procédant comme on a fait (p. 410) pour la formule de l'écoulement; je laisse de côté cette question pour le moment.

Cette formule donne le travail que la machine fournirait dans le cas le plus favorable par course du piston, ou par seconde, quand le poids M du mélange est rapporté à la seconde, s'il n'y avait pas de résistances passives et si la rentrée de l'eau dans la chaudière, c'est-à-dire l'alimentation, n'exigeait pas de travail.

Nous allons d'abord nous occuper de cette dernière question, et déterminer le travail de l'alimentation que nous devrons retrancher de la valeur de L donnée par la formule (391). Nous devons distinguer la machine *avec* condensation de la machine *sans* condensation, et nous préoccuper du mode d'alimentation de la chaudière suivant qu'elle se fait par une pompe ou par l'injecteur.

PREMIER CAS. — TRAVAIL DE L'ALIMENTATION DANS LES MACHINES AVEC CONDENSATION.

1. *Le condenseur est refroidi extérieurement.* — L'alimentation se fait à l'aide de la pompe D (*fig.* 51). Cette pompe extrait du condenseur C la masse M, que le cylindre à vapeur a amenée au condenseur dans un temps déterminé, et qui a été complétement condensée; puis elle la refoule dans la chaudière. Quand la pompe est à simple effet, le piston aspire, en montant dans le cylindre D, le volume d'eau $M\sigma$, ce qui fait *gagner* le travail $M\sigma p_1$, et il le refoule dans la chaudière en descendant, ce qui fait *dépenser* le travail $M\sigma p_2$. Le travail qui correspond à la pression de l'atmosphère n'est pas à considérer.

D'après cela, l'alimentation exige le travail

$$L^{IV} = M\sigma(p_2 - p_1).$$

En retranchant cette expression du second membre de l'équation (391), on trouve

$$(392)\qquad AL = M\left[\frac{r_2 x_2}{T_2}(T_2 - T_1) + q_2 - q_1 - T_1(\tau_2 - \tau_1)\right].$$

2. *Le condenseur est refroidi par injection.* — La pompe D (*fig.* 51) retire du condenseur non-seulement la masse M, mais

encore la quantité d'eau injectée M_0 qui correspond à M (*voyez* p. 382). Si la pression de l'air extérieur est p_0, le travail qu'on gagne dans la course ascendante du piston sera

$$(M + M_0)\sigma(p_1 - p_0).$$

Le piston refoule en descendant le volume $M\sigma$ dans la chaudière, lorsque la pompe sert à la fois comme pompe d'alimentation et comme pompe à eau chaude; cela exige le travail

$$M\sigma(p_2 - p_0).$$

Le reste du liquide $M_0\sigma$ est rejeté dans l'air, ce qui n'exige pas de travail.

Le travail de l'alimentation est donc

$$L^{IV} = M\sigma(p_2 - p_0) - (M + M_0)\sigma(p_1 - p_0),$$

ou bien

$$L^{IV} = M\sigma(p_2 - p_1) + M_0\sigma(p_0 - p_1).$$

Cette formule n'est pas tout à fait exacte, puisque la pompe doit retirer aussi du condenseur l'air contenu dans l'eau d'alimentation; le travail que nous venons de trouver est un peu trop petit, mais on peut négliger ce qui manque comme une quantité très-petite.

Si l'on retranche maintenant le travail de l'alimentation du deuxième membre de l'équation (391), on trouve

$$AL = M\left[\frac{r_2 x_2}{T_2}(T_2 - T_1) + q_2 - q_1 - T_1(\tau_2 - \tau_1)\right] - AM_0\sigma(p_0 - p_1).$$

Le deuxième terme du second membre est en réalité tellement petit, qu'on peut le négliger sans inconvénient, et on a alors pour ce dernier cas la même formule (392) que pour le précédent.

DEUXIÈME CAS. — TRAVAIL DE L'ALIMENTATION DANS LES MACHINES SANS CONDENSATION.

1. *On se sert d'une pompe d'alimentation.* — Nous avons déjà déterminé (p. 396) le travail que la pompe d'alimentation

absorbe dans ce cas; supposons encore que la pompe élève d'abord l'eau à la hauteur h; alors le travail exigé par l'alimentation est, si l'on appelle p_0 la pression de l'atmosphère,

$$L^{IV} = Mh + M\sigma(p_2 - p_0).$$

Retranchons cette quantité du deuxième membre de la formule (391), nous aurons pour le travail de la machine

$$AL = M\left[\frac{x_2 r_2}{T_2}(T_2 - T_1) + q_2 - q_1 - T_1(\tau_2 - \tau_1) - Ah\right],$$

parce qu'ici la pression p_1 est identique à la pression p_0.

Le terme Ah est tellement petit dans la pratique, qu'on peut le négliger, et on retombe encore sur la formule (392).

2. *On se sert de l'injecteur Giffard.* — L'injecteur n'exigeant pas de travail de la part de la machine, l'équation (391) est immédiatement applicable, et, comme on peut négliger le terme $A\sigma(p_2 - p_1)$ comme une quantité très-petite, on retrouve encore la formule (392).

Nous arrivons donc à ce résultat important, qu'on peut employer la même formule (392) pour calculer le travail de la vapeur dans tous les cas examinés, que la machine travaille avec ou sans condensation, que l'alimentation se fasse avec la pompe ou avec l'injecteur. Il est bien entendu qu'il s'agit du travail de la machine dans les conditions les plus favorables, que nous avons énumérées plus haut (p. 477).

Comparons la machine réelle à la machine parfaite. Pour cela, déterminons d'abord la quantité de chaleur Q qu'il faut fournir à la chaudière par coup de piston ou par seconde, suivant que le poids du mélange de vapeur et de liquide est calculé par coup de piston ou par seconde. Cette détermination ne présente aucune difficulté; il faut distinguer si la machine travaille avec ou sans condensation.

Dans les machines avec condensation, on produit par coup de piston la quantité de vapeur Mx_2, ce qui exige la quantité de chaleur $Mx_2 r_2$; la pompe d'alimentation conduit ensuite le poids d'eau M à la température t_1 du condenseur à la chau-

dière, où il faut faire remonter sa température à celle de la chaudière t_2, en lui envoyant la quantité de chaleur $M(q_2-q_1)$; d'après cela, la quantité totale de chaleur qu'il faut envoyer à la chaudière par coup de piston est

$$Q = M(x_2 r_2 + q_2 - q_1).$$

Dans les machines *sans* condensation, nous avons à traiter séparément le cas de la pompe d'alimentation et celui de l'injecteur.

Dans l'alimentation au moyen de la pompe, les M kilogrammes d'eau sont amenés dans la chaudière à la température t_0, qui est en général plus basse que la température t_1 (100°) de la vapeur qui correspond à la contre-pression p_1. Cette quantité d'eau exige dans la chaudière, pour être portée à la température t_2, la quantité de chaleur $M(q_2 - q_0)$, et puis, pour être vaporisée, la quantité de chaleur $Mx_2 r_2$; la quantité totale de chaleur qui doit entrer dans la chaudière par coup de piston est donc

$$Q = M(x_2 r_2 + q_2 - q_0).$$

Lorsque l'alimentation a lieu avec l'injecteur, la quantité de chaleur Q_1 que l'injecteur seul exige est, d'après l'équation (326), p. 395, dans laquelle on met les notations que nous avons adoptées ici,

$$Q_1 = M\{q_2 - q_0 + A[h + \sigma(p_2 - p_0)]\};$$

h désigne la hauteur d'aspiration. Mais la vaporisation exige encore ici, comme tout à l'heure, la quantité de chaleur $Mr_2 x_2$; la somme de ces deux quantités donne alors la chaleur totale Q. On peut très-bien négliger dans cette somme le terme $A[h + \sigma(p_2 - p_0)]$, comme très-petit relativement aux autres termes, et on obtient, pour la chaleur totale qu'il faut fournir par coup de piston, *la même équation* que nous avons trouvée ci-dessus pour l'alimentation à l'aide d'une pompe.

Comme la formule (392) convient aussi aux deux modes d'alimentation, je puis répéter la proposition de la page 402, et dire que, théoriquement, *aucun des deux appareils d'ali-*

mentation n'a de supériorité sur l'autre, mais que dans la pratique on doit recommander l'injecteur, parce qu'il se comporte comme une pompe sans frottement; les résistances passives sont sans nul doute plus petites dans l'injecteur que dans la pompe, surtout quand le piston est mis en mouvement par des excentriques; on suppose qu'il n'y ait pas de perte d'eau et de vapeur dans l'injecteur.

Il résulte de toutes les recherches précédentes que nous devons employer pour le calcul de la quantité de chaleur Q, qu'il faut introduire dans la chaudière par coup de piston, ou par seconde quand la quantité M se rapporte à la seconde, la formule

$$(393) \qquad Q = M(x_2 r_2 + q_2 - q_0),$$

quel que soit le système de machine à vapeur.

Il suffit de mettre q_1 à la place de q_0 quand la machine travaille avec condensation, parce que la température t_0 de l'eau d'alimentation est alors identique à t_1 qui correspond à la contre-pression de la vapeur et à la pression dans le condenseur. Cette formule subit seulement un changement, lorsque la machine offre un espace nuisible. Nous examinerons ce cas plus tard.

Si nous utilisions convenablement la quantité de chaleur donnée par la formule (393), c'est-à-dire si nous réalisions le cycle *complet* de la *fig.* 48, nous obtiendrions le travail maximum que puisse fournir la machine à vapeur théorique. C'est le travail disponible de la machine à vapeur (sans espace nuisible). On l'obtient en substituant la valeur de Q dans la formule

$$L_m = \frac{Q}{AT_2}(T_2 - T_1),$$

qui se déduit de l'équation (370), p. 457; il vient alors

$$(394) \qquad L_m = \frac{M(x_2 r_2 + q_2 - q_0)}{AT_2}(T_2 - T_1).$$

On peut encore écrire

$$(395)\quad AL_m = M\left[\frac{x_2 r_2}{T_2}(T_2 - T_1) + \frac{(q_2 - q_0)(T_2 - T_1)}{T_2}\right].$$

Cette forme est particulièrement propre à la comparaison d'une machine théoriquement parfaite et d'une machine réelle qui fonctionne dans les conditions les plus favorables (*voyez* p. 477); nous n'avons pour cela qu'à lui adjoindre la formule (392), qui donne le maximum du travail pour le cycle des machines à vapeur réelles.

Retranchons membre à membre les équations (392) et (395); la quantité $L_m - L$, que nous désignerons par L_1, représentera la perte de travail qui provient *de l'imperfection du cycle de nos machines à vapeur,* et cette quantité aura pour expression

$$(396)\quad L_1 = \frac{M}{AT_2}\left[(q_2 - q_0)(T_2 - T_1) + T_1 T_2(\tau_2 - \tau_1) - T_2(q_2 - q_1)\right].$$

Pour les machines avec condensation, il faut, comme on sait, faire $q_1 = q_0$.

Si l'on divise L_1 par le travail disponible, on obtient *la perte d'effet qui correspond à l'imperfection du cycle d'une machine à vapeur réelle;* en le désignant par ζ_1, on a

$$(397)\quad \zeta_1 = \frac{(q_2 - q_0)(T_2 - T_1) + T_1 T_2(\tau_2 - \tau_1) - T_2(q_2 - q_1)}{(x_2 r_2 + q_2 - q_0)(T_2 - T_1)}.$$

Quand il s'agit de la vapeur d'eau, les deux dernières équations peuvent s'écrire beaucoup plus simplement sans cesser d'être exactes; en regardant la chaleur spécifique moyenne c de l'eau comme une quantité constante, on a

$$q_2 - q_0 = c(T_2 - T_0), \quad \text{et} \quad q_2 - q_1 = c(T_2 - T_1);$$

par suite,

$$(q_2 - q_0)(T_2 - T_1) - T_2(q_2 - q_1) = -cT_0(T_2 - T_1) = -T_0(q_2 - q_1):$$

d'où l'on déduit pour la perte de travail l'expression plus

simple

$$(398) \qquad L_1 = \frac{M}{AT_2}[T_1 T_2(\tau_2 - \tau_1) - T_0(q_2 - q_1)],$$

et, pour la perte d'effet,

$$(399) \qquad \zeta_1 = \frac{T_1 T_2(\tau_2 - \tau_1) - T_0(q_2 - q_1)}{(x_2 r_2 + q_2 - q_0)(T_2 - T_1)}.$$

C'est cette dernière forme que nous emploierons désormais.

Pour de faibles différences de température, on peut écrire (*voyez* p. 314)

$$\tau_2 - \tau_1 = c \operatorname{lognép}\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{c(T_2 - T_1)}{T_1}$$

et

$$q_2 - q_1 = c(T_2 - T_1).$$

On a alors

$$\zeta_1 = \frac{c(T_2 - T_0)}{x_2 r_2 + q_2 - q_0} = \frac{q_2 - q_0}{x_2 r_2 + q_2 - q_0}.$$

C'est justement l'équation (328) que j'ai donnée (p. 397) en étudiant l'injecteur Giffard. La vraie signification des nombres donnés alors devient maintenant manifeste, et on voit, comme je l'ai déjà dit à cette occasion, que les nombres trouvés pour η ne peuvent pas servir à apprécier l'appareil d'alimentation, mais qu'ils se rapportent au cycle même de la machine à vapeur. La formule (328) n'est d'ailleurs applicable qu'à de petites différences de température.

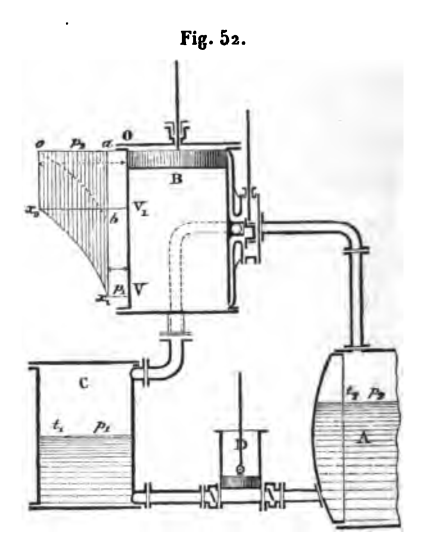
Je continuerai à désigner par L_1 la perte de travail et par ζ_1 la perte d'effet qui résultent de l'imperfection du cycle de la machine à vapeur réelle. Il y a, il est vrai, dans une machine d'autres pertes, que nous déterminerons aussi ; mais elles ne proviennent pas de l'imperfection du cycle, et peuvent être diminuées par des modifications de construction.

Il n'en est pas de même pour la perte L_1 qui résulte de ce qu'on utilise la vapeur par un procédé qui est vicieux en principe ; il importe donc de savoir si en réalité cette perte est tellement grande qu'il faille songer à changer le cycle de nos machines à vapeur, de manière à le rapprocher davantage du cycle

parfait; il faut ensuite chercher quelle est la partie du cycle réel qui est fautive et s'il est possible de l'améliorer.

Le défaut du cycle réel est facile à reconnaître. Lorsqu'on fait passer par le point o (*fig.* 52) du diagramme la courbe

Fig. 52.



adiabatique ob, en supposant qu'il y ait au commencement M kilogrammes d'eau à la température t_2, on reconnaît que le cycle véritablement parcouru dans nos machines à vapeur peut se décomposer en deux cycles : le premier qui correspond à la surface ox_2x_1b est un *cycle parfait*, le second est représenté par la surface aob et c'est dans cette partie du cycle total que se trouve l'imperfection. Cette décomposition se déduit directement de la formule (392); le premier terme de la parenthèse correspond à une machine à vapeur parfaite [*voyez* l'équation (369), p. 457], les deux autres termes

$$[(q_2 - q_1) - T_1(\tau_2 - \tau_1)]$$

sont relatifs à la partie imparfaite du cycle. Je puis d'après cela considérer une machine à vapeur qui travaille dans les circonstances les plus favorables comme une réunion de deux machines à vapeur; la première travaille d'une manière parfaite et

conforme à la théorie, mais il en est autrement de la seconde; cette dernière exécute une opération particulière qui est représentée par la partie *oba* du diagramme. Dans cette seconde machine M kilogrammes d'eau à la température t_2 se dilatent en passant de la pression p_2 à la pression p_1; le travail produit dans cette opération est d'après l'équation (247)

$$AL' = (q_2 - q_1 - x\rho_1)M,$$

car la quantité de vapeur initiale est zéro.

Dans cette équation x désigne la quantité spécifique de la vapeur dans l'état b (*fig.* 52); elle se détermine à l'aide de l'équation (243), p. 313, qui donne la relation

$$\frac{xr_1}{T_1} = \tau_2 - \tau_1.$$

A partir de l'état b, la masse est refoulée sous une pression constante p_1 et à la température constante t_1 (suivant la ligne *ba*) jusqu'à ce que toute la vapeur soit de nouveau condensée; le travail qu'il faut effectuer pour cela est

$$L'' = Mxp_1 u_1.$$

Enfin la température de l'eau est élevée de t_1 à t_2 avec un accroissement correspondant de la pression sans qu'il y ait formation de vapeur, par conséquent sous un volume constant. Le cycle est alors achevé et le travail gagné se détermine à l'aide des formules précédentes qui donnent par leur combinaison

$$A(L' - L'') = M[q_2 - q_1 - T_1(\tau_2 - \tau_1)],$$

résultat auquel on devait s'attendre à cause de l'équation (392).

On doit conclure de tout ce qui précède qu'une partie du cycle de nos machines à vapeur, celle qui correspond à la pleine pression et à la détente, et en général l'utilisation de la vapeur qui pousse le piston, sont conformes à la théorie et ne sont pas susceptibles de perfectionnements; qu'il faut chercher la cause de l'imperfection dans les phénomènes qui se passent derrière le piston; on ne devrait pas pousser la vapeur

dans le condenseur ou dans l'atmosphère sous une pression constante; cette partie de l'opération qui s'accomplit dans les machines à vapeur réelles entraîne une perte de force.

Avant de chercher comment on peut remédier à ce défaut, il convient de voir d'abord si la perte effective résultant de l'imperfection du cycle est assez considérable pour qu'il faille s'occuper des moyens de l'empêcher ou de la diminuer. Nous étudierons cette question sur des exemples numériques.

Supposons qu'une machine à vapeur sans condensation travaille avec de la vapeur pure non mêlée d'eau liquide sous la pression $p_2 = 5$ atmosphères, alors $x_2 = 1$.

D'après le tableau de la page 307 et la Table X de l'Appendice, on a pour une pression de 5 atmosphères :

$$t_2 = 152,22, \quad q_2 = 153,741, \quad \tau_2 = 0,44693, \quad r_2 = 499,184,$$

et pour 1 atmosphère :

$$t_1 = 100,00, \quad q_1 = 100,500, \quad \tau_1 = 0,31356.$$

Avec ces données, l'équation (392) donne pour le travail mesuré en unités de chaleur des M kilogrammes de vapeur dans les conditions les plus favorables

$$AL = 64,747\,M.$$

Lorsque la chaudière est alimentée à l'aide d'une pompe ou d'un injecteur avec de l'eau à la température $t_0 = 15^\circ$, on a (Table I) $q_0 = 15,005$, et le travail disponible est en unités de chaleur, d'après l'équation (394),

$$AL_m = 78,341\,M.$$

On déduit de là pour la perte de travail occasionnée par l'imperfection du cycle

$$AL_1 = A(L_m - L) = 13,594\,M,$$

et pour la perte d'effet correspondante

$$\zeta_1 = \frac{L_1}{L_m} = 0,1735.$$

La formule approximative (399) donne directement pour ce cas $\zeta_1 = 0,1747$.

On aurait donc dans cette machine une perte de 17,4 pour 100 du travail disponible provenant uniquement de l'imperfection du cycle; et cette perte est assez grande pour qu'on doive songer à changer le cycle. Mais un examen plus approfondi de l'équation (399) montre que cette perte est si considérable seulement parce qu'on a pris l'eau d'alimentation à la température très-basse $t_0 = 15°$.

Supposons en effet qu'on chauffe d'avance l'eau d'alimentation à l'aide des gaz du foyer dont la chaleur est ordinairement perdue; alors le résultat devient plus favorable. En effet, si l'on chauffe l'eau d'alimentation jusqu'à une température de 80 et 100 degrés, la formule (399) donnera pour la perte d'effet respectivement 0,0789 et 0,0449; cette perte est donc beaucoup diminuée.

La formule contient aussi la quantité spécifique x_2 de la vapeur contenue dans le mélange qu'on introduit dans le cylindre. Nous avons posé tout à l'heure $x_2 = 1$, c'est-à-dire nous avons pris de la vapeur pure et sèche; mais supposons qu'il y ait 10 ou 20 pour 100 d'eau entraînée mécaniquement par la vapeur, c'est-à-dire prenons $x_2 = 0,90$ ou $x_2 = 0,80$, le tableau comparatif suivant donnera alors la perte d'effet dans ces différents cas :

Valeurs de	Valeurs de ζ_1.		
x_2.	$t_0 = 15°$	$t_0 = 80°$	$t_0 = 100°$
1	0,174	0,079	0,045
0,90	0,189	0,086	0,049
0,80	0,207	0,096	0,055

Ce tableau montre très-bien l'influence exercée sur la perte d'effet par le chauffage de l'eau; cette opération diminue tellement cette perte, qu'elle doit être vivement recommandée pour les machines sans condensation. On reconnaît de plus que la présence de l'eau dans la vapeur *augmente* la perte d'effet, mais que cette augmentation est relativement petite, et bien moins considérable qu'on ne l'avait cru jusqu'ici.

Pour mieux faire connaître cette question, j'ai calculé les deux tableaux suivants :

Machine à vapeur avec condensation.

(Pression dans le condenseur : $0^{atm},1$.)

PRESSION dans la chaudière en atmosphères.	TRAVAIL pour 1 kilogramme de vapeur en unités de chaleur (équation 392) AL.	TRAVAIL DISPONIBLE en unités de chaleur (équation 394) AL_m.	PERTE D'EFFET causée par l'imperfection du cycle ζ_1.
$1\frac{1}{2}$	95,953	101,222	0,0521
3	120,785	129,544	0,0675
4	131,134	141,675	0,0744
5	139,236	151,240	0,0794
6	145,755	159,173	0,0843
8	156,198	171,908	0,0914
10	164,351	181,993	0,0969

Machine à vapeur sans condensation.

(Contre-pression : 1 atmosphère.)

PRESSION dans la chaudière en atmosphères.	TRAVAIL pour 1 kilogramme de vapeur en unités de chaleur (équation 392) AL.	TRAVAIL disponible en unités de chaleur (équation 394) [*] AL_m.	PERTE D'EFFET causée par l'imperfection du cycle ζ_1.	
			$t_0 = 15^o$	$t_0 = 100^o$
$1\frac{1}{2}$	16,302	19,089	0,1460	0,0117
3	44,204	52,696	0,1612	0,0311
4	55,779	67,046	0,1681	0,0396
5	64,747	78,341	0,1735.	0,0465
6	72,082	87,696	0,1781	0,0522
8	83,646	102,685	0,1854	0,0615
10	92,629	114,534	0,1913	0,0688

[*] La température t_0 étant égale à 15 degrés.

L'exemple que nous venons de donner suffit pour expliquer ces tableaux; mais il faut remarquer qu'on a supposé la vapeur sèche et saturée.

Les résultats de ces tableaux doivent rassurer les constructeurs de machines; ils ne confirment heureusement pas l'opinion de M. Redtenbacher qui pense que le cycle de nos machines à vapeur est extrêmement imparfait; que pour le perfectionner il faut changer complétement sa forme et le mode d'utilisation de la vapeur; et que jusque-là toute amélioration dans la construction seule ne peut avoir qu'une importance relativement minime. Nos tableaux montrent bien au contraire le peu d'importance de la perte d'effet qui provient de l'imperfection du cycle des machines que l'on construit. Cette perte atteint 5 à 6 pour 100 dans les machines à basse pression avec condensation, et 6 à 8 pour 100 dans les machines à moyenne pression avec condensation; elle ne devient plus considérable dans les machines sans condensation que lorsqu'on alimente la chaudière avec de l'eau froide; mais lorsqu'on chauffe préalablement cette eau, ce qui est toujours facile à faire, cette perte descend même au-dessous de celle que subit une machine avec condensation.

C'est en m'appuyant sur ces résultats que j'ai parlé plus haut (p. 222) d'une réhabilitation de la machine à vapeur. Tant que les théorèmes fondamentaux de la théorie mécanique de la chaleur seront considérés comme exacts, nous pouvons regarder le cycle de nos machines à vapeur comme un cycle très-avantageux, et s'il ne se produisait pas dans ces machines des pertes de travail plus considérables que celle qui provient de l'imperfection proprement dite du cycle, nous n'aurions pas à poursuivre le perfectionnement des machines à vapeur, au moins de celles qui travaillent avec de la vapeur saturée.

IV. — *Examen d'une machine à vapeur construite.*

1. *Machine à vapeur sans espace nuisible.* — Les recherches précédentes avaient pour but de trouver l'imperfection de nos machines à vapeur qui provient de leur nature même; pour

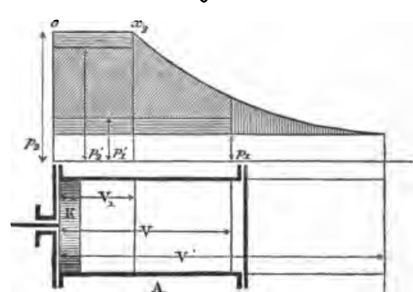
cela nous avons comparé le cycle que les machines à vapeur effectuent réellement dans les circonstances les plus favorables, à celui qui convient à une machine théoriquement parfaite.

La perte d'effet qui correspond à l'imperfection proprement dite du cycle, n'est pas la seule qui ait lieu dans les machines réelles. Pour faire un examen approfondi d'une machine, il faut se préoccuper aussi d'autres imperfections, si l'on veut apprécier sa véritable valeur.

Considérons une machine réelle; mais négligeons d'abord l'influence de l'espace nuisible.

Soient A (*fig.* 53) le cylindre à vapeur d'une machine à vapeur à double effet, M le poids de vapeur et d'eau qui entre

Fig. 53.



par coup de piston dans le cylindre sous la pression de la chaudière p_2 et à la température t_2; x_2 la quantité spécifique de la vapeur; $(1 - x_2)$ la quantité d'eau que possède l'unité de poids du mélange qui arrive de la chaudière. Supposons encore que la pression soit la même que dans la chaudière pendant l'entrée de la vapeur dans le cylindre et que la contre-pression soit égale à la pression dans le condenseur.

Si V_1 est le volume que le piston parcourt pendant l'entrée de la vapeur dans le cylindre, on a la relation

$$V_1 = M(x_2 u_2 + \sigma),$$

qui permet de déterminer la masse M par coup de piston; en désignant par n le nombre de tours de la manivelle par minute,

on a pour le poids du mélange qui arrive à la machine par seconde,

$$\frac{2n}{60}\,\text{M}.$$

Lorsqu'on met soit cette valeur, soit simplement M dans l'équation (394), p. 485, on trouve le travail disponible de la machine en question, soit par seconde, soit par coup de piston. Dans le premier cas, il faut encore diviser par 75, si le travail disponible doit être exprimé en chevaux-vapeur.

Le travail, pendant l'entrée de la vapeur, est simplement $V_1 p_2$; il faudrait y ajouter le travail produit pendant la détente de la vapeur pour avoir le travail moteur du piston. Si la détente s'étendait assez pour que la pression descendît jusqu'à la valeur p_1, on pourrait simplement faire usage de l'équation (386), p. 479. Mais une aussi grande détente ne se présente que dans des cas très-rares, surtout dans les machines avec condensation; de là provient une perte que nous déterminerons en premier lieu, et que nous nommerons *soit perte de travail, soit perte d'effet provenant d'une détente incomplète.*

Si la détente était complète, elle se ferait de V_1 à V', d'après les notations de la *fig.* 53; mais, en réalité, nous avons seulement V pour le volume de la masse à la fin de la détente, valeur égale au volume que le piston parcourt pendant toute sa course.

Je calcule maintenant le travail produit pendant la détente de V_1 à V, en me servant de la formule approximative de M. Rankine, dans laquelle je détermine l'exposant μ à l'aide de ma formule empirique (259), p. 335 : cet exposant est celui qui correspond à la quantité de vapeur initiale x_2.

Nous posons donc

$$\mu = 1{,}035 + 0{,}100\,x_2,$$

et nous calculons le travail de la détente d'après l'équation (258) qui donne ici

$$\frac{p_2 V_1}{\mu - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V}\right)^{\mu-1}\right].$$

Le rapport $\frac{V_1}{V}$ est le rapport de détente que nous désignerons par ε; on trouve maintenant pour le travail moteur total par coup de piston

$$L_r = V_1 p_2 \left[1 + \frac{1}{\mu - 1}(1 - \varepsilon^{\mu - 1}) \right],$$

ou plus simplement

(400) $$L_r = \frac{V_1 p_2}{\mu - 1}(\mu - \varepsilon^{\mu - 1}).$$

Mais le travail de la contre-pression p_1 est $p_1 V = \frac{V_1 p_1}{\varepsilon}$, et si nous retranchons cette quantité de L_r, nous trouvons le travail total L' produit par coup de piston dans les conditions supposées

(401) $$L' = V_1 p_2 \left(\frac{\mu - \varepsilon^{\mu - 1}}{\mu - 1} - \frac{p_1}{p_2 \varepsilon} \right).$$

Si la détente était complète, ce travail devrait être calculé à l'aide de l'équation (392); ou encore, en désignant par L_m le travail disponible par coup de piston et par L_1, comme plus haut, la perte de travail causée par l'imperfection du cycle, on trouve ce travail qui était désigné précédemment par L, à l'aide de la relation

$$L = L_m - L_1.$$

Lorsqu'on retranche L' de L en prenant l'équation (401), dans laquelle on peut remplacer V_1 par sa valeur $M(x_2 u_2 + \sigma)$, on obtient la perte de travail L_2 causée par une détente incomplète

(402) $$L_2 = L_m - L_1 - M p_2 (x_2 u_2 + \sigma) \left(\frac{\mu - \varepsilon^{\mu - 1}}{\mu - 1} - \frac{p_1}{p_2 \varepsilon} \right),$$

et cette valeur est représentée dans la *fig.* 53 par l'espace couvert de hachures verticales.

A l'aide du travail disponible L_m, donné par l'équation (394), on a le rapport $\frac{L_2}{L_m} = \zeta_2$, qui représente la *perte d'effet causée par une détente incomplète*

(403) $$\zeta_2 = 1 - \zeta_1 - \frac{A p_2 (x_2 u_2 + \sigma)}{(x_2 r_2 + q_2 - q_0)} \frac{T_2}{(T_2 - T_1)} \left(\frac{\mu - \varepsilon^{\mu - 1}}{\mu - 1} - \frac{p_1}{p_2 \varepsilon} \right).$$

Dans cette expression, ζ_1 est, d'après l'équation (399), la perte d'effet due à l'imperfection du cycle; il faut faire $q_0 = q_1$, quand la machine travaille avec condensation.

Une *troisième* perte de travail provient des résistances que la vapeur doit surmonter dans son trajet vers le cylindre, et qui font que la pression moyenne dans le cylindre, pendant l'entrée de la vapeur, est un peu moindre que la pression de la chaudière p_2.

Cette pression, que nous désignerons par p'_2, ne peut être déterminée par la théorie; il en est de même de la véritable contre-pression moyenne p'_1 qui a lieu derrière le piston, et qui est toujours plus grande que la pression p_1 dans le condenseur, ou plus grande que la pression de l'air atmosphérique, s'il n'y a pas condensation.

Ces deux quantités dépendent essentiellement de la disposition de la machine.

Les circonstances qui influent sur ces deux pressions sont tellement *complexes*, que leur détermination théorique paraît impossible. Mais comme elles peuvent se déduire facilement des diagrammes donnés par l'indicateur, on peut déduire d'expériences nombreuses certaines règles et formules empiriques servant à déterminer, au moins pour des machines données, les relations qui lient p_2 et p'_2, ainsi que p_1 et p'_1.

On voit facilement que les deux aires couvertes de hachures horizontales dans la *fig.* 53 représentent les pertes de travail qui proviennent de ces différences de pression. La perte de travail qui provient de ce que la pression, à l'entrée du cylindre, est inférieure à celle qui règne dans la chaudière, a pour expression, par coup de piston,

$$L_3 = V_1(p_2 - p'_2);$$

car nous pouvons très-bien considérer comme un rectangle la partie supérieure de la *fig.* 53, couverte de hachures horizontales. Posons pour simplifier

$$(404) \qquad \frac{p_2 - p'_2}{p_2} = \alpha,$$

et

$$V_1 = M(x_2 u_2 + \sigma);$$

nous trouvons alors

(405) $$L_3 = M p_2 (x_2 u_2 + \sigma) \alpha;$$

de là on déduit, *pour la perte d'effet* ζ_3 *qui provient de la différence des pressions du cylindre et de la chaudière,*

(406) $$\zeta_3 = \frac{A p_2 (x_2 u_2 + \sigma) \alpha}{(x_2 r_2 + q_2 - q_0)} \frac{T_2}{T_2 - T_1}.$$

La perte de travail et la perte d'effet causées par l'inégalité qui existe entre la contre-pression et la pression extérieure se déterminent d'une manière analogue; on entend ici par *pression extérieure* la pression dans le condenseur ou dans l'atmosphère, si la machine est sans condensation. Cette perte de travail est

$$L_4 = V(p'_1 - p_1).$$

Posons

(407) $$\frac{p'_1 - p_1}{p_1} = \beta \quad \text{et} \quad V = \frac{V_1}{\varepsilon};$$

alors on trouve, en mettant à la place de V_1 sa valeur $M(x_2 u_2 + \sigma)$,

(408) $$L_4 = \frac{M p_1 (x_2 u_2 + \sigma) \beta}{\varepsilon}.$$

En divisant L_4 par le travail disponible L_m, on trouve, pour *la perte d'effet* ζ_4 *qui provient de l'inégalité de la pression extérieure et de la contre-pression,*

(409) $$\zeta_4 = \frac{A p_1 (x_2 u_2 + \sigma) \beta}{(x_2 r_2 + q_2 - q_0) \varepsilon} \frac{T_2}{T_2 - T_1}.$$

A ces pertes d'effet se joignent encore celles qui proviennent du frottement. Nous considérons l'ensemble des résistances comme composé de deux parties, ainsi que l'a déjà fait M. de Pambour; l'une de ces parties constitue la résistance *constante*, résistance qui persiste même quand la machine travaille à vide.

Je désigne par f, comme M. de Pambour, cette résistance rapportée à l'unité de surface du piston, et j'ai, pour la perte de travail qui correspond à cette résistance constante par coup de piston,

$$L_5 = Vf,$$

ou bien, en me servant des relations qui précèdent,

$$(410) \qquad L_5 = \frac{M(x_2 u_2 + \sigma)f}{\varepsilon}.$$

De là on déduit, pour *la perte d'effet qui correspond à la résistance constante qui a lieu dans la machine*,

$$(411) \qquad \zeta_5 = \frac{A(x_2 u_2 + \sigma)f}{(x_2 r_2 + q_2 - q_0)\varepsilon} \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}.$$

M. de Pambour admet que l'autre partie des résistances, la résistance variable due au frottement, produit une perte de travail proportionnelle au travail effectif de la machine; d'après cet auteur, on doit prendre, pour le rapport de ces quantités, $\delta = 0,14$, quelle que soit la machine. En cela, M. de Pambour ne fait qu'une hypothèse; je crois donc pouvoir me permettre de partir d'une autre hypothèse, au moins quand il s'agit d'apprécier les machines déjà construites. Je supposerai que la résistance due au frottement soit *proportionnelle, non pas au travail effectif, mais au travail disponible*, et que la perte d'effet ζ_6 qui correspond à la résistance variable due au frottement soit déterminée par des expériences. Je crois que l'on peut regarder la valeur moyenne ζ_6 comme à peu près la même pour les différentes machines.

D'après cela, si l'on connaissait ζ_6, et si l'on avait déterminé le travail disponible d'après la formule (394), on trouverait pour la perte de travail L_6,

$$L_6 = \zeta_6 L_m,$$

tandis que M. de Pambour pose

$$L_6 = \delta L_e = 0,14 . L_e,$$

où L_e désigne le travail effectif de la machine.

En combinant les valeurs fournies par les deux expressions de L_6, on trouvera facilement une certaine relation entre ζ_6 et δ.

Les formules que nous venons d'établir nous permettent de déterminer toutes les pertes d'effet qui se produisent dans une machine *sans* espace nuisible, et de comparer ces pertes entre elles. Ces formules, prises isolément, semblent compliquées; mais leur comparaison donne des rapports assez simples, parce que le facteur

$$\frac{A(x_2 u_2 + \sigma)}{(x_2 r_2 + q_2 - q_0)} \frac{T_2}{T_2 - T_1}$$

se trouve presque dans toutes ces formules, et il peut être écrit plus simplement. Comme nous nous occupons d'une machine construite (*sans* espace nuisible), nous supposons que les quantités t_2, t_1, t_0, et x_2 soient connues d'avance, ainsi que V_1 et ε. On calcule alors d'abord la masse M de liquide et de vapeur par coup de piston à l'aide de l'équation

$$V_1 = M(x_2 u_2 + \sigma), \tag{412}$$

et puis le travail disponible par coup de piston d'après l'équation

$$L_m = \frac{M(x_2 r_2 + q_2 - q_0)}{AT_2}(T_2 - T_1). \tag{413}$$

En divisant ces deux équations membre à membre, on a, pour le facteur écrit ci-dessus, le rapport

$$\frac{V_1}{L_m},$$

et quand on met ensuite dans la dernière équation, à la place de M, la masse de vapeur et de liquide par seconde, c'est-à-dire $\frac{2n}{60}M$, n étant le nombre de tours de la machine par minute, on trouve le travail disponible de la machine par seconde en kilogrammètres. Enfin si l'on divise par 75, on ob-

tient le travail disponible en chevaux-vapeur :

$$(414) \qquad N_m = \frac{2n}{60 \times 75} M(x_2 r_2 + q_2 - q_0) \frac{T_2 - T_1}{AT_2}.$$

Lorsque les quantités M et L_m ont été calculées d'avance avec les simplifications qu'on vient d'indiquer, on obtient, pour les différentes pertes d'effet, les expressions suivantes :

1° Perte d'effet provenant de l'imperfection du cycle, d'après les équations (398) et (399),

$$(415) \qquad \zeta_1 = \frac{M}{AL_m}\left[T_1(\tau_2 - \tau_1) - \frac{T_0}{T_2}(q_2 - q_1)\right];$$

2° Perte d'effet causée par une détente incomplète, d'après l'équation (403),

$$(416) \qquad \zeta_2 = 1 - \zeta_1 - \frac{V_1 p_2}{L_m}\left(\frac{\mu - \varepsilon^{\mu-1}}{\mu - 1} - \frac{p_1}{p_2 \varepsilon}\right);$$

3° Perte d'effet occasionnée par la différence des pressions à l'entrée du cylindre et dans la chaudière, d'après l'équation (406),

$$(417) \qquad \zeta_3 = \alpha \frac{V_1 p_2}{L_m};$$

4° Perte d'effet provenant de l'inégalité de la pression extérieure et de la contre-pression, d'après l'équation (409),

$$(418) \qquad \zeta_4 = \beta \frac{V_1 p_1}{\varepsilon L_m};$$

5° Perte d'effet due à la résistance constante qui a lieu dans la machine, d'après l'équation (411),

$$(419) \qquad \zeta_5 = \frac{f V_1}{\varepsilon L_m};$$

6° Perte d'effet provenant de la résistance variable,

$$\zeta_6.$$

Nous obtenons maintenant *le véritable rendement* η *de notre machine à vapeur,* en additionnant toutes ces pertes d'effet

et retranchant leur somme de 1 :

$$\eta = 1 - (\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_6).$$

Substituons à $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ leurs valeurs données ci-dessus : en rappelant que le rapport $\frac{V_1}{\varepsilon}$ est égal au volume total V du cylindre, et en réduisant, nous aurons

$$(420)\quad \eta = \frac{V p_2}{L_m}\left[\varepsilon\frac{\mu - \varepsilon^{\mu-1}}{\mu - 1} - \frac{(1+\beta)p_1 + \alpha\varepsilon p_2 + f}{p_2}\right] - \zeta_6.$$

Cette formule peut donc aussi déterminer directement le rendement η de notre machine. Mais, si nous désignons par L_e son travail utile par coup de piston, on a aussi

$$L_e = \eta L_m,$$

et comme il y a, d'après les observations faites ci-dessus, entre le coefficient δ de M. de Pambour et notre perte d'effet ζ_6 la relation

$$\delta L_e = \zeta_6 L_m,$$

on peut trouver directement le travail de la machine par coup de piston à l'aide de l'expression suivante, lorsqu'on préfère y introduire le coefficient de M. de Pambour :

$$(421)\quad L_e = \frac{V p_2}{(1+\delta)}\left[\frac{\mu\varepsilon - \varepsilon^{\mu}}{\mu - 1} - \frac{(1+\beta)p_1 + \alpha\varepsilon p_2 + f}{p_2}\right].$$

Désignons par F la section du piston et par s la longueur de sa course, on a $V = Fs$; soit n le nombre des tours de la machine par minute; en multipliant le second membre de l'équation précédente par $\frac{2n}{60}$, on a le travail de la machine par seconde, et en divisant par 75 on a le travail effectif N_e en chevaux-vapeur :

$$(422)\quad N_e = \frac{F s n p_2}{30 \times 75(1+\delta)}\left[\frac{\mu\varepsilon - \varepsilon^{\mu}}{\mu - 1} - \frac{(1+\beta)p_1 + \alpha\varepsilon p_2 + f}{p_2}\right].$$

Remplaçons enfin la quantité $\frac{sn}{30}$ par la vitesse moyenne du

piston c, nous aurons alors une formule pouvant servir au calcul d'une machine nouvelle; on pourrait au moins déterminer la section F du piston, si l'on avait trouvé par des expériences les quantités δ, β, α et f. Cette formule n'est applicable, il est vrai, qu'à une machine *sans* espace nuisible; mais, sous d'autres rapports, elle est préférable à celle de M. de Pambour, car elle tient compte de la quantité d'eau qui est entraînée mécaniquement par la vapeur, puisque la valeur de μ a été déterminée à l'aide de l'équation (259), p. 335, d'après la composition du mélange. Nous reprendrons d'ailleurs le calcul d'une machine à construire; appliquons maintenant les théorèmes précédents à un exemple numérique.

EXEMPLE. — Dans la chaudière à vapeur *d'une machine à moyenne pression avec détente et condensation,* la pression normale p_2 est de $4^{atm},5$, et la pression p_1 dans le condenseur est de $0^{atm},1$. Le diamètre du cylindre à vapeur est de $0^m,550$, et la longueur de la course du piston $s = 1^m,250$. La machine, qui, d'après notre hypothèse, n'a pas d'espace nuisible, fait 30 tours par minute, et la vitesse moyenne du piston est, d'après cela, $c = 1^m,25$.

Le rapport de détente est

$$\varepsilon = \frac{1}{6}.$$

Une pareille machine est désignée dans la pratique, d'après MM. Morin et Poncelet, comme une machine de 30 chevaux effectifs.

Nous allons étudier cette machine à l'aide de nos formules, en faisant deux hypothèses différentes : nous supposerons d'abord que la vapeur qui arrive de la chaudière soit pure, sans mélange d'eau, c'est-à-dire qu'on ait $x_2 = 1$; puis que le mélange de vapeur et d'eau contienne 15 pour 100 d'eau, c'est-à-dire qu'on ait $x_2 = 0,85$.

Pour cette machine, la section du piston est $F = 0^{mc},23758$; le volume du cylindre sera $V = Fs = 0^{mc},29698$, et le volume que le piston parcourt pendant l'entrée de la vapeur sera $V_1 = \varepsilon V = 0^{mc},04949$.

Si nous supposons $x_2 = 1$, comme la valeur de u_2 qui correspond à une pression de $4^{atm},5$ est $0,4004$, on a, pour la quantité de vapeur par coup de piston,

$$M = 0^{kil},1233.$$

L'équation (413) donne, pour le travail disponible par coup de piston,

$$L_m = 7669^{kgm},48.$$

Pour avoir la quantité de chaleur et le travail disponible par seconde, il faut multiplier les deux valeurs précédentes par $\frac{2n}{60}$; notre machine faisant 30 tours par minute, ces valeurs donnent aussi le travail disponible par seconde.

Le travail disponible est exprimé aussi, d'après l'équation (414), par

$$N_m = 102,26 \text{ chevaux-vapeur.}$$

Nous venons de dire que cette machine est considérée dans la pratique comme une machine de $N = 30$ chevaux; en d'autres termes, on suppose que le rendement soit

$$\frac{N}{N_m} = 0,293.$$

Mais le travail N est, comme on sait, plus grand en réalité, et c'est pour cela que le vrai rendement de cette machine est plus grand. Quand le constructeur donne notre machine comme une machine de 30 chevaux, cela veut dire qu'il ne garantit qu'un effet utile de 29,3 pour 100 du travail disponible.

Déterminons maintenant le véritable rendement de cette machine, en calculant les diverses pertes d'effet d'après les indications précédentes.

La perte d'effet due à l'imperfection du cycle se calcule d'après l'équation (415); nous y faisons $T_0 = T_1$, parce qu'ici la température de l'eau d'alimentation T_0 est identique à la température T_1 qui règne dans le condenseur; on trouve, à l'aide de la Table X, pour la température de la chaudière,

$t_2 = 148^\circ,29$, $\tau_2 = 0,43761$, et, pour la température du condenseur, $t_1 = 46^\circ,21$, $\tau_1 = 0,15561$ (*) :

$$\zeta_1 = 0,0772.$$

La deuxième perte d'effet provient d'une détente incomplète; le rapport de la détente est de $\frac{1}{6}$ dans notre machine, et on a pris $\mu = 1,135$ pour exposant de la courbe adiabatique qui correspond à $x_2 = 1$, d'après l'équation (259). On trouve, avec ces données,

$$\frac{\mu - \varepsilon^{\mu-1}}{\mu - 1} = 2,59153$$

pour l'expression qui figure dans l'équation (416), et il vient, pour la perte d'effet due à une détente incomplète,

$$\zeta_2 = 0,1852.$$

Supposons, en outre, que la différence entre la pression dans la chaudière et la pression à l'entrée du cylindre soit de 7,5 pour 100, $\alpha = 0,075$ d'après l'équation (404); nous trouvons, à l'aide de l'équation (417), pour la perte d'effet provenant de cette différence,

$$\zeta_3 = 0,0225.$$

La pression dans le condenseur a été supposée de $0^{atm},1$; prenons pour la véritable contre-pression $p'_1 = 0^{atm},2$, $\beta = 1$ d'après l'équation (407); la perte d'effet provenant de l'inégalité de la contre-pression et de la pression extérieure sera donc, d'après l'équation (408),

$$\zeta_4 = 0,0400.$$

(*) Ces valeurs de τ ne se trouvent pas dans le tableau auxiliaire de la page 307; mais si l'on se sert de l'équation (190) de M. Regnault (p. 254) pour déterminer la chaleur du liquide q, on peut calculer ces valeurs à l'aide de la formule

$$\tau = \int_0^t \frac{dq}{T} = 2,431834.\log\frac{273+t}{273} - 0,0002057.t + 0,00000045.t^2.$$

(*Voyez* p. 313 et 314.)

En supposant que la résistance constante, réduite à l'unité de surface du piston, soit de $0^{atm},07$, c'est-à-dire en posant (*voyez* p. 499)

$$f = 0,07 \times 10\,334 = 723^{kil},38,$$

on trouve, par l'équation (419), que la perte d'effet due aux résistances constantes de la machine est

$$\zeta_5 = 0,0280.$$

Je suppose la perte d'effet ζ_6 qui correspond aux résistances variables proportionnelle au travail disponible, et je l'évalue (*) égale à

$$\zeta_6 = 0,0850.$$

En additionnant toutes ces pertes d'effet et en retranchant leur somme de l'unité, je trouve, pour le véritable rendement η de cette machine à vapeur,

$$\eta = 0,5621.$$

Nous avons trouvé pour le travail disponible de la machine

$$N_m = 102,26 \text{ chevaux-vapeur.}$$

En multipliant N_m par η, j'obtiens, comme valeur du travail effectif,

$$N_e = 57,480 \text{ chevaux-vapeur.}$$

Pour montrer l'influence qu'exerce la quantité d'eau mélangée mécaniquement avec la vapeur, j'ai repris les calculs précédents, en supposant $x_2 = 0,85$; de sorte que le mélange de vapeur et de liquide qui vient de la chaudière entraîne avec lui 15 pour 100 d'eau. Les résultats des calculs sont rassemblés ci-dessous; on a répété les résultats précédents pour

(*) J'ai choisi les quantités α, β, f et ζ_6 en m'appuyant sur les résultats généraux de la pratique ordinaire; mais il est évident qu'il faut dorénavant déterminer exactement ces quantités : ce qui ne peut offrir de difficultés.

faciliter la comparaison ; on a pris, dans les deux cas, les mêmes coefficients α, β, f et ζ_6.

	Valeurs de x_2.	
	$x_2 = 1$	$x_2 = 0,85$
Poids du mélange de vapeur et de liquide en kilogrammes par seconde........M	0,1233	0,1450
Poids de la vapeur................Mx_2	0,1233	0,1231
Poids de l'eau entraînée......$M(1-x_2)$	0	0,0218
Travail disponible en chevaux-vapeur.N_m	102,26	105,30
Perte d'effet due à l'imperfection du cycle............................ζ_1	0,0772	0,0882
Perte d'effet due à la détente incomplète.............................ζ_2	0,1852	0,1894
Perte d'effet provenant de l'inégalité de la pression de la chaudière et de celle de la vapeur à son entrée dans le cylindre...........................ζ_3	0,0225	0,0218
Perte d'effet provenant de l'inégalité de la contre-pression et de la pression extérieure.......................ζ_4	0,0400	0,0388
Perte d'effet provenant de la résistance constante due au frottement.......ζ_5	0,0280	0,0272
Perte d'effet provenant de la résistance variable due au frottement.........ζ_6	0,0850	0,0850
Rendement de la machine............η	0,5621	0,5496
Travail effectif en chevaux-vapeur....N_e	57,480	57,873

Les différents nombres de ce tableau ne peuvent prétendre à une grande exactitude; mais je crois avoir montré, par l'exemple précédent, que la marche qui a été suivie nous permet d'approfondir la machine à vapeur. Quand nous aurons déterminé la perte correspondant à l'espace nuisible, nous reviendrons sur la discussion et sur la comparaison des différentes pertes d'effet. En ce moment, nous nous contenterons d'insister sur la valeur du rendement et du travail effectif. On voit d'abord que le vrai effet N_e de la machine à vapeur proposée, mesuré en chevaux-vapeur, est presque exactement le même dans les deux cas, que la vapeur soit

sèche et saturée, ou bien humide (avec 15 pour 100 d'eau) (*). Il en est de même pour le rendement et pour le travail disponible. Lorsque la vapeur entraîne en sortant de la chaudière 15 pour 100 d'eau, le rendement est diminué de

$$0,5621 - 0,5496 = 0,0125;$$

cette quantité d'eau produit donc une perte de travail de 1,2 pour 100 environ, laquelle ne se manifeste pas dans nos machines à vapeur par un changement dans le travail effectif, mais par une augmentation dans la consommation du combustible.

La quantité de chaleur qu'il faut fournir à la chaudière est, d'après l'équation (393), quand on a mis à la place de M sa valeur tirée de l'équation (412),

$$Q = \frac{x_2 r_2 + q_2 - q_0}{x_2 u_2 + \sigma} V_1.$$

Désignons par Q′ cette quantité de chaleur, quand la vapeur est sèche ($x_2 = 1$); alors

$$Q' = \frac{r_2 + q_2 - q_0}{u_2 + \sigma} V_1;$$

d'où l'on tire

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{(x_2 r_2 + q_2 - q_0)}{(r_2 + q_2 - q_0)} \frac{(u_2 + \sigma)}{(x_2 u_2 + \sigma)}.$$

Il faut faire $q_0 = q_1$, puisque la machine considérée est à condensation.

On peut calculer *directement*, à l'aide de cette formule, l'influence que l'eau mélangée à la vapeur exerce sur l'augmentation de la chaleur ou du combustible. Le rapport $\frac{Q}{Q'}$ est d'ailleurs égal au rapport des valeurs du travail disponible; on

(*) Lorsqu'on calcule la même machine avec les formules de M. de Pambour, en admettant aussi qu'il n'existe pas d'espace nuisible, on trouve, pour le travail effectif, 57,69 chevaux-vapeur.

a donc ici

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{105,30}{102,26} = 1,0298.$$

De là je conclus que, dans notre machine (sans espace nuisible), l'eau mêlée à la vapeur n'a augmenté la dépense de combustible que de 3 pour 100 environ, tandis que le rendement n'a été diminué que de 1,2 pour 100. Cela vient de ce que le travail effectif est un peu plus fort avec la vapeur humide qu'avec la vapeur sèche et saturée, la valeur de μ étant un peu plus petite dans le premier cas, et, par suite, la courbe adiabatique ne se rapprochant pas aussi rapidement de l'axe des abscisses.

La quantité de vapeur par heure et par cheval-vapeur (effectif) se calcule, du reste, dans les deux cas, à l'aide de l'expression

$$\frac{3600\,\mathrm{M}x_2}{\mathrm{N}_e} = 7,72 \quad \text{et} \quad 7,66,$$

et enfin on a pour la quantité de chaleur qu'il faut fournir par heure à la chaudière,

$$\frac{3600\,\mathrm{M}(x_2 r_2 + q_2 - q_0)}{\mathrm{N}_e} = 4675^{\mathrm{cal}} \quad \text{et} \quad 4782^{\mathrm{cal}}.$$

(*Voyez* le Tableau, p. 462 et 465.) Quand on compare ces nombres à ceux que nous donne l'expérience journalière, ils paraissent avantageux : c'est que nous n'avons pas tenu compte de l'espace nuisible, dont nous allons maintenant nous occuper.

2. *Machine à vapeur avec espace nuisible.* — L'espace nuisible exerce une influence importante sur le rendement. Ses inconvénients résultent principalement de ce que l'on introduit la vapeur de la chaudière dans un espace contenant de la vapeur à une faible tension; de sorte que la machine dépense plus de vapeur qu'une machine sans espace nuisible. Il est vrai que le travail qui correspond à cette masse additionnelle de vapeur n'est pas entièrement perdu, puisqu'elle participe à la détente. Malgré cela, la perte de travail est en-

core assez grande pour qu'on ne puisse pas négliger l'influence de l'espace nuisible dans l'appréciation des machines. En tenant compte de cette influence, on rend à la vérité les formules plus compliquées; aussi, pour que le lecteur puisse suivre plus facilement mes raisonnements, j'ai étudié d'abord la machine à vapeur sans tenir compte de son espace nuisible. Nous allons maintenant nous en occuper.

Supposons qu'au moment où la vapeur entre dans le cylindre, le piston se trouve près de la fin de sa course et qu'il soit presque en repos. Soient M' la quantité de vapeur et de liquide qui se trouve derrière le piston, x' la quantité spécifique de la vapeur, t' et p' la température et la pression, t_2 et p_2 la température et la pression dans la chaudière; la quantité de chaleur Q' qu'il faut fournir à la chaudière *pour remplir de vapeur* (*provenant de la chaudière*) *l'espace nuisible* sera, d'après les indications des pages 373 et 374,

$$Q' = M' \left[q_2 - q' + x' u' \left(\frac{\rho_2}{u_2} - \frac{\rho'}{u'} \right) \right],$$

car l'introduction de la chaleur a lieu sous une pression à peu près constante.

Désignons toujours par M le poids du mélange de vapeur et de liquide qui serait fourni dans le cas où il n'y aurait pas d'espace nuisible, par x la quantité spécifique de la vapeur dans le mélange qui se rend de la chaudière au cylindre, et par x_2 la quantité spécifique de la vapeur à la fin de l'introduction de la vapeur, c'est-à-dire au commencement de la détente.

S'il n'y avait pas d'espace nuisible, la quantité de chaleur Q″ qu'il faudrait introduire dans la chaudière pendant l'admission de la vapeur serait

$$Q'' = M x r_2.$$

On obtient la quantité de chaleur qu'il faut fournir à la chaudière par coup de piston pendant l'admission de la vapeur, quand il y a un espace nuisible, en faisant la somme des deux

quantités Q′ et Q″

$$Q' + Q'' = Mxr_2 + M'\left[q_2 - q' + x'u'\left(\frac{\rho_2}{u_2} - \frac{\rho'}{u'}\right)\right].$$

On peut trouver encore une autre expression de cette quantité. Appelons M_e la quantité de vapeur et de liquide qui passe véritablement dans le cylindre par coup de piston; la quantité de vapeur *effective* par coup de piston est donc $M_e x$. Comme cette quantité est produite dans la chaudière sous la pression constante p_2, la quantité de chaleur qu'elle dépense est $M_e x r_2$, et cette valeur est identique avec celle de $Q' + Q''$ que nous venons de calculer.

Nous avons donc l'équation

$$(423)\qquad M_e r x_2 = Mxr_2 + M'\left[q_2 - q' + x'u'\left(\frac{\rho_2}{u_2} - \frac{\rho'}{u'}\right)\right].$$

Le second terme du deuxième membre représente ce qu'il faut ajouter à la quantité de chaleur que prend une machine sans espace nuisible pour avoir la quantité de chaleur nécessaire à une machine avec espace nuisible.

Soient maintenant V′ le volume de l'espace nuisible et, comme précédemment, V_1 le volume que parcourt le piston pendant l'introduction de la vapeur; on a

$$(424)\qquad V' = M'(x'u' + \sigma),$$

$$(425)\qquad V_1 = M(xu_2 + \sigma);$$

d'où l'on tire

$$V' + V_1 = M(xu_2 + \sigma) + M'(x'u' + \sigma).$$

Mais, en réalité, c'est la masse M_e qui passe dans le cylindre, et la quantité spécifique de vapeur, au commencement de la détente, doit être désignée par x_2. Nous avons donc aussi

$$V' + V_1 = (M_e + M')(x_2u_2 + \sigma).$$

En égalant les deux valeurs de $V' + V_1$, il vient donc

$$(M_2 + M')(x_2u_2 + \sigma) = M(xu_2 + \sigma) + M'(x'u' + \sigma).$$

On peut, dans cette dernière formule, négliger partout la quantité σ, parce qu'elle est très-petite, et aussi parce que M_e et M diffèrent très-peu l'une de l'autre; nous trouvons alors

$$(426)\qquad (M_e + M')\,x_2 u_2 = M x_2 u_2 + M' x' u'.$$

Tirons parti des dernières équations. On aurait, pour une machine à vapeur construite, le volume V' de l'espace nuisible et le volume V_1 parcouru par le piston pendant l'introduction de la vapeur. Quand on donne en outre la pression et la quantité spécifique de la vapeur x' dans l'espace nuisible au commencement de l'admission de la vapeur, on peut déterminer les quantités M' et M à l'aide des équations (424) et (425), ainsi que la quantité de vapeur et de liquide M_e qu'on envoie au cylindre par coup de piston. Enfin l'équation (426) donne la quantité spécifique de la vapeur au commencement de la détente.

Les formules suffisent pour montrer que la quantité spécifique de la vapeur x_2 ne coïncide pas en général avec x; *qu'il y a par conséquent à cause de l'espace nuisible, pendant que la vapeur entre dans le cylindre, ou bien évaporation d'une partie de l'eau mélangée, ou bien condensation d'une partie de la vapeur.*

Approfondissons cette question. L'élimination de la quantité Mx entre les équations (423) et (426) conduit, après quelques réductions faciles, à l'équation

$$(427)\quad (M_e + M')\,x_2 = M_e x + \frac{M'}{r_2}\left[x' u'\left(\frac{\rho'}{u'} + A p_2\right) - (q_2 - q')\right].$$

Lorsqu'on néglige la quantité M', qui est petite par rapport à M_e, dans la somme $(M_e + M')$, qu'on divise par M_e et qu'on prend approximativement $M_e = M$, on trouve

$$(427')\quad x_2 = x + \frac{M'}{M r_2}\left[x' u'\left(\frac{\rho'}{u'} + A p_2\right) - (q_2 - q')\right].$$

Comme la quantité spécifique de la vapeur x' sera, dans la plupart des cas, très-peu différente de 1, on conclut de cette

formule que $x_2 > x$, c'est-à-dire qu'il y a évaporation d'une partie de l'eau mélangée avec la vapeur.

Ce résultat remarquable a été énoncé pour la première fois par M. Clausius (*), qui y est arrivé par une marche différente, et qui l'a représenté par d'autres formules. En rapprochant ce résultat de ceux qu'on a déjà obtenus, on peut dire *qu'en général il y a évaporation d'eau pendant l'introduction de la vapeur dans le cylindre, et condensation partielle pendant la détente.*

On peut transformer encore l'équation (427). Lorsqu'on néglige la quantité σ dans les équations (424) et (427), ce qui est permis dans la plupart des cas, on trouve

$$M' = \frac{V'}{x'u'} \quad \text{et} \quad M = \frac{V_1}{xu_2}.$$

Soient toujours V le volume total que le piston parcourt dans une course, ε' le rapport $\frac{V'}{V}$ et ε le rapport de détente $\frac{V_1}{V}$; alors on a

$$\frac{M'}{M} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\frac{xu_2}{x'u'}.$$

En outre, en négligeant la quantité $q_2 - q'$ dans l'équation (427'), ce qui est permis tant qu'on peut négliger σ devant $x'u'$, on trouve

$$(428) \qquad x_2 = x\left[1 + \frac{\varepsilon' u_2}{\varepsilon r_2}\left(\frac{\rho'}{u'} + Ap_2\right)\right],$$

équation qui signale, au moins d'une manière générale, les circonstances qui influent le plus sur le changement de la quantité spécifique de vapeur pendant l'admission de la vapeur.

Les résultats précédents subissent un petit changement quand on tient compte, comme l'a fait M. Clausius (*loco citato*), de la différence qui existe entre la pression dans la chaudière et la pression à l'entrée du cylindre. Mais les formules se compliquent tellement, qu'il devient difficile de les suivre. En

(*) *Mémoires* déjà cités.

outre, nous n'avons aucun moyen de déterminer exactement cette différence de pression. Jusqu'à ce que nous sachions la mesurer, je considère l'emploi des formules simples données plus haut comme parfaitement suffisant pour la pratique.

Voulant montrer combien est facile l'usage de ces formules, je reviens à l'exemple précédent (p. 503).

Je suppose que la quantité spécifique de vapeur dans le mélange qui vient de la chaudière soit $x = 0,85$, que l'espace nuisible V′ soit les 0,05 de tout l'espace parcouru par le piston (M. de Pambour adopte ce nombre pour moyenne), et je prends

$$V_1 = 0^{mc},0949,$$

$$V' = 0,05 \times V = 0^{mc},01485,$$

$$\varepsilon' = 0,05 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{1}{6}.$$

On déduit d'abord de l'équation 425

$$M = 0,1450.$$

Nous avons pris la contre-pression $p'_1 = 0^{atm},2$; si j'admets, pour plus de simplicité, que la machine travaille sans compression, cette valeur sera aussi celle de la pression dans l'espace nuisible au commencement de l'admission de la vapeur, et d'après la Table X (de l'Appendice), $u' = 7,5421$; en supposant qu'on se soit servi d'une vapeur sèche et saturée, on aura $x' = 1$, et l'équation (424) donnera alors, pour la masse M′,

$$M' = 0^{kil},00197.$$

Pour trouver le poids M_e de liquide et de vapeur qu'il faut fournir à cette machine par coup de piston, il suffit de mettre les valeurs précédentes de M et M′ dans l'équation (423) et d'y substituer en même temps les fonctions de la température correspondant à la pression de la vapeur $p_2 = 4^{atm},5$ et à la pression p', fonctions qu'on trouve dans la Table X. On obtient ainsi

$$M_e = 0^{kil},1820.$$

La quantité de vapeur contenue dans ce mélange est

$$M_e x = 0^{kil},1547,$$

et la quantité de liquide

$$M_e(1 - x) = 0^{kil},0273.$$

Le poids du mélange, quand on faisait abstraction de l'espace nuisible, était seulement $0^{kil},1450$.

La machine exécutant 30 tours par minute, et par suite 60 coups de piston, les nombres que nous venons de donner conviennent pour une seconde de temps.

On trouve la quantité spécifique de la vapeur x_2 à la fin de l'admission, en mettant les nombres obtenus dans l'équation (426); on obtient

$$x_2 = 0,871,$$

valeur plus grande que celle de x. La quantité de vapeur contenue dans le cylindre, *au commencement de la détente*, est donc

$$M_e x_2 = 0^{kil},1585,$$

et la quantité d'eau

$$M_e(1 - x_2) = 0^{kil},0235.$$

Lorsque la masse de vapeur et de liquide M_e qu'on emploie par coup de piston, est déterminée d'après la manière indiquée, on trouve le travail disponible à l'aide de l'équation (413), dans laquelle on met cette valeur de M_e à la place de M et x à la place de x_2; cela donne

(429) $$L_m = \frac{M_e(xr_2 + q_2 - q_0)}{AT_2}(T_2 - T_1).$$

Quand la machine fait n tours par minute, l'équation (414) donne pour le travail disponible en chevaux-vapeur,

(430) $$N_m = \frac{2n}{60.75} M_e(xr_2 + q_2 - q_0)\frac{T_2 - T_1}{AT_2}.$$

En appliquant cette formule à la machine en question, on

obtient, pour le travail disponible par coup de piston,

$$L_m = 9912^{kil},68,$$

et par seconde

$$N_m = 132,169 \text{ chevaux-vapeur.}$$

(*Voyez* p. 507, où l'on a trouvé, en ne tenant pas compte de l'espace nuisible, $N_m = 105,30$ chevaux-vapeur.)

Les résultats des calculs précédents sont vrais à condition qu'il n'y ait dans l'espace nuisible, au commencement de l'entrée de la vapeur, que de la vapeur saturée non mêlée d'eau. Pour rendre compte de l'influence de l'eau qui pourrait être mélangée par hasard à la vapeur, j'ai calculé aussi le même exemple en supposant l'unité de poids du mélange composée de $0^{kil},40$ d'eau et de $x' = 0^{kil},60$ de vapeur. J'ai trouvé pour la quantité de vapeur et de liquide qui remplit l'espace nuisible, $M' = 0,00328$; pour la masse qu'il faut prendre dans la chaudière $M_e = 0,1831$, et pour la quantité spécifique de vapeur au commencement de la détente $x_2 = 0,862$: les dernières valeurs des deux masses qui ont le plus d'importance ici diffèrent à peine de celles que nous avons trouvées tout à l'heure pour $x' = 1$. Nous pouvons conclure de là que la présence de l'eau dans l'espace nuisible exerce une faible influence dans les circonstances ordinaires.

Cela se déduit aussi directement des formules (423) à (426); dans la première de ces équations, on peut toujours négliger la quantité $q_2 - q'$, qui est relativement très-petite; on obtient alors

$$M_e x r_2 = V_1 \frac{r_2}{u_2} + V' \left(\frac{\rho_2}{u_2} - \frac{\rho'}{u'} \right)$$

et

$$(M_e + M') x_2 u_2 = V_1 + V'.$$

Ces équations montrent que M_e dépend presque uniquement du volume V', mais ne dépend pas de la manière dont l'espace nuisible est rempli, et que x_2 diffère très-peu de x, parce que M' est toujours très-petit par rapport à M_e.

Il nous reste à montrer de quelle manière on peut déterminer les différentes pertes d'effet et le rendement, en tenant compte de l'espace nuisible.

Nous conserverons d'ailleurs les hypothèses faites précédemment (p. 477), et nous effectuerons des calculs analogues à ceux de la page 479.

Au commencement de la détente, il y a dans le cylindre une quantité de vapeur et de liquide $M_e + M'$; la quantité spécifique de la vapeur est x_2, et par suite le volume de cette masse a pour expression $(M_e + M')(x_2 u_2 + \sigma)$; au commencement de l'entrée de la vapeur, l'espace nuisible contient la masse M', et son volume est par suite $M'(x'u' + \sigma)$; on déduit de là, pour le volume que parcourt le piston pendant l'admission de la vapeur,

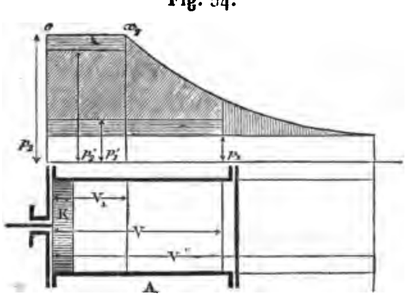
$$V_1 = (M_e + M')(x_2 u_2 + \sigma) - M'(x'u' + \sigma);$$

l'expression du travail effectué pendant l'admission sera alors

$$(431) \quad L' = [(M_e + M')(x_2 u_2 + \sigma) - M'(x'u' + \sigma)]p_2.$$

Si l'on continue la détente jusqu'à ce que la pression soit

Fig. 54.



descendue à la pression extérieure p_1, on aura pour le travail de la détente, lequel était représenté précédemment par l'équation (386):

$$(432) \quad L'' = \frac{(M_e + M')}{A}(q_2 - q_1 + x_2 \rho_2 - x_1 \rho_1).$$

Comme le piston parcourt en revenant l'espace

$$(M_e + M')(x_1 u_1 + \sigma) - M'(x' u' + \sigma),$$

on a pour le travail de la contre-pression

$$(433) \quad L''' = [(M_e + M')(u_1 x_1 + \sigma) - M'(x' u' + \sigma)]\, p_1.$$

Le travail total qu'on gagne par coup de piston est donc, en unités de chaleur,

$$AL = A(L' + L'' - L'''),$$

et ce travail est représenté par la totalité de la surface ombrée de la *fig.* 54.

En substituant dans cette formule les expressions de L', L'' et L''' que nous venons de trouver, et en négligeant tous les termes qui contiennent σ comme des quantités très-petites, on trouve

$$AL = (M_e + M')(q_2 - q_1 + r_2 x_2 - r_1 x') - AM' x' u' (p_2 - p_1).$$

Substituons à la quantité spécifique de la vapeur x_1 relative à la fin de la détente, sa valeur donnée par l'équation (390), et retranchons ensuite les valeurs de AL du travail disponible AL_m que donne l'équation (429), nous trouverons, après quelques réductions, pour la perte de travail qui provient de l'imperfection du cycle et de l'influence de l'espace nuisible :

$$(434) \quad \left\{ \begin{aligned} AL_1 = \frac{M_e}{T_2}[(q_1 - q_0)(T_2 - T_1) + T_1 T_2(\tau_2 - \tau_1) \\ - T_1(q_2 - q_1)] \\ + M'\Big[A' x' u'(p_2 - p_1) - \frac{r_2 x_2}{T_2}(T_2 - T_1) \\ -(q_2 - q_1) + T_1(\tau_2 - \tau_1)\Big] \\ - M_e \frac{(x_2 - x) r_2}{T_2}(T_2 - T_1). \end{aligned} \right.$$

Mais le premier terme du deuxième membre est identique à l'expression (396) de la page 486; il représente donc la perte de travail qui est due à l'imperfection du cycle, tandis que les deux autres termes expriment la perte de travail qui provient

de l'espace nuisible. Séparons la formule en deux parties qui correspondent à ces deux pertes de travail, et divisons la première par le travail disponible AL_m, donné par l'équation (429); on aura alors, comme à la page 487, la perte d'effet due à l'imperfection du cycle :

$$(435) \qquad \zeta_1 = \frac{T_1 T_2(\tau_2 - \tau_1) - T_0(q_2 - q_1)}{(xr_2 + q_2 - q_0)(T_2 - T_1)}.$$

Cette perte d'effet se calcule donc à l'aide de la même formule, *que la machine possède un espace nuisible ou non,* pourvu toutefois qu'on désigne par x la quantité spécifique de la vapeur du mélange qui arrive de la chaudière.

Divisons d'autre part la seconde partie de l'équation (434) par AL_m; nous trouvons la perte de travail qui provient de la présence seule de l'espace nuisible. Mais avant d'effectuer cette division, remplaçons $M_2(x_2 - x)r_2$ par sa valeur tirée de l'équation (427), ce qui donne

$$M_2(x_2 - x)r_2 = M'[x'(\rho' + Ap_2u') - (q_2 - q') - x_2r_2].$$

Portant cette expression dans la deuxième partie de l'équation (434), et faisant des réductions, on obtient *la perte d'effet qui provient de l'espace nuisible :*

$$(436) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta_7 = \frac{M'}{AT_2 L_m} \{ & x'[AT_2u'(p_2 - p_1) - (\rho' + Ap_2u')(T_2 - T_1)] \\ & + T_1 T_2(\tau_2 - \tau_1) - T'(q_2 - q_1)\}. \end{aligned} \right.$$

Dans les cas qui se présentent ordinairement dans la pratique, on peut négliger la différence des deux derniers termes du second membre de cette équation, comme étant très-petits relativement au premier terme, et remplacer $M'x'u'$ par le volume V', tant que la quantité σ est négligeable dans l'expression $x'u' + \sigma$; on obtient alors

$$(436') \qquad \zeta_7 = \frac{V'}{L_m}\left[(p_2 - p_1) - \left(\frac{\rho'}{u'} + Ap_2\right)\frac{T_2 - T_1}{AT_2}\right].$$

Ces formules ne renferment pas rigoureusement, il est vrai, *toute* l'influence de l'espace nuisible, parce que l'effet de la

détente dépend aussi de la grandeur de l'espace nuisible; je tiendrai compte de cette influence en calculant la perte qui est causée par une détente incomplète. Étudions maintenant de plus près cette dernière perte d'effet.

D'après ce qui précède, on peut considérer comme connus la quantité spécifique de la vapeur x_2 et le volume du mélange $V' + V_1$ au commencement de la détente, et aussi le volume $V' + V$ du mélange à la fin de la détente. Désignons par μ' l'exposant de la courbe adiabatique qui correspond à la quantité spécifique de la vapeur x_2, et qui est déterminé par l'équation (259); alors l'équation (258), p. 333, donne pour le travail de la détente

$$\frac{(V_1 + V')p_2}{\mu' - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1 + V'}{V + V'}\right)^{\mu'-1}\right].$$

Le travail effectué pendant l'admission de la vapeur et le travail de la contre-pression sont respectivement $V_1 p_2$ et $V p_1$.

Le travail par coup de piston L' étant égal à la somme des deux premiers travaux diminuée du troisième, on a, en appelant, comme ci-dessus, ε le rapport de la détente $\frac{V_1}{V}$ et ε' le rapport du volume de l'espace nuisible au volume du cylindre $\frac{V'}{V}$,

$$(437) \qquad L' = V p_2 \left\{ \varepsilon + \frac{(\varepsilon + \varepsilon')}{\mu' - 1}\left[1 - \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{1 + \varepsilon'}\right)^{\mu'-1}\right] - \frac{p_1}{p_2} \right\}.$$

On a trouvé plus haut, pour la détente complète, $L = L_m - L_1$, L_1 étant déterminé à l'aide de l'équation (434). Retranchons L' de L; nous obtenons, pour la perte de travail par coup de piston due à une détente incomplète, $L_m - L_1 - L'$, et, par suite, pour la perte d'effet correspondante ζ_2,

$$\zeta_2 = 1 - \frac{L_1}{L_m} - \frac{L'}{L_m}.$$

Comme $\frac{L_1}{L_m}$ n'est autre chose que $\zeta_1 + \zeta_7$, quand on déduit ces deux dernières quantités des équations (435) et (436), la

perte d'effet qui provient de la détente incomplète a pour expression

$$(438)\quad \zeta_2 = 1 - \zeta_1 - \zeta_7 - \frac{Vp_2}{L_m}\left\{\varepsilon + \frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\mu'-1}\left[1-\left(\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{1+\varepsilon'}\right)^{\mu'-1}\right] - \frac{p_1}{p_2}\right\}.$$

Cette formule termine nos recherches, car les autres pertes d'effet se calculent exactement comme pour une machine *sans* espace nuisible, à l'aide des formules (417) à (419); il faut seulement y mettre pour L_m sa valeur déduite de l'équation (429).

On pourrait tout au plus calculer encore la compression de la vapeur derrière le piston et les pertes de travail et d'effet qui en résultent. Je me dispense d'ajouter ici ces calculs, parce qu'ils n'offrent aucune difficulté. Je me borne à remarquer que les formules données n'éprouvent par là aucun changement dans leurs formes; seulement la masse M' contenue dans l'espace nuisible, sa pression p' et sa quantité spécifique de vapeur x' prennent d'autres valeurs. Le travail disponible de la machine change également, parce que le poids M_e du mélange de vapeur et d'eau augmente.

Appliquons les formules précédentes à un exemple numérique, et prenons pour cela la machine déjà calculée plus haut, que nous avons évaluée à 30 chevaux-vapeur (p. 503). Pour l'espace nuisible, nous posons $\varepsilon = 0{,}05$; pour la pression dans cet espace, nous prenons $p' = 0^{atm},2$, et nous supposons que $x' = 1$, c'est-à-dire qu'il n'y ait que de la vapeur saturée et sèche au commencement de l'entrée de la vapeur dans l'espace nuisible.

Avec ces données, on a déjà trouvé le poids de la masse de vapeur et de liquide que la chaudière fournit par coup de piston; il est

$$M_e = 0^{kil},1820.$$

La quantité de vapeur est $M_e x = 0^{kil},1547$; les deux nombres correspondent aussi à une seconde de temps, puisque la machine fait 30 tours par minute.

Le poids du mélange qui remplit l'espace nuisible avait pour valeur $M' = 0{,}00197$, et la quantité spécifique de la va-

peur dans le cylindre au commencement de la détente était $x_2 = 0,871$; enfin le travail disponible par coup de piston était

$$L_m = 9912^{kgm},68,$$

et par seconde

$$N_m = 132,169 \text{ chevaux-vapeur.}$$

Avec $x_2 = 0,871$, l'équation (259) donne $\mu' = 1,122$ pour l'exposant de la courbe adiabatique.

En adoptant la même marche que précédemment, on obtient :

1° La perte d'effet provenant de l'imperfection du cycle [équation (435)]............	$\zeta_1 = 0,0882$
2° La perte d'effet provenant de l'espace nuisible [équation (436)]......................	$\zeta_7 = 0,0414$
3° La perte d'effet provenant d'une détente incomplète [équation (438)]............	$\zeta_2 = 0,2358$
4° La perte d'effet provenant de la différence des pressions de la chaudière et du cylindre [équation (417)]...............	$\zeta_3 = 0,0174$
5° La perte d'effet provenant de l'inégalité de la contre-pression et de la pression extérieure [équation (418)]..............	$\zeta_4 = 0,0309$
6° La perte d'effet due à la résistance constante [équation (419)].....................	$\zeta_5 = 0,0216$
7° La perte d'effet due à la résistance variable.	$\zeta_6 = 0,0850$

Lorsqu'on additionne toutes les pertes d'effet et qu'on les retranche de l'unité, on obtient le vrai rendement de cette machine

$$\mu = 0,4970,$$

et son travail effectif

$$N_e = \eta N_m = 65,69 \text{ chevaux-vapeur } (*).$$

Nous avons trouvé plus haut (p. 507), pour la même ma-

(*) Lorsqu'on calcule la même machine d'après l'équation connue de M. de

chine, en supposant qu'il n'y ait pas d'espace nuisible, $\eta = 0,5496$, et $N_e = 57,873$ chevaux-vapeur. La quantité de vapeur nécessaire à cette machine par heure et par cheval (effectif) est

$$\frac{3600\,M_e x}{N_e} = 8^{kil},478,$$

et la quantité de chaleur qu'il faut envoyer par heure et par cheval à la chaudière est

$$\frac{3600\,M_e(x r_2 + q_2 - q_0)}{N_e} = 5287^{cal},1.$$

(*Comparez* les indications correspondantes, p. 509.)

Supposons maintenant qu'on chauffe la chaudière avec du charbon de terre, dont la chaleur de combustion est de 7500 calories, et que, conformément à l'expérience, il entre dans la chaudière les 0,527 de la quantité de chaleur qui devient libre sur la grille après une combustion complète (*); alors la quantité de chaleur qui entre dans la chaudière pour 1 kilogramme de charbon serait $0,527 \times 7500 = 3952^{cal},5$. La quantité de charbon qu'il faut consommer par heure et par cheval serait donc

$$\frac{5287,1}{3952,5} = 1^{kil},338.$$

Pambour, qui est, avec nos notations,

$$N_e = \frac{Fc(\varepsilon+\varepsilon')(a+p_2)}{75(1+\delta)}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon'} + \text{lognép}\left(\frac{1+\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\right) - \frac{a+f+p'}{(\varepsilon+\varepsilon')(a+p_2)}\right],$$

et dans laquelle on admet $a = 3019$, $f = 766$, $\delta = 0,14$ et $p' = 2650$; il vient

$$N_e = 65,13 \text{ chevaux-vapeur},$$

nombre qui coïncide presque avec le mien. Je montrerai d'ailleurs plus tard que les formules de M. de Pambour, et aussi celles de MM. Morin et Poncelet, peuvent se déduire facilement de mes équations comme formules approximatives.

(*) *Voyez* le Mémoire de l'auteur : *Sur l'emploi des ventilateurs pour activer le tirage dans le chauffage des chaudières à vapeur* (*Civilingenieur*, t. IV, p. 127).

Comparé aux indications ordinaires, ce nombre paraît petit; mais cela s'explique par ce fait : que nous avons considéré une machine construite avec soin, qui travaille avec une forte (sextuple) détente et avec condensation. D'ailleurs le rendement calculé et le travail effectif sont sans doute encore un peu trop grands, parce que nous n'avons pas pu tenir compte de *toutes* les pertes de travail (par exemple des pertes de vapeur et de chaleur), et parce que les pertes d'effet calculées ne sont pas non plus déterminées assez exactement, à cause du manque de données expérimentales.

Mais les résultats de nos calculs sont très-utiles quand il s'agit de faire des comparaisons et des *discussions*.

On voit d'abord que la présence d'un espace nuisible augmente le travail effectif de la machine. Ce fait, que les formules de M. de Pambour indiquent également, s'explique simplement par l'augmentation du travail de la détente; la quantité de vapeur qui se détend est plus grande, et c'est pour cela que la courbe adiabatique se rapproche moins rapidement de l'axe des abscisses. Le rendement d'une machine avec espace nuisible est, dans tous les cas, d'autant plus petit que cet espace nuisible est plus grand; il est maximum, quand toutes les circonstances sont les mêmes, pour une machine sans espace nuisible; dans notre exemple, la différence des rendements est $0,5496 - 0,4970 = 0,0526$, et c'est là la véritable perte qui provient de l'espace nuisible. La valeur qui a été indiquée dans le tableau précédent ne représente pas la perte entière, comme je l'ai déjà fait remarquer. L'espace nuisible change, comme le montrent les calculs précédents, les valeurs de presque toutes les pertes d'effet; il augmente les unes, notamment celle qui correspond à une détente incomplète, et diminue les autres. Je pense qu'il vaut mieux évaluer cette perte comme je l'ai fait, afin de donner sur cette question une vue d'ensemble, que représenter dans une *seule* expression *toute* l'influence de l'espace nuisible.

Quant au *rendement* de notre machine, que j'ai déjà désignée comme une machine construite avec soin, nous remar-

querons que la valeur

$$\eta = 0{,}497$$

est à peu près celle qui est adoptée pour des turbines ordinaires. Je conclus de là que *nos machines à vapeur peuvent être encore perfectionnées.*

Un regard jeté sur le même tableau nous montre que, *dans la pratique, on a suivi une bonne voie dans les efforts qu'on a faits pour améliorer les machines à vapeur.*

La perte d'effet due à une détente incomplète se distingue des autres par son importance. On a donc eu raison de chercher à construire des machines (systèmes Woolf, Sims, Legavrian) qui aient une détente aussi grande que possible; mais il est aussi rationnel de chercher *le rapport de détente le plus avantageux.* Dans les machines sans condensation, on pourrait déjà réaliser une détente complète telle que la théorie l'indique; mais il n'en est pas de même pour des machines avec condensation à moyenne pression, car la condition d'une détente complète conduirait à des dimensions énormes pour le cylindre. La question est alors de trouver la limite, et il ne faut pas seulement tenir compte de l'emploi le plus favorable de la vapeur et du combustible, mais aussi de l'intérêt du capital nécessaire pour établir la machine (*).

On s'est efforcé aussi de construire les machines le plus simplement possible pour diminuer les résistances constantes et variables provenant du frottement; puis de disposer l'admission et la sortie de la vapeur, et surtout la distribution de manière à diminuer les pertes d'effet qui proviennent de la différence des pressions qui s'exercent dans la chaudière, le cylindre et le condenseur. Enfin, dans ces derniers temps, on a diminué avec avantage l'espace nuisible dans les machines Corliss. On peut donc dire que les constructeurs cherchaient

(*) *Voyez* sur ces questions les excellents travaux de MM. Völkers et Gustave Schmidt : *L'Indicateur*, par Völkers; *Rapport sur* l'Indicateur de Völckers, par G. Schmidt, dans le *Bulletin de la Société des Ingénieurs autrichiens*, xv[e] année, p. 193 et 217.

à perfectionner les machines à vapeur en diminuant les différentes pertes d'effet à la fois, mais d'une petite quantité chacune; nous voyons maintenant que cette marche est conforme à la théorie. C'est peut-être la meilleure preuve de la justesse des propositions que j'ai développées plus haut.

Il n'y a qu'une perte d'effet qu'on n'a pas considérée jusqu'à présent, et dont on n'a pas pu tenir compte : c'est celle qui provient de l'imperfection du cycle. Quand nous comparons entre elles les différentes pertes d'effet que nous avons évaluées (p. 522), nous voyons que cette perte, désignée par ζ_1, est notable.

Il est intéressant de chercher *s'il ne serait pas possible de changer le cycle des machines à vapeur de telle sorte qu'il se rapprochât davantage du cycle complet que la théorie indique.*

Je crois cela possible. Je vais exposer ici mes propres idées sur ce perfectionnement. Il importe, avant tout, de faire comprendre les défauts; quand on les connaîtra bien et qu'on sera convaincu de la nécessité d'y remédier, on trouvera bientôt les moyens de les faire disparaître complétement, ou au moins en partie.

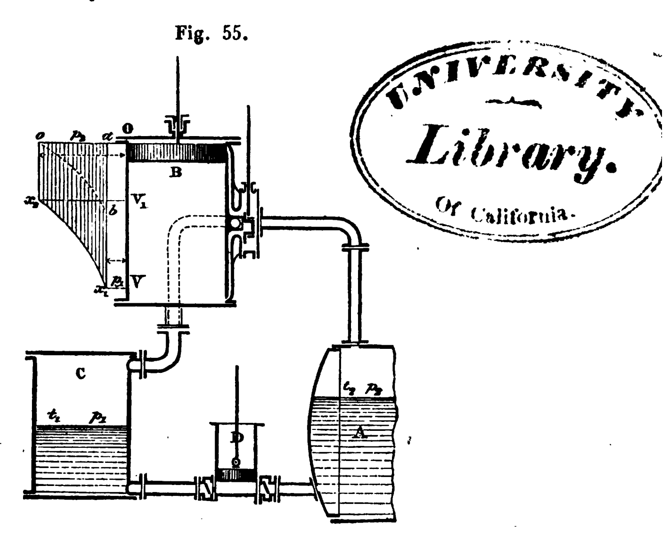
Reprenons une machine qui travaille dans les conditions les plus favorables. J'ai déjà fait remarquer (p. 489) que l'emploi de la vapeur *devant* le piston (entrée et détente) est conforme à la théorie dans nos machines à vapeur, mais que l'imperfection provient de la manière dont se comporte la vapeur *derrière* le piston.

Dans le diagramme aox_2x_1b (*fig.* 55), la portion aob, qui contient toute l'imperfection du cycle, comme on l'a montré (p. 489), devrait disparaître.

Il est vrai que les véritables diagrammes obtenus à l'aide de l'indicateur ne renferment pas cette portion de surface, au moins dans la forme indiquée ici; ces diagrammes ont presque la forme x_2x_1bo, à laquelle conduit le cycle parfait. Mais il est inexact de tirer de la ressemblance qui existe entre un diagramme réel et celui qui correspond à un cycle parfait cette conclusion : que le cycle de nos machines à vapeur est un cycle parfait.

Voici quelle est la différence. Dans les machines réelles, nous ne poussons pas dans le condenseur ou dans l'atmo-

Fig. 55.



sphère toute la vapeur qui se trouve derrière le piston. Quand une partie est sortie, on ferme le tuyau d'échappement, spécialement dans les machines où la fermeture est opérée par des registres, et on *comprime* la vapeur qui reste. Il suit de là que l'espace nuisible contient, au commencement de l'admission, de la vapeur dont la pression est supérieure à la contre-pression ordinaire, et que, pour remplir cet espace nuisible, il faut moins de vapeur de la chaudière; la perte d'effet qui provient de la présence de cet espace est par suite diminuée. On a pensé qu'il serait avantageux de régler la compression de telle manière, qu'au commencement de l'admission l'espace nuisible fût rempli de vapeur ayant la pression de celle qui arrive de la chaudière. Il est possible qu'une compression effectuée de cette manière fasse complétement disparaître la perte d'effet due à l'espace nuisible; mais on ne doit pas oublier qu'on crée alors une nouvelle perte d'effet, laquelle provient de la compression, et on doit se demander si cette perte n'annule pas complétement le gain qu'on cherche à réaliser.

Il y a encore un autre point à considérer : pour neutraliser de cette manière l'effet de l'espace nuisible, il ne suffit pas de disposer la compression de sorte que finalement la pression de la vapeur dans l'espace nuisible soit égale à la pression qui règne dans la chaudière; il faut encore savoir si la composition du mélange contenu dans l'espace nuisible est celle de la vapeur nouvelle. Mais, dans la plupart des cas, la vapeur de l'espace nuisible est probablement surchauffée. Lorsque le piston rétrograde suivant le chemin $x_1 b$ (*fig.* 55), on fait sortir du cylindre le volume de vapeur qui correspond à ce trajet, et quand le piston se trouve en b, la vapeur qui est restée en arrière ne contient probablement que *peu* d'eau; si alors on comprime ce mélange, la compression sera généralement accompagnée de *la vaporisation* d'une partie ou bien de la totalité de l'eau qui existait au commencement (*voyez* p. 317); par suite, il peut arriver qu'à la fin de la compression la vapeur de l'espace nuisible soit surchauffée. Malheureusement on ne peut pas jusqu'ici savoir comment se fait le mélange de cette vapeur surchauffée avec la vapeur saturée qui vient de la chaudière; mais cette question importe peu en ce moment, mon but principal étant de montrer que, dans nos machines à vapeur, la compression est accompagnée d'une *vaporisation* de l'eau mêlée à la vapeur, et qu'il peut arriver dans certaines circonstances que la vapeur restée en arrière passe à l'état de surchauffe.

Les choses sont bien autres dans une machine parfaite. La vapeur qui se trouve derrière le piston ne doit pas être expulsée en partie sur le trajet $x_1 b$ (*fig.* 55); mais toute la masse doit être conservée dans le cylindre, et, pendant que le piston décrit le chemin, $x_1 b$, de la chaleur doit lui être soustraite sous une pression constante p_1 (p. 456), de telle manière qu'il y ait dans le cylindre, au moment où le piston arrive à la position b, un mélange qui se transforme *complétement en eau*, si on le comprime sans lui envoyer ni lui soustraire de la chaleur. Pour abréger, je dirai que, dans un cycle complet, toute la vapeur qui reste doit être *liquéfiée* pendant la période de compression, et cela exige simplement une certaine compres-

sion du mélange au moment où le piston occupe la position b; la valeur de x_4, qui détermine cette composition, peut facilement se calculer d'après l'équation (367), p. 456.

Prenons, par exemple, une machine à vapeur sans condensation ($p_1 = 1$ atmosphère), qui travaille avec de la vapeur à 5 atmosphères; la formule citée donne pour ce cas (*voyez* p. 456)

$$x_4 = 0,0927.$$

L'unité de poids du mélange contenu derrière le piston devrait donc être composée de $0^{kil},0927$ de vapeur et de $0^{kil},9073$ d'eau. On se demande naturellement si l'on ne peut pas réaliser cette composition du mélange et opérer ensuite la compression conformément à la théorie. Pendant le trajet $x_1\,b$ du piston, on pousse la vapeur considérée dans le condenseur ou dans l'atmosphère, et on ferme l'échappement quand le piston occupe la position b. Il s'agirait donc de remplacer derrière le piston cette quantité de vapeur par un poids d'eau égal, et d'établir en même temps la proportion de vapeur x_4. On pourrait y arriver en injectant cette eau dans le cylindre au moment où le piston est en b, et en réglant convenablement la température de cette eau. Cette méthode n'est guère réalisable dans la pratique; au fond, on reviendrait aux machines à condensation primitives, dans lesquelles on produisait la condensation en injectant de l'eau froide dans le cylindre même. Mais je crois qu'il serait possible d'améliorer d'une autre manière le cycle des machines à vapeur et de le rapprocher davantage du cycle parfait, en faisant simplement fonctionner la pompe d'alimentation aussi comme pompe de compression. Par exemple dans une machine avec condensation, pendant que le piston parcourt $x_1\,b$, on pourrait pousser la vapeur qui se trouve derrière lui dans le condenseur, et la pompe d'alimentation devrait en même temps extraire du condenseur un égal poids d'eau. Au moment où le piston est dans la position b, on interromprait la communication entre le condenseur et le cylindre à vapeur, et on établirait une communication entre le cylindre à vapeur et le cylindre de la

pompe d'alimentation. Pendant que le piston de la pompe d'alimentation continue à rétrograder en faisant le vide derrière lui, le reste de la vapeur qui se trouve dans le cylindre passerait dans la pompe d'alimentation et y serait liquéfiée par compression; au moment du coup de piston suivant, cette eau serait refoulée dans la chaudière avec celle qui est extraite du condenseur.

Ainsi, suivant moi, le changement qu'il faudrait faire subir à nos machines à vapeur consisterait à faire la pompe d'alimentation à double effet, à agrandir son cylindre, afin qu'elle puisse aspirer non-seulement de l'eau, mais encore de la vapeur pendant la deuxième moitié de sa course. Dans les machines sans condensation, l'eau que la pompe d'alimentation aspire devrait être chauffée d'avance jusqu'à 100 degrés par les gaz qui sortent du foyer.

Cette idée me paraît très-réalisable, et je crois qu'on ferait bien de la poursuivre. On pourrait objecter que la pompe d'alimentation prendrait des dimensions trop grandes, et que par là les résistances seraient notablement augmentées; je ne le crois pas; le cylindre de la pompe d'alimentation n'a nullement besoin d'avoir le volume qui correspond au trajet du piston *ba* (*fig.* 55), parce qu'on peut comprimer déjà dans le cylindre, jusqu'à un certain point, la vapeur qui y reste, pour la pousser ensuite dans la pompe d'alimentation. L'idée fondamentale, qu'il ne faut pas perdre de vue ici, consiste en ce qu'il faut chauffer d'avance l'eau d'alimentation, *à l'aide d'une compression de vapeur*, jusqu'à une température voisine de celle de la chaudière, et ne point effectuer cette élévation de la température dans la chaudière même, par l'envoi de la quantité de chaleur $M(q_2 - q_1)$.

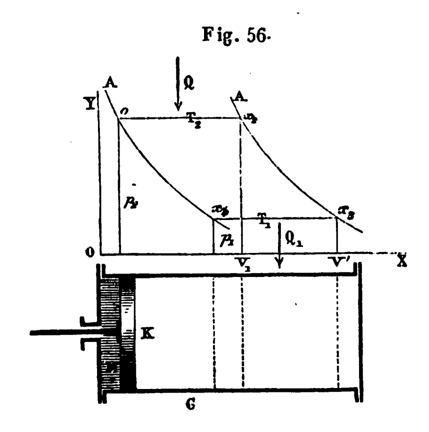
Je m'éloignerais trop du but que je me suis proposé dans cet Ouvrage, si je poursuivais plus loin ce sujet; mais je crois que plus tard on sera amené à chercher un nouveau perfectionnement de nos machines à vapeur dans la voie que je viens de proposer ou dans une voie analogue.

Pour terminer, nous examinerons encore plus attentivement les effets de la compression dans les machines *construites*,

afin de reconnaître s'il faut fermer le tuyau d'échappement de la vapeur avant la fin de la course du piston, et comprimer la vapeur qui reste. Nous n'examinerons que le cas où l'on continue la compression précisément jusqu'à ce que la vapeur comprimée ait atteint la pression p_2 qui règne dans la chaudière; cela exige, il est vrai, que l'espace nuisible ait des dimensions déterminées; nous supposerons, dans ce qui suit, que cette condition soit remplie.

Représentons, dans la *fig.* 56, l'espace nuisible par la partie ombrée, près du piston K; supposons que la pression p' dans cet

Fig. 56.



espace soit égale à la pression p_2 de la chaudière, que la masse de vapeur et de liquide qui s'y trouve soit M', et que la quantité spécifique de la vapeur soit x'.

L'équation (423), p. 511, donne ici

$$M_e = M,$$

à cause de la relation $t' = t_2$; c'est-à-dire, dans le cas actuel, le poids de vapeur et de liquide qui entre dans le cylindre par coup de piston est le même que s'il n'y avait pas d'espace nuisible. L'équation (426) donne, quand on se sert de la relation précédente

(439) $$M(x - x_2) = M'(x_2 - x'),$$

équation qui nous permet de calculer la quantité spécifique

de la vapeur x_2 à la fin de l'admission ; sa valeur est

$$x_2 = \frac{Mx + M'x'}{M + M'}.$$

On voit que l'espace nuisible produit aussi dans ce cas un changement dans la quantité spécifique de la vapeur pendant l'admission; ce changement cesse d'avoir lieu si $M' = 0$, ou $x = x'$, car alors on a $x_2 = x$.

Imaginons encore une machine à vapeur qui travaille dans les circonstances les plus favorables, qui sont les suivantes: 1° la pression de la vapeur dans le cylindre est égale à la pression de la chaudière pendant l'entrée de la vapeur; 2° la contre-pression de la vapeur située derrière le piston est égale à la pression extérieure; 3° la détente est complète, c'est-à-dire la pression finale après la détente est égale à la pression extérieure; 4° la machine possède un espace nuisible, et la compression de la vapeur se continue jusqu'à ce que la pression finale y soit identique à la pression de la chaudière. Le diagramme de cette machine est représenté par la surface $ox_2x_3x_4$ (*fig.* 56), et il s'agit de calculer l'étendue de cette surface, ou, ce qui est la même chose, le travail de cette machine par coup de piston.

D'après nos notations $M + M'$ kilogrammes de mélange se trouvent dans le cylindre au commencement de la détente, et le volume correspondant est $(M + M')(x_2 u_2 + \sigma)$; le volume de l'espace nuisible est, d'un autre côté, $M'(x' u_2 + \sigma)$; on obtient alors le travail L' effectué pendant l'admission de la vapeur, en multipliant l'accroissement du volume par la pression, ce qui donne en unités de chaleur

$$AL' = Ap_2 [(M + M')(x_2 u_2 + \sigma) - M'(x' u_2 + \sigma)] \text{ (*)}.$$

Le travail de la détente, suivant la courbe $x_2 x_3$, est, d'après

(*) *Voyez* p. 517.

ce qui précède, si x_3 désigne la quantité spécifique de la vapeur à la fin de la détente,

$$AL'' = (M + M')(q_2 - q_1 + x_2\rho_2 - x_3\rho_1).$$

A la fin de la détente, le volume est $(M + M')(x_3 u_1 + \sigma)$, tandis qu'au commencement de la compression, lorsque la quantité spécifique de la vapeur est x_4, et que la masse de vapeur et de liquide restée dans le cylindre est M', le volume est $M'(x_4 u_1 + \sigma)$; d'après cela, on a, pour le travail effectué *pendant la sortie de la vapeur*,

$$AL''' = -Ap_1[(M + M')(x_3 u_1 + \sigma) - M'(x_4 u_1 + \sigma)].$$

Enfin le travail de la compression est

$$AL^{IV} = -M'(q_2 - q_1 + x'\rho_2 - x_4\rho_1).$$

On obtient maintenant le travail total L par coup de piston, en additionnant ces quatre quantités, et on trouve, après quelques réductions faciles,

$$(440)\quad \left\{ \begin{aligned} AL = M[q_2 - q_1 + x_2 r_2 - x_3 r_1 + A\sigma(p_4 - p_1)] \\ + M'[(x_2 - x')r_2 - (x_3 - x_4)r_1]. \end{aligned} \right.$$

Mais on a pour les deux courbes adiabatiques ox_4 et x_2x_3 (p. 313), les deux équations

$$\frac{x_3 r_1}{T_1} + \tau_1 = \frac{x_2 r_2}{T_2} + \tau_2,$$

$$\frac{x_4 r_2}{T_1} + \tau_1 = \frac{x' r_2}{T_2} + \tau_2,$$

dont la première donne la valeur de $x_3 r_1$; la différence de ces deux équations donne la relation

$$(x_3 - x_4)\frac{r_1}{T_1} = (x_2 - x')\frac{r_2}{T_2}.$$

En substituant dans l'équation (440) et négligeant le terme

$A\sigma(p_2 - p_1)$, comme une quantité très-petite, on trouve

$$AL = M\left[\frac{x_2 r_2}{T_2}(T_2 - T_1) + q_2 - q_1 - T_1(\tau_2 - \tau_1)\right] + \frac{M'(x_2 - x')r_2}{T_2}(T_2 - T_1).$$

Enfin, en vertu de l'équation (439), cette équation peut s'écrire

$$(441) \quad AL = M\left[\frac{x r_2}{T_2}(T_2 - T_1) + q_2 - q_1 - T_1(\tau_2 - \tau_1)\right],$$

et elle conduit, sous cette forme, à une proposition remarquable. Cette équation est en effet identique à l'équation (392) développée pour le cas qui a été traité p. 481 ; seulement ici x désigne la quantité spécifique de vapeur du mélange qui vient de la chaudière, et dans l'autre cas x_2 désignait la même quantité.

De là le théorème suivant : *Lorsque, dans une machine à vapeur ordinaire, on fait continuer la compression de la vapeur qui se trouve derrière le piston, jusqu'à ce que le mélange renfermé dans l'espace nuisible atteigne la pression qui règne dans la chaudière, la machine se comporte comme une machine* SANS *espace nuisible, dans laquelle l'échappement de la vapeur se fait* PENDANT TOUTE LA DURÉE DU COUP DE PISTON. Il suit de là que la compression n'est pas un perfectionnement du cycle proprement dit; quoique le diagramme coïncide par sa forme à celui d'une machine parfaite, il ne faut pas conclure de cette ressemblance que le cycle de notre machine soit un cycle parfait : le *vrai* diagramme, celui qui explique la nature même du cycle, est celui que représente la *fig.* 51 (p. 478).

Le tableau des nombres donnés pour l'exemple traité à la page 507 est donc applicable à la même machine à vapeur, ayant un espace nuisible, qu'elle travaille *avec* compression complète ou *sans* compression.

Nous déduisons de là cette règle pratique, qu'on doit continuer la compression de la vapeur derrière le piston, jusqu'à

ce que la pression dans l'espace nuisible ait atteint la pression de la chaudière, pour être dans les meilleures conditions; le travail *effectif* de la machine se trouve diminué, il est vrai, par cette compression; mais *le rendement est augmenté*. Ne concluons pas, je le répète, que cette manière d'opérer réalise un perfectionnement du cycle proprement dit. Un tel perfectionnement ne peut être obtenu que par le moyen que j'ai indiqué à la page 530.

V. — *Calcul d'une machine à vapeur à construire.*

Bien que j'aie tâché de réduire à leur forme la plus simple les formules développées jusqu'ici, ces formules ne sont néanmoins pas propres au calcul d'une machine que l'on veut construire. Mais il n'y a aucune difficulté à résoudre cette seconde partie de la question, en s'appuyant sur les mêmes principes.

J'adopte ici le diagramme de la *fig*. 54 (p. 517), comme M. de Pambour et la plupart des auteurs. Soient V le volume parcouru par le piston pendant une course entière; p_2 la pression dans la chaudière, p_1 la pression extérieure, ε le rapport de détente, et ε' le rapport de l'espace nuisible à la capacité du cylindre. Le travail de la vapeur par coup de piston sera, d'après l'équation (437),

$$(442) \qquad L' = V p_2 \left\{ \varepsilon + \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\mu - 1} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{1 + \varepsilon} \right)^{\mu - 1} \right] - \frac{p_1}{p_2} \right\},$$

μ désignant l'exposant bien connu de la courbe adiabatique.

Pour trouver maintenant le travail effectif L de la machine, il faut retrancher du second membre de cette équation les pertes de travail suivantes :

1° La perte de travail due à ce que la vapeur ne possède pas à l'entrée du cylindre la pression de la chaudière : d'après l'équation (417), cette perte est

$$L_4 = \zeta_3 L_m = \alpha V_1 p_4,$$

ou bien, puisque $V_1 = \varepsilon V$,

$$L_3 = \alpha V \varepsilon p_2;$$

2° La perte de travail due à l'inégalité de la contre-pression et de la pression extérieure : elle est, d'après l'équation (418),

$$L_4 = \zeta_4 L_m = \beta V p_1;$$

3° La perte de travail provenant de la résistance constante de la machine : elle est, d'après l'équation (419),

$$L_5 = \zeta_5 L_m = Vf;$$

4° Enfin la perte de travail provenant de la résistance variable, laquelle a pour expression (p. 499)

$$L_6 = \zeta_6 L_m.$$

Si on introduit le coefficient δ de M. de Pambour, c'est-à-dire si on admet que cette perte soit proportionnelle au travail effectif L, on a aussi

$$L_6 = \delta L \text{ (*)}.$$

Simplifions maintenant l'équation (442), en posant

(443) $$k = \varepsilon + \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\mu - 1}\left[1 - \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{1 + \varepsilon'}\right)^{\mu - 1}\right],$$

et retranchons de cette équation les pertes de travail précédentes, nous aurons pour le travail de cette machine par coup de piston

$$L = \frac{Vp_2}{1 + \delta}\left[k - \frac{(1 + \beta)p_1 + \alpha\varepsilon p_2 + f}{p_2}\right].$$

Lorsque la machine fait n tours par minute, le travail N ex-

(*) *Voyez* p. 499.

primé en chevaux sera

$$N = \frac{2\,Ln}{60 \times 75}.$$

Si on désigne ensuite par s la course du piston, par F la section du piston, on a $V = Fs$, et la vitesse moyenne du piston est

$$c = \frac{2\,ns}{60};$$

par suite, le travail de la machine en chevaux-vapeur sera

$$N = \frac{Lc}{75s},$$

et quand on remplace L par sa valeur,

$$(444) \qquad N = \frac{Fcp_2}{75(1+\delta)}\left[k - \frac{(1+\beta)p_1 + \alpha\varepsilon p_2 + f}{p_2}\right].$$

En joignant à cette dernière équation l'équation (443), nous pouvons calculer la section F du cylindre à vapeur, satisfaisant aux conditions ordinairement imposées.

La force de la machine est donnée; on choisit la vitesse moyenne c. La pression p_2 est celle de la chaudière; p_1 est la pression dans le condenseur ou la pression de l'atmosphère; δ et f sont les deux coefficients que M. de Pambour introduit aussi (*voyez* p. 499), mais qui, dorénavant, doivent être déterminés plus exactement d'après les nouvelle formules; α représente le rapport de la différence de la pression de la chaudière et de la pression à l'entrée du cylindre à la pression de la chaudière, et c'est toujours une fraction notable; β désigne le rapport de la différence de la contre-pression et de la pression extérieure à la pression extérieure, rapport qu'il faut prendre ordinairement en considération : dans les machines à condensation, ce rapport est, il est vrai, très-peu inférieur à l'unité; dans quelques cas particuliers, il dépasse même ce nombre. Le coefficient de détente qui sert de base au calcul

est ε, et le rapport de l'espace nuisible au volume du cylindre est ε', qu'on peut évaluer à 0,05, avec M. de Pambour.

A première vue, l'application de la formule paraît présenter une difficulté; d'après l'équation (443), la quantité auxiliaire x dépend de μ, et comme cette dernière quantité doit être calculée d'après la formule (259), p. 335,

$$(445) \qquad \mu = 1,035 + 0,100.x;$$

il faudrait, pour calculer une machine à construire, connaître d'avance la quantité spécifique de la vapeur x, c'est-à-dire savoir quelle est la composition du mélange d'eau et de vapeur au commencement de la détente. Heureusement cette difficulté n'est qu'apparente; je montrerai tout à l'heure que x n'exerce ordinairement, sur la quantité auxiliaire k, qu'une influence tout à fait secondaire. Mais auparavant je vais remplacer l'équation (444), qui donne k par une formule approchée.

Je pose donc pour un moment

$$\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{1 + \varepsilon'} = \varepsilon_1,$$

et je développe $\varepsilon_1^{\mu-1}$ en série, d'après la formule connue

$$a^x = 1 + x \log\text{nép}(a) + \frac{x^2}{1.2}[\log\text{nép}(a)]^2 + \frac{x^3}{1.2.3}[\log\text{nép}(a)]^3 + \ldots.$$

Dès lors

$$\varepsilon_1^{\mu-1} = 1 + (\mu - 1)\log\text{nép}(\varepsilon_1) + \frac{(\mu-1)^2}{1.2}[\log\text{nép}(\varepsilon_1)]^2 + \ldots.$$

D'après l'équation (445), la quantité $\mu - 1$ est toujours si petite, qu'on peut se contenter des deux premiers termes de cette série dans les applications; on a ainsi, en remplaçant de nouveau ε_1 par sa valeur, la formule approchée

$$k = \varepsilon + (\varepsilon + \varepsilon')\log\text{nép}\left(\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{1 + \varepsilon'}\right),$$

ou bien

$$(446) \qquad k = \varepsilon + (\varepsilon + \varepsilon') \operatorname{log\,nép} \left(\frac{1 + \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\right).$$

C'est justement la formule que M. de Pambour a établie pour k, et qui a servi dans quelques ouvrages au calcul de tableaux donnant les valeurs de k, qui correspondent à diverses valeurs de ε et ε'.

Lorsqu'on porte cette valeur de k dans l'équation (443), et qu'on y fait encore approximativement $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, on retrouve la formule que M. de Pambour a donnée pour calculer et apprécier les machines à vapeur. Il écrit seulement $a + p_2$, et $a + p_1$ au lieu de p_2 et p_1, a étant une constante qui s'introduit, parce qu'il calcule la densité de la vapeur à l'aide de la formule de Navier. (*Voyez* p. 285.)

Si l'on pouvait négliger entièrement l'espace nuisible, on tirerait de l'équation (446) une relation encore plus simple

$$(447) \qquad k = \varepsilon + \varepsilon \operatorname{log\,nép} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

c'est au fond cette expression que M. Morin adopte. Portons-la dans l'équation (444), faisons en même temps $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $f = 0$, et pour corriger l'erreur que l'on connaît ainsi, multiplions le second membre de l'équation par un certain facteur (que quelques personnes considèrent, par une idée étrange, comme le rendement de la machine); nous obtenons les formules de MM. Morin et Poncelet, dont on se sert encore aujourd'hui pour calculer les machines à vapeur.

Les raisonnements précédents démontrent, ce que j'ai déjà fait remarquer plus haut, que les formules de M. de Pambour et celles de MM. Morin et Poncelet se déduisent de mes formules comme des expressions approximatives, et, par conséquent, le lien qui unit les anciennes théories de la machine à vapeur avec la théorie mécanique de la chaleur est maintenant mis en lumière.

Pour juger si les formules approximatives adoptées pour k sont admissibles, j'ai calculé le tableau suivant, en prenant toujours pour l'espace nuisible $\varepsilon' = 0{,}05$. Les quatre premières

lignes donnent les valeurs de k, qui correspondent respectivement aux quantités spécifiques de la vapeur $x = 1$; $0,9$; $0,8$; $0,7$; c'est-à-dire aux cas où la vapeur de la chaudière entraîne mécaniquement 0, 10, 20 ou 30 pour 100 d'eau.

Les valeurs de μ qui correspondent à x ont été calculées à l'aide de la formule (445).

La cinquième ligne contient les valeurs de k calculées à l'aide de la formule (446) de M. de Pambour, et la sixième ligne celles que donne l'équation (447) de MM. Morin et Poncelet.

Valeurs de k.

$\varepsilon' = 0,05.$

x	μ	DÉTENTE ε.						
		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$
1	1,135	0,47465	0,52617	0,59578	0,69448	0,84055	0,93348	0,96363
0,9	1,125	0,47679	0,52844	0,59788	0,69627	0,84166	0,93396	0,96388
0,8	1,115	0,47937	0,53074	0,59998	0,69806	0,84277	0,93445	0,96419
0,7	1,105	0,48178	0,53307	0,60217	0,69986	0,84383	0,93498	0,96447
D'après M. de Pambour.		0,50861	0,55877	0,62583	0,71959	0,85564	0,94039	0,96754
D'après M. Morin et M. Poncelet.		0,46530	0,52189	0,59657	0,69953	0,84657	0,93698	0,96576

Si nous comparons d'abord les valeurs de k qui correspondent à une même détente, mais à des valeurs différentes de x, nous reconnaissons que la quantité d'eau mélangée à la vapeur exerce une influence très-faible. On pourrait donc adopter, dans le calcul d'une machine à construire, une valeur moyenne constante $\mu = 1,120$; calculer ensuite k avec l'équation (443), et porter la valeur ainsi obtenue dans l'équation (444).

Les valeurs de k calculées d'après la formule de M. de Pambour s'éloignent notablement des précédentes; il est vrai que je n'ai employé que les deux premiers termes de la série écrite ci-dessus; lorsqu'on veut remplacer l'expression de k par

cette série, on doit prendre encore le troisième terme au moins pour les petites valeurs de ε; *mais je crois qu'il est temps d'abandonner tout à fait les formules de M. de Pambour.*

Les valeurs de k, calculées par la formule de MM. Morin et Poncelet, se rapprochent davantage de nos valeurs exactes : c'est sans doute un effet du hasard; quand l'espace nuisible est plus grand ou plus petit que celui qui correspond à $\varepsilon' = 0,05$, l'écart augmente. Nous pouvons cependant, dans les circonstances ordinaires, profiter de ce hasard, calculer k avec l'équation (447) et substituer sa valeur dans l'équation (444).

Cette dernière équation donne alors

$$(448)\quad N = \frac{Fcp_2\varepsilon}{75(1+\delta)}\left[1 + \log\text{nép}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - \frac{(1+\beta)p_1 + \alpha\varepsilon p_2 + f}{\varepsilon p_2}\right].$$

Il est vrai que cette équation exige encore la détermination des quantités δ, α, β et f; tant qu'on ne saura rien de précis sur ces quantités, on conservera la formule de MM. Morin et Poncelet, c'est-à-dire on égalera à zéro ces quantités, et on corrigera l'erreur commise par là à l'aide d'un facteur φ, qui varie avec la force de la machine; on écrira, par conséquent, avec M. Morin,

$$N = \varphi\,\frac{Fcp_2\varepsilon}{75}\left[1 + \log\text{nép}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - \frac{p_1}{p_2\varepsilon}\right].$$

On devra en tout cas cesser de donner à la quantité φ le nom de *rendement*, qui ne lui convient nullement; il vaudrait mieux l'appeler *coefficient de construction.*

Lorsqu'on aura déterminé les quantités auxiliaires δ, α, etc., par des expériences, on calculera mieux les machines à vapeur en se servant des équations (443) et (444). Mais on ne devrait pas se servir des formules données en dernier lieu pour *apprécier* une machine calculée ou une machine construite. On suivra désormais, je l'espère, la méthode que j'ai développée plus haut.

Il me serait facile d'étendre davantage cette étude. Les belles expériences de M. Völkers me fourniraient des données suffisantes pour déterminer plus exactement les constantes

de mes formules. Mais le but de cet Ouvrage n'est pas de donner une théorie *complète* de la machine à vapeur; je ne puis exposer ici que les *bases* de cette théorie, et je veux seulement montrer que la théorie mécanique de la chaleur est assez avancée pour satisfaire complétement aux besoins de la mécanique appliquée.

APPENDICE.

DES CORPS SOLIDES ET LIQUIDES.

I. — *Transformation des équations fondamentales.*

Les propositions fondamentales de la théorie mécanique de la chaleur n'ont pu trouver jusqu'à présent que très-peu d'applications quand il s'agit des phénomènes qui se passent dans les corps solides et liquides sous l'influence de la chaleur, parce que nous manquons encore des résultats d'expériences nécessaires.

Les recherches théoriques de M. J. Thomson ont conduit à des découvertes tellement remarquables, que nous ne pouvons pas nous dispenser d'exposer ces recherches dans un Appendice; elles peuvent d'ailleurs fournir de nouvelles preuves de l'exactitude des idées qu'on a aujourd'hui sur la chaleur, puisqu'une partie de ces recherches a déjà été confirmée complétement par l'expérience.

Dans les recherches à faire sur les corps solides et liquides, il faut distinguer, comme on l'a fait pour les gaz et les vapeurs, si l'état d'agrégation du corps considéré *change* ou *ne change pas* pendant l'opération.

Nous examinerons d'abord le deuxième cas, dans lequel le corps reste solide ou liquide pendant le changement qu'on lui fait subir.

Les équations générales de la page 76 sont applicables ici, mais nous leur donnerons une autre forme. Soient v le volume de l'unité de poids du corps, t sa température et $T = a + t = 273 + t$ sa température absolue, et enfin p la pression spécifique, considérée sous le point de vue indiqué à la page 23. Pour les corps solides et liquides, il est convenable d'imaginer autour du corps une enveloppe qui exerce

une même pression p sur tous les points de sa surface; pour les gaz et les vapeurs que nous sommes habitués à voir occuper des espaces limités, il était inutile d'insister sur cette circonstance; mais pour les corps *solides* cela est nécessaire, parce qu'il arrive souvent que les éléments de la surface subissent des pressions extérieures diverses. Quant aux liquides, lorsque nous négligeons l'influence de leur poids, nous sommes dans le même cas que pour les gaz et les vapeurs, puisqu'ils transmettent des pressions extérieures intégralement et dans tous les sens, et qu'ils doivent être renfermés dans des vases.

Il existe pour tous les corps une relation entre le volume, la pression et la température

$$t = f(p, v)$$

qu'il faut connaître, pour que l'on puisse faire usage des théorèmes de la théorie mécanique de la chaleur. Pour les gaz et les vapeurs saturées, nous avions assez de données sur cette relation pour avoir pu faire précédemment des recherches approfondies sur ces sortes de corps; mais déjà, dans l'étude des vapeurs surchauffées, nous étions embarrassés, parce que nous ignorions cette relation. Nous éprouvons ici le même embarras. Nous savons seulement que, *sous la pression atmosphérique*, le volume v de l'unité de poids croît à peu près proportionnellement à l'élévation de température, c'est-à-dire que le coefficient de dilatation peut être considéré comme constant dans ces circonstances, entre certaines limites; les phénomènes que présente l'eau sont seuls connus un peu plus exactement, mais uniquement quand elle se trouve sous la pression atmosphérique.

La différentiation de l'équation écrite ci-dessus donne

$$dt = \left(\frac{dt}{dp}\right) dp + \left(\frac{dt}{dv}\right) dv.$$

Pour éviter des confusions, nous donnerons dorénavant aux différentielles partielles une désignation plus précise en y mettant en indice la quantité qui doit rester constante dans la différentiation. Nous écrirons donc l'équation précédente

sous la forme

$$(450)\qquad dt = \left(\frac{dt}{dp}\right)_v dp + \left(\frac{dt}{dv}\right)_p dv.$$

La différentiation de la relation écrite plus haut conduit, du reste, aux quotients différentiels suivants :

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_v,\quad \left(\frac{dt}{dp}\right)_v,\quad \left(\frac{dv}{dt}\right)_p,\quad \left(\frac{dt}{dv}\right)_p;\quad \left(\frac{dp}{dv}\right)_t,\quad \left(\frac{dv}{dp}\right)_t,$$

entre lesquels on a les relations connues

$$(451)\qquad \left(\frac{dt}{dp}\right)_v = \frac{1}{\left(\frac{dp}{dt}\right)_v};\quad \left(\frac{dt}{dv}\right)_p = \frac{1}{\left(\frac{dv}{dt}\right)_p};\quad \left(\frac{dp}{dv}\right)_t = \frac{1}{\left(\frac{dv}{dp}\right)_t}.$$

Il y a encore un autre lien entre ces trois couples de quotients différentiels.

Supposons, par exemple, que p soit fonction de t et de v, alors on a

$$dp = \left(\frac{dp}{dt}\right)_v dt + \left(\frac{dp}{dv}\right)_t dv.$$

Si p est constant, $dp = 0$, et l'équation (450) donne alors

$$dt = \left(\frac{dt}{dv}\right)_p dv.$$

En substituant cette valeur de dt dans l'équation précédente, il vient, puisque $dp = 0$,

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_v \left(\frac{dt}{dv}\right)_p + \left(\frac{dp}{dv}\right)_t = 0.$$

Divisons cette expression par $\left(\frac{dp}{dv}\right)_t$, et tenons compte de la troisième des relations (451), nous aurons

$$(452)\qquad \left(\frac{dp}{dt}\right)_v \left(\frac{dt}{dv}\right)_p \left(\frac{dv}{dp}\right)_t = -1,$$

ou bien encore en renversant

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)_v \left(\frac{dv}{dt}\right)_p \left(\frac{dp}{dv}\right)_t = -1\ (*).$$

Ces formules nous serviront très-utilement dans la suite. Les équations fondamentales (p. 76) peuvent s'écrire maintenant sous la forme suivante :

$$\text{I.} \qquad \left(\frac{dY}{dp}\right) - \left(\frac{dX}{dv}\right) = 1,$$

$$\text{II.} \qquad Y\left(\frac{dt}{dp}\right)_v - X\left(\frac{dt}{dv}\right)_p = T,$$

$$\text{III.} \qquad \begin{cases} dQ = A(X dp + Y dv), \\ dQ = A\left(\frac{dp}{dt}\right)_v (X dt + T dv), \\ dQ = A\left(\frac{dv}{dt}\right)_p (Y dt - T dp). \end{cases}$$

Les deux fonctions X et Y peuvent se déterminer, quand nous introduisons, comme cela a été fait pour les gaz permanents (p. 112), la chaleur spécifique du corps à pression constante, désignée par c_p, et la chaleur spécifique à volume constant, représentée par c_v; il faut seulement ne pas oublier que ces chaleurs spécifiques ne doivent plus être, comme pour les gaz, considérées comme des constantes, mais qu'elles sont des fonctions de p et de v, de t et de v, ou enfin de p et de t.

Lorsqu'on élève de dt la température de l'unité de poids d'un corps sous une pression constante, la quantité de chaleur nécessaire dQ_p est, d'après les notations ordinaires,

$$dQ_p = c_p dt.$$

(*) Voyez le *Bulletin trimestriel de la Société des naturalistes de Zurich*, 1865 : *Des différentes formes commodes pour l'application que l'on peut donner aux équations fondamentales de la théorie mécanique de la chaleur*, par M. Clausius. Les équations fondamentales ne se trouvent d'ailleurs pas dans cet écrit sous la forme dont j'ai fait usage.

Quand, au contraire, on échauffe le corps sous un volume constant, on a

$$dQ_v = c_v dt.$$

Dans le premier cas, la troisième des équations III devient, puisque $dp = 0$,

$$dQ_p = AY\left(\frac{dv}{dt}\right)_p dt,$$

et la seconde des équations III donne, dans le second cas, où $dv = 0$,

$$dQ_v = AX\left(\frac{dp}{dt}\right)_v dt.$$

En mettant à la place de dQ_p et dQ_v leurs valeurs écrites ci-dessus, et en nous servant des relations (451), nous trouvons

(453) $$X = \frac{c_v}{A}\left(\frac{dt}{dp}\right)_v,$$

(454) $$Y = \frac{c_p}{A}\left(\frac{dt}{dv}\right)_p.$$

Utilisons maintenant ces valeurs de X et Y pour transformer les cinq équations fondamentales précédentes, nous aurons

(I') $$A = \frac{d}{dp}\left[c_p\left(\frac{dt}{dv}\right)_p\right] - \frac{d}{dv}\left[c_v\left(\frac{dt}{dp}\right)_v\right];$$

(II') $$AT = (c_p - c_v)\left(\frac{dt}{dv}\right)_p\left(\frac{dt}{dp}\right)_v;$$

(III') $$\left\{\begin{aligned} dQ &= c_v\left(\frac{dt}{dp}\right)_v dp + c_p\left(\frac{dt}{dv}\right)_p dv,\\ dQ &= c_v\,dt + AT\left(\frac{dp}{dt}\right)_v dv,\\ dQ &= c_p\,dt - AT\left(\frac{dv}{dt}\right)_p dp.\end{aligned}\right.$$

Ces équations sont généralement applicables lorsque le corps change d'état d'agrégation, et quand la modification

qu'il subit est réversible. Il faut considérer comme variables les capacités calorifiques c_p et c_v. La quantité c_p est seule connue assez exactement quand il s'agit des corps solides et liquides, surtout grâce aux expériences de M. Regnault : c'est pour cela que l'usage de ces formules est encore très-restreint. En outre, la quantité c_p n'est déterminée que sous la pression atmosphérique, et dans ce cas particulier, la seule chose que nous sachions, c'est que c_p augmente lentement avec la température.

Lorsque nous rapprochons les notions que nous avons sur ces deux quantités des résultats qu'ont fournis les expériences sur la dilatation des corps par la chaleur et sur leurs changements de volume par compression, nous pouvons résoudre quelques problèmes à l'aide des équations précédentes.

II. — *De la capacité calorifique des corps solides et liquides.*

Nous possédons une série de données sur la chaleur spécifique à pression constante des corps solides et liquides ; il n'en est pas de même pour leur chaleur spécifique à volume constant ; mais on peut, comme je le ferai voir, déterminer cette quantité au moins approximativement, en suivant une marche analogue à celle qui a été employée dans l'étude des gaz permanents.

Les expériences connues déterminent deux des coefficients différentiels qui entrent dans les équations générales écrites plus haut.

Occupons-nous d'abord d'un liquide très-fluide ; soient v_0 le volume de l'unité de poids à la température zéro, v le volume à la température t ; on écrit habituellement

$$v = v_0(1 + \alpha t). \tag{455}$$

α désigne le coefficient de dilatation, et on suppose expressément que l'échauffement et la dilatation aient lieu sous *une pression constante.* Les déterminations ordinaires du coeffi-

cient de dilatation ont été faites, il est vrai, à la pression atmosphérique, et il paraît convenable de dire, quand on emploie la relation (455), qu'elle suppose la pression constante et égale à celle de l'atmosphère. Nous regardons aussi le coefficient de dilatation α comme une fonction de la température; nous savons cependant par expérience que, dans beaucoup de cas, α est à peu près constant.

La différentiation de l'équation précédente donne, lorsque nous indiquons, à l'aide de l'indice p, que cette quantité reste constante,

$$(456) \qquad \left(\frac{dv}{dt}\right)_p = v_0\left(\alpha + t\frac{d\alpha}{dt}\right);$$

$\left(\frac{dv}{dt}\right)_p$, un des coefficients différentiels de nos formules, est donc calculable dans les conditions adoptées.

Une autre série d'expériences nous permet de déterminer la variation de volume dv, qui correspond à l'accroissement dp de la pression extérieure, lorsque la température t reste constante ou possède au moins la même valeur au commencement et à la fin de l'opération. Pour un *liquide,* une augmentation de la pression est généralement accompagnée d'une diminution de volume. On peut écrire, d'après les expériences connues,

$$dv = -\beta v dp,$$

dans laquelle β est *le coefficient de compression.* C'est le rapport de la variation du volume au volume total, rapport qui correspond à un certain accroissement de la pression, et qui est connu dans quelques cas particuliers. Comme nous supposons expressément que la température t reste constante, il vaut mieux écrire

$$\left(\frac{dv}{dp}\right)_t = -\beta v.$$

En admettant encore que la pression initiale soit celle de l'atmosphère, nous pouvons nous servir de l'équation (455) et écrire

$$(457) \qquad \left(\frac{dv}{dp}\right)_t = -\beta v_0(1+\alpha t).$$

La quantité α est, il est vrai, ordinairement si petite, que nous pouvons négliger le terme αt dans l'équation précédente.

Portons maintenant dans l'équation (452) les deux quotients différentiels des équations (456) et (457), nous obtiendrons

$$(458) \qquad \left(\frac{dp}{dt}\right)_v = \frac{\alpha + t\,\dfrac{d\alpha}{dt}}{\beta(1+\alpha t)}.$$

Cette nouvelle équation permet de calculer, au moins approximativement, *l'accroissement de pression dp qui résulte d'un accroissement de la température dt subi par le corps sous un volume constant.*

Imaginons, par exemple, un liquide contenu dans un réservoir contre les parois duquel il exerce dans tous les sens une pression d'une atmosphère; pour une augmentation de température dt, cette pression augmenterait de dp si l'on chauffait cette masse liquide sous un volume constant, c'est-à-dire si les parois du vase ne pouvaient pas céder. Ainsi, entre les limites de la température zéro et 100 degrés, le coefficient de dilatation du mercure liquide est, d'après M. Regnault, $\alpha = 0{,}000\,18\,153$; de plus, le coefficient de compression est, d'après M. Grassi (*), $\beta = 0{,}000\,002\,95$, à condition que l'accroissement de pression soit exprimé en atmosphères; l'équation (458) donne, d'après cela, pour le mercure liquide à la température ordinaire,

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_v = 61{,}5.$$

(*) GRASSI, *Sur la compressibilité des liquides* (*Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXXI).

Voyez aussi :

KROENIG, *Journal für Physik und Chemie des Auslandes*, t. II, Berlin, 1851;
WÜLLNER, *Traité de Physique expérimentale*, t. I, p. 187.

Les résultats de M. Grassi confirment du reste les observations antérieures de M. AIMÉ (*Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. VIII, p. 257; *Annales de Poggendorff*, t. II supplémentaire, p. 228) et celles de COLLADON et STURM (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, Paris, 1827, t. V des *Savants étrangers*; — *Sur la compression des liquides*, Mémoire couronné).

Prenons des accroissements finis et supposons $dt = 1°$; alors la pression que le mercure exerce sur les parois du vase augmenterait de 1 à 61^{atm},5, si ces parois étaient parfaitement rigides et inflexibles. J'appelle la quantité $\left(\frac{dp}{dt}\right)_v$ *l'accroissement de pression spécifique à volume constant,* et je la mesurerai dorénavant toujours en atmosphères. Le tableau suivant contient les coefficients de compression β, d'après M. Grassi, pour *l'eau, l'éther, l'alcool* et *le mercure:*

LIQUIDES.	TEMPÉRATURE t en degrés centigr.	COEFFICIENT de compression β (M Grassi.)	$\left(\frac{dv}{dt}\right)_p$ [Équation (456).]	$\left(\frac{dv}{dp}\right)_t$ [Équation (457).]	$\left(\frac{dp}{dt}\right)_v$ [Éq. (358).]
	— 1 —	— 2 —	— 3 —	— 4 —	— 5 —
Eau.....	0	0,000 0503	—0,000 061 045 v_0	— 0,000 0503 v_0	—1,213
	25	0,000 0456	+0,000 254 858	— 0,000 0457	+5,576
	50	0,000 0441	+0,000 444 895	— 0,000 0446	9,975
Éther..	0	0,000 111	+0,001 480 260	— 0,000 111	13,335
	14	0,000 140	+0,001 594 230	— 0,000 140	11,387
Alcool..	7,3	0,000 0828	+0,001 055 647	— 0,000 0834	12,657
	13,1	0,000 0904	+0,001 070 990	— 0,000 0916	11,692
Mercure.	0	0,000 00295	+0,000 179 050	— 0,000 00295	60,695

Le coefficient de dilatation α a été calculé d'après la formule

$$\alpha = a + bt + ct^2,$$

de laquelle nous déduisons

$$\alpha + t\frac{d\alpha}{dt} = \alpha + 2bt + 3ct^2,$$

$$1 + \alpha t = 1 + at + bt^2 + ct^3.$$

J'ai calculé les premiers membres de ces équations, en substituant dans les seconds membres les nombres suivants de

M. Kopp :

Liquide.		a	b	c
Eau	0 à 25°.	−0,000061045,	+0,0000077183,	−0,000000037340
Eau	25 à 50°.	−0,000065415,	+0,0000077587,	−0,000000035408
Éther	....	+0,00148026,	+0,000003503 16,	+0,000000027007
Alcool	....	+0,00104139,	+0,0000007836,	+0,000000017618

La dernière colonne du tableau donne *l'accroissement de pression spécifique à volume constant;* il croît avec la température pour l'eau. Prenons de l'eau à 25 ou à 50 degrés, sur laquelle s'exerce la pression atmosphérique; quand on élève sa température de 1 degré, le volume restant constant, la pression qu'elle exerce sur les parois du vase augmente respectivement de $5^{atm},57$ et de $9^{atm},97$. Lorsque la température de l'eau est au-dessous de 4 degrés, cet accroissement de pression spécifique n'a plus de signification, car l'élévation de la température est accompagnée d'une diminution de volume.

L'accroissement de pression spécifique à volume constant est bien plus grand pour le mercure que pour l'eau; il *paraît* diminuer avec la température pour l'éther et l'alcool. Il y a une corrélation entre ce fait et le suivant. M. Grassi a reconnu que le coefficient de compression β diminue pour l'eau quand la température augmente, tandis qu'il croît pour les autres liquides qu'il a observés. M. Grassi pense même qu'il existe pour l'eau un coefficient de compression maximum vers 1°,5, de même qu'il y a un maximum de densité.

Nous pouvons maintenant substituer les trois quotients différentiels du tableau précédent dans les équations générales I′, II′ et III′, et résoudre pour les liquides indiqués plusieurs questions intéressantes. Déterminons d'abord la chaleur spécifique à volume constant (c_v). La chaleur spécifique à pression constante peut se trouver facilement, grâce aux expériences de M. Regnault, à l'aide des formules empiriques de M. Regnault, p. 254.

L'équation II′ donne immédiatement

$$(459) \qquad c_v = c_p - \text{AT}\left(\frac{dv}{dt}\right)_p \left(\frac{dp}{dt}\right)_v.$$

Portons-y les nombres du tableau, en ayant soin de multiplier ceux de la dernière colonne par 10334, parce qu'il faut y exprimer la pression en kilogrammes par mètre carré et non en atmosphères; nous aurons alors les valeurs inscrites dans le tableau suivant. On a pris $T = t + 273$, $A = \frac{1}{424}$, et on a déduit les valeurs de c_p des équations (190), (191), (192), p. 254, par les formules suivantes :

Liquide.	c_p
Eau..........	$1 + 0,00004t + 0,0000009t^2$
Éther........	$0,52901 + 0,0005918t$
Alcool........	$0,54754 + 0,0022436t^2 + 0,000006618t^2$
Mercure......	$0,03332$

Le volume spécifique v_0 du liquide, à la température 0, est identique ici avec les valeurs données pour σ, p. 279.

LIQUIDES.	TEMPÉRATURE t.	CHALEUR SPÉCIFIQUE à pression constante c_p. (Regnault.)	CHALEUR SPÉCIFIQUE à volume constant c_v.	$\frac{c_p}{c_v}$
Eau..........	0°	1,0000	0,9995	1,0005
	25	1,0016	0,9913	1,0104
	50	1,0042	0,9693	1,0360
Éther.........	0	0,5290	0,3583	1,476
	14	0,5373	0,3722	1,443
Alcool........	7,3	0,5643	0,4456	1,266
	13,1	0,5781	0,4646	1,244
Mercure.......	0	0,03332	0,0280	1,190

Les valeurs de la chaleur spécifique à volume constant et celles de $\frac{c_p}{c_v}$ sont nouvelles; on voit qu'ici encore l'eau se comporte autrement que les autres liquides considérés; pour l'eau, la valeur de c_v diminue sensiblement quand la température augmente; tandis que la valeur de c_p et celle de $\frac{c_p}{c_v}$ augmentent

en même temps que la température; pour l'éther et l'alcool, les variations relatives à c_v et $\frac{c_p}{c_v}$ sont inverses (*).

Comme les formules développées plus haut sont applicables d'une manière générale, nous pourrions nous en servir aussi pour les corps solides, et déterminer par exemple la chaleur spécifique à volume constant de certains métaux. Mais on rencontre ici une certaine difficulté. Pour le coefficient de dilatation α d'un corps solide, il s'agit de la *dilatation cubique*, tandis que les expériences ont été faites sur la *dilatation linéaire*. Heureusement le coefficient de dilatation cubique se déduit facilement du coefficient linéaire; mais il n'en est pas de même du coefficient de compression β. p désigne, dans les formules données plus haut, la pression spécifique, qui est supposée la même sur toutes les parties de la surface; quand nous parlons de compression pour un corps solide, nous devons supposer d'avance que le corps solide soit soumis de tous côtés à une pression plus forte, et il faudrait que l'expérience fît connaître le changement de volume produit à une température constante par une certaine augmentation de pression.

Mais les expériences sur l'élasticité des corps solides ont été exécutées d'une autre manière. On a étiré ou comprimé des corps prismatiques, et on n'a observé que des changements de longueur. La question est de savoir si ces observations peuvent conduire au changement *de volume* que produirait la

---

(*) La chaleur spécifique à volume constant de l'eau et du mercure a été calculée pour la première fois par l'auteur dans la première édition de cet Ouvrage. Les valeurs qu'il a données alors s'écartent un peu de celles qui se trouvent ici, soit parce qu'il s'appuyait sur d'autres résultats d'expérience, soit parce qu'il y avait quelques légères inexactitudes dans les premiers calculs; elles influent d'ailleurs très-peu sur les résultats. On avait pris la même valeur pour les quotients différentiels $\left(\frac{dv}{dp}\right)_t$ et $\left(\frac{dv}{dp}\right)$, ce dernier correspondant au cas où $dQ = 0$, car pour l'eau ces quantités sont à très-peu près égales.

M. Clausius a repris plus tard la question (*Équations fondamentales de la théorie mécanique de la chaleur*, voyez la citation de la page 546); il a calculé c_v pour l'eau, et trouvé des valeurs qui coïncident avec celles du texte et avec celles que j'ai calculées antérieurement.

même augmentation de pression, agissant sur toute la surface du corps prismatique.

Soient l la longueur d'une tige prismatique, et λ sa diminution; supposons qu'aux faces terminales agisse par unité de surface la force p, et que E soit le coefficient d'élasticité de la substance de la tige; on a alors la relation

$$p = \frac{\lambda}{l}\mathrm{E}.$$

Poisson a démontré que si la pression p s'exerce sur toute la surface du prisme, la compressibilité cubique doit être égale à $\frac{3}{2}\frac{\lambda}{l}$.

Si l'on appelle alors v le volume, et δv la diminution de volume, il viendra

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{3}{2}\frac{\lambda}{l} = \frac{3}{2}\frac{p}{\mathrm{E}}.$$

Mais M. Wertheim a trouvé plus récemment que les compressibilités linéaire et cubique sont égales; on peut donc adopter pour les corps solides (quand on ne dépasse pas la limite d'élasticité), la relation

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dp}{\mathrm{E}},$$

d'où l'on déduit en prenant, ce qui est suffisamment exact, à la place de v le volume spécifique v_0, qui correspond à la température o

$$(460) \qquad \left(\frac{dv}{dp}\right)_t = -\frac{v_0}{\mathrm{E}}.$$

L'équation (456) nous donne, quand nous supposons le coefficient de dilatation cubique α constant,

$$(461) \qquad \left(\frac{dv}{dt}\right)_p = \alpha v_0.$$

En substituant dans l'équation (452), on trouve

$$(462) \qquad \left(\frac{dp}{dt}\right)_v = \alpha \mathrm{E}.$$

Cette équation donne la diminution de la pression spécifique à volume constant d'un corps solide. Si *dp* était mesuré en atmosphères, il faudrait diviser le second membre de cette dernière équation par 10334.

L'equation II′ de la page 547 donne, quand on se sert des formules précédentes,

$$c_p - c_v = \mathrm{AT} v_0 \alpha^2 \mathrm{E}.$$

Soient encore γ le poids d'un mètre cube d'eau (1000 kilogrammes), et ε la densité du corps par rapport à l'eau ; alors

$$v_0 = \frac{1}{\gamma\varepsilon},$$

et par suite

$$(463) \qquad c_p - c_v = \frac{\mathrm{AT}\alpha^2 \mathrm{E}}{\varepsilon\gamma}.$$

La chaleur spécifique à volume constant c_v peut se calculer à l'aide de cette dernière formule.

Le coefficient de dilatation linéaire de l'argent est, d'après Laplace, 0,000019097 ; en le multipliant par 3, on trouve $\alpha = 0,000057231$ pour le coefficient de dilatation cubique, ce qui, il est vrai, n'est qu'une approximation. Le coefficient d'élasticité d'un fil d'argent (par mètre carré de section), est

$$\mathrm{E} = 7357 . 1000^2.$$

Prenons la densité $\varepsilon = 10,511$, et calculons le second membre de l'équation précédente pour $t = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{T} = 273^\circ$; nous trouvons alors pour l'argent

$$c_p - c_v = 0,00148.$$

D'après M. Regnault, on doit prendre $c_p = 0,05701$, et on a par conséquent, pour la chaleur spécifique à volume constant de l'argent, $c_v = 0,05553$, et par suite $\frac{c_p}{c_v} = 1,0266$.

M. Edlund (*) a trouvé dans ces derniers temps, en suivant une marche différente, le nombre 1,0203.

Les formules précédentes ne peuvent prétendre à une grande exactitude ; nous ne poursuivrons donc pas davantage cette étude, et même, dans ce qui suit, nous nous attacherons surtout aux propriétés des liquides, parce qu'ils remplissent mieux les conditions qu'exigent ces formules.

III. — *De l'échauffement des corps par compression.*

Dans l'étude que nous venons de faire sur la compression des corps, nous avons supposé la température constante pendant l'opération ; ou au moins elle devait être la même au commencement et à la fin. Cette condition était remplie dans les expériences relatives à la compression, dont les résultats nous ont servi plus haut, et elle suppose que le corps ait reçu ou émis une certaine quantité de chaleur pendant l'opération.

Étudions maintenant les phénomènes que présentent les corps quand il n'y a ni perte ni gain de chaleur pendant la compression.

Pour résoudre la question, nous n'avons qu'à faire $dQ = 0$, dans les équations III′, qui donnent alors

$$(464)\quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dp} = -\dfrac{c_v}{c_p}\left(\dfrac{dt}{dp}\right)_v\left(\dfrac{dv}{dt}\right)_p, \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{c_v}{AT}\left(\dfrac{dt}{dp}\right)_v, \\[2ex] \dfrac{dt}{dp} = \dfrac{AT}{c_p}\left(\dfrac{dv}{dt}\right)_p. \end{cases}$$

Ces formules supposent expressément que $dQ = 0$; pour bien l'indiquer, nous mettrons les premiers membres entre parenthèse avec l'indice Q. La première des formules (464)

(*) *Annales de Poggendorff*, t. CXXVI, p. 566.

donne, avec l'équation (452),

$$(465) \qquad \left(\frac{dv}{dp}\right)_Q = \frac{c_v}{c_p}\left(\frac{dv}{dp}\right)_t.$$

Cette équation sert à déterminer la diminution de volume dv qui correspond à un accroissement de pression dp avec $dQ = 0$, lorsqu'on connaît la relation de v avec p pour $t =$ const. Or on peut la connaître d'après ce qui précède; car, en profitant de l'équation (457), on a de suite

$$(466) \qquad \left(\frac{dv}{dp}\right)_Q = -\frac{c_v}{c_p}\beta v_0(1+\alpha t).$$

Dans le tableau de la page 551, on a trouvé les valeurs de $\left(\frac{dv}{dp}\right)_t$ en divisant les valeurs inscrites dans la quatrième colonne de ce tableau par les valeurs de $\frac{c_p}{c_v}$, fournies par le tableau de la page 553.

Remarquons encore que la valeur inverse, c'est-à-dire $\left(\frac{dp}{dv}\right)_Q$, indique la direction de la courbe *adiabatique* du corps qui correspond au point (v, t, p), tandis que $\left(\frac{dp}{dv}\right)_t$ désigne la direction de la courbe isothermique.

La deuxième des équations (464) donne encore, quand on tient compte de l'équation (458),

$$(467) \qquad \left(\frac{dv}{dt}\right)_Q = -\frac{\beta c_v(1+\alpha t)}{AT\left(\alpha + t\frac{d\alpha}{dt}\right)},$$

et cette équation détermine le changement de volume dv nécessaire pour produire par compression, sans addition ni soustraction de chaleur, une augmentation de température dt donnée d'avance.

La troisième des équations (464) donne enfin

$$(468) \qquad \left(\frac{dt}{dp}\right)_Q = \frac{AT}{c_p}\left(\frac{dv}{dt}\right)_p,$$

qui devient, quand on la transforme à l'aide de l'équation (456),

$$(468') \qquad \left(\frac{dt}{dp}\right)_Q = \frac{ATv_0}{c_p}\left(\alpha + t\frac{d\alpha}{dt}\right).$$

Quand le coefficient de dilatation α est constant, ce qu'on peut généralement admettre, il vient

$$(468'') \qquad \left(\frac{dt}{dp}\right)_Q = \frac{ATv_0\alpha}{c_p}.$$

La dernière équation a été établie pour la première fois par M. W. Thomson ; ces équations nous fournissent le moyen de calculer l'augmentation de la température dt, qui répond à une augmentation dp de la pression extérieure, lorsque, pendant le changement, on n'a ni envoyé, ni retiré de la chaleur au corps.

On a calculé, à l'aide des équations (466) et (468'), après avoir multiplié leurs seconds membres par 10334 pour exprimer dp en atmosphères, les valeurs de $\left(\frac{dv}{dp}\right)_Q$ et $\left(\frac{dt}{dp}\right)_Q$ pour les liquides déjà considérés (tableau, p. 551), et on les a consignées dans le tableau suivant :

LIQUIDES.	TEMPÉRATURE t.	$\left(\frac{dv}{dp}\right)_Q$	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_Q$
	— 1 —	— 2 —	— 3 —
Eau	0°	$-0{,}000\,0503\,v_0$	$-0^\circ{,}000\,406\,2$
	25	$-0{,}000\,045\,2$	$+0{,}001\,848\,1$
	50	$-0{,}000\,043\,0$	$+0{,}003\,487\,7$
Éther	0	$-0{,}000\,075\,2$	$+0{,}009\,401\,2$
	14	$-0{,}000\,097\,0$	$+0{,}011\,038\,0$
Alcool	7,3	$-0{,}000\,065\,8$	$+0{,}006\,057\,2$
	13,1	$-0{,}000\,073\,6$	$+0{,}006\,083\,4$
Mercure	0	$-0{,}000\,002\,48$	$+0{,}002\,629\,0$

La deuxième colonne donne les changements de volume de l'unité, et la troisième colonne l'augmentation de la tempé-

rature, quand la pression extérieure (qui est d'une atmosphère) *augmente d'une atmosphère;* on suppose toujours qu'il n'y ait ni addition, ni soustraction de chaleur.

L'exactitude des nombres de la dernière colonne a été mise hors de doute par les expériences de M. Joule sur l'eau (*). Le tableau suivant montre la concordance du calcul et de l'expérience :

TEMPÉRATURE initiale de l'eau t°.	ACCROISSEMENT de pression en atmosphères.	ACCROISSEMENT DE LA TEMPÉRATURE	
		d'après l'équation (468').	d'après les expériences de M. Joule.
1,2	24,34	$-\ 0^\circ{,}0069$	$-\ 0^\circ{,}0083$
5	24,34	+ 0,0025	+ 0,0044
11,69	24,34	+ 0,0193	+ 0,0205
18,38	24,34	+ 0,0363	+ 0,0314
30	24,34	+ 0,0547	+ 0,0544
31,37	14,64	+ 0,0344	+ 0,0394
40,4	14,64	+ 0,0434	+ 0,0450

Le phénomène remarquable du maximum de densité de l'eau, à 4 degrés environ, conduit à prévoir *un abaissement* quand on prend ce liquide à une température initiale inférieure à 4 degrés pour la comprimer. Les formules que nous avons employées ne sauraient cependant pas donner une explication de ce fait, basée sur la constitution de l'eau.

Dans une série de belles expériences, M. Edlund a démontré récemment que la formule de M. Thomson (468″) se vérifie aussi pour les corps solides (métaux) (**). Il employait les métaux étirés en fils, suspendus par une de leurs extrémités, et attachés par l'autre à un levier sur lequel on pouvait faire

(*) *On the Thermal Effects of compressing fluide* (*Phil. Magazine*, t. XVII, mai 1859).

(**) Edlund, *Détermination quantitative des phénomènes calorifiques qui se produisent pendant le changement de volume des métaux*, etc. (*Annales de Poggendorff*, t. CXIV, p. 1, et t. CXXVI, p. 539.)

mouvoir un poids; quand le poids se trouvait à l'extrémité extérieure du levier, le fil était tendu, et lorsqu'il était placé au-dessus de l'axe du levier, le fil était déchargé. Dans une expérience, le poids est mis d'abord dans la première de ces deux positions; puis on le place rapidement dans la seconde, de manière que le fil se raccourcisse en produisant du *travail extérieur*. Ce raccourcissement est accompagné d'une augmentation de température du fil, laquelle est mesurée à l'aide d'une pile thermo-électrique particulière. M. Edlund a comparé ensuite ces changements de température à ceux qu'indique la formule (468″) de M. Thomson, et il a trouvé, comme le montre le tableau suivant, une excellente concordance entre les rapports des changements de température observés et calculés.

Métaux.	VALEURS observées.	VALEURS calculées.	Différence.
Argent	29,74	29,71	−0,03
Acier	31,91	31,96	+0,05
Cuivre	29,78	27,82	−1,96
Laiton	36,46	35,77	−0,69
Platine	7,40	8,03	+0,63
Or	12,67	12,78	+0,11

La coïncidence ne s'étend pas aux valeurs absolues des variations de température; les expériences de M. Edlund montrent que, pour les métaux énumérés ci-dessus et employés en fils, il faut multiplier le second membre de l'équation de M. Thomson par le facteur constant

$$\frac{424}{628,73} = 0,62104,$$

et par suite il faut écrire

$$(469) \qquad \left(\frac{dt}{dp}\right) = 0,62104 \frac{\mathrm{AT} v_0 \alpha}{c_p},$$

pour arriver à la coïncidence des valeurs absolues.

On n'a pas encore donné une explication complète de cet écart; ce qu'il y a de certain, c'est que la formule de

M. Thomson n'a pas été établie de manière qu'elle soit applicable immédiatement aux expériences de M. Edlund.

M. Edlund a encore fait connaître une autre série d'expériences; car il déchargeait brusquement le fil en enlevant rapidement le poids de l'extrémité du levier. Le fil se raccourcissait alors *sans* produire de travail extérieur. Il y avait une élévation de température *plus forte* que dans les premières expériences. On pourrait établir une formule pour ces changements de température; car alors le travail intérieur U est constant. Cependant je ne poursuivrai pas davantage cette question, attendu que les données expérimentales ne me paraissent pas encore suffisantes pour la vérification des formules.

Remarquons seulement que M. Edlund (Mémoire cité) déduit de ses deux séries d'expériences l'équivalent mécanique de la chaleur, et arrive de cette manière à peu près au nombre que d'autres auteurs ont trouvé par une voie différente.

IV. — *De la fusion des corps solides.*

Nous supposions jusqu'ici que l'état d'agrégation du corps ne changeait pas pendant la modification qu'on lui faisait subir; nous allons maintenant abandonner cette hypothèse.

Le passage d'un corps liquide à l'état de vapeur a été complétement traité dans la troisième Section; il nous reste à examiner le passage de *l'état solide* à *l'état liquide*, c'est-à-dire la fusion; mais nous ne traiterons que la fusion de la glace; les recherches générales qui se rapportent à ce phénomène s'appliquent également à la fusion d'un corps quelconque.

Prenons 1 kilogramme de glace à la température zéro et sous la pression d'*une* atmosphère, et fournissons-lui de la chaleur en maintenant la pression *constante;* la glace fondra peu à peu, et la température restera zéro, tant que toute la glace ne sera pas fondue. Ce n'est qu'à partir de ce moment que la température augmente quand on continue à envoyer de

la chaleur. La quantité de chaleur nécessaire pour fondre 1 *kilogramme de glace à zéro, sous la pression constante d'une atmosphère*, a été déterminée par expérience. M. de la Provostaye a donné, en unités de chaleur, le nombre

$$79,01,$$

et M. Regnault

$$79,06.$$

Nous adopterons la moyenne de ces deux valeurs, que nous désignerons par r; nous écrirons donc

$$r = 79,035.$$

On appelle généralement cette quantité *chaleur latente* de fusion; elle est analogue à la chaleur latente de vaporisation.

On conclut facilement de ce qui précède qu'il y a une ressemblance parfaite entre la fusion et la vaporisation; pendant le changement d'agrégation sous une pression constante, la température ne change pas, quoiqu'on fournisse au corps une quantité de chaleur considérable.

Nous devons penser que l'analogie s'étend à toutes les autres circonstances, que par suite une partie de la chaleur fournie r est dépensée dans la fusion pour produire du travail intérieur, et que l'autre partie est employée au travail extérieur, car on sait que le volume change pendant cette opération.

Et encore, comme dans la vaporisation, la fusion, *sous diverses pressions*, doit se faire *à des températures différentes*, et la température doit être également *fonction de la pression seule*, tant que la masse contient à la fois de la glace et de l'eau.

Nous pouvons donc distinguer, comme pour les vapeurs, de l'*eau saturée* et de l'*eau non saturée* ou *surchauffée*. De l'eau saturée est celle qui se transforme partiellement en glace, lorsqu'on lui retire la moindre quantité de chaleur; quand la pression est par exemple d'une atmosphère, l'eau est exactement saturée à zéro; faut-il, au contraire, avec une pression

constante, retirer à l'eau une certaine quantité de chaleur, avant qu'elle commence à se transformer en glace, cette eau sera non saturée ou surchauffée; de l'eau qui possède une température supérieure à zéro, sous la pression d'une atmosphère, est par suite toujours non saturée.

Si la pression qui s'exerce sur l'eau est différente d'*une* atmosphère, la température de saturation, ou de fusion, comme on a l'habitude de l'appeler, sera différente de zéro. La pression et la température sont liées par une certaine relation inconnue, et des expériences convenables devraient donner pour l'eau saturée une certaine courbe analogue à celle que nous avons trouvée pour la vapeur saturée, lorsqu'on prend les températures de fusion pour abscisses et les pressions pour ordonnées. Mais la courbe de l'eau saturée est, comme nous allons le démontrer dans l'étude suivante, essentiellement différente de celle de la vapeur.

La température de fusion de la glace, que j'appellerai *température de saturation de l'eau*, s'abaisse quand la pression augmente. Ce fait a été démontré théoriquement, pour la première fois, par M. James Thomson (*), puis par M. Clausius (**); il a été vérifié expérimentalement par M. William Thomson (***). Les expériences de M. Bunsen sur le blanc de baleine et la paraffine, et celles de M. Hopkins sur le blanc de baleine, la cire, le soufre et la stéarine, offrent de nouvelles confirmations de cette découverte remarquable. Les considérations suivantes vont nous donner, entre autres résultats, la formule que M. James Thomson a trouvée le premier pour la question qui nous occupe.

Comme nous avons besoin dans cette recherche de températures inférieures à zéro centigrade, et que t serait par suite

---

(*) *Transactions de la Société Royale d'Édimbourg*, t. XVI : *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, 1850.

(**) *Annales de Poggendorff*, t. LXXXI, p. 168.

(***) *Proceedings of the Royal Society of Edimbourg*, 1850. — *Philosophical Magazine*, 1850, t. XXXVII, p. 123. — *Annales de Poggendorff*, t. LXXXI, 1850, p. 163.

tantôt négatif, tantôt positif, il est convenable de placer plus bas le zéro de l'échelle thermométrique; le mieux est de le mettre au zéro absolu. Nous poserons donc, comme précédemment, $T = a + t = 273 + t$, et la température du point de congélation de l'eau, sous la pression d'une atmosphère, est alors 273 degrés.

Imaginons maintenant 1 kilogramme de glace sous la pression p (par unité de surface); soient T_0 sa température, et T la température de fusion qui correspond à la pression p. On demande quelle quantité de chaleur il faut fournir pour fondre cette glace sous une pression constante à la température T.

Appelons c_0 la chaleur spécifique de la glace à volume constant; la quantité de chaleur nécessaire pour porter la glace de la température T_0 à la température T sera évidemment

$$\int_{T_0}^{T} c_0\, dT.$$

Soit r la quantité de la chaleur nécessaire pour fondre 1 kilogramme de glace à T, sous la pression constante p; r dépendra probablement de T, comme cela a lieu pour la vaporisation. On appelle ordinairement r *chaleur latente;* je me servirai du terme *chaleur de fusion.*

La quantité de chaleur λ, qu'exige la glace pour se transformer en eau dans les conditions données, est donc

$$\lambda = \int_{T_0}^{T} c_0\, dT + r,$$

et nous pouvons appeler cette quantité *chaleur totale*, par analogie avec ce qui a été fait pour les vapeurs.

Dans ce changement d'état, il y a un travail extérieur effectué; nous allons le déterminer. Il n'y a pas de fusion pendant qu'on échauffe la glace de T_0 à T; mais il y a déjà, pendant cette opération, un changement de volume, la pression extérieure p aura été surmontée, et un travail aura été produit. Nous négligerons ce changement de volume devant ce qui a

lieu dans la fusion; il ne reste donc plus à déterminer que le travail qui est effectué pendant la fusion.

Soient, comme précédemment, σ le volume de l'unité de poids de l'eau à la température T, et σ_e celui de la glace; le volume v de 1 kilogramme du mélange, formé de x kilogrammes d'eau et de $(1-x)$ kilogrammes de glace, sera

$$v = \sigma x + (1-x)\sigma_e,$$

ou bien

$$v = \sigma_e + x(\sigma - \sigma_e).$$

Conformément aux notations adoptées auparavant, nous désignerons la différence $\sigma - \sigma_e$ par u, et nous écrirons

$$(470)\qquad v = \sigma_e + xu.$$

σ_e et u sont des fonctions de la température seule, ou de la pression seule; en différentiant l'équation précédente, et en supposant la température constante, on a

$$(471)\qquad dv = u\,dx.$$

Le travail extérieur, exprimé en unités de chaleur, est donc

$$(472)\qquad dL = A p\,dv = A p u\,dx.$$

On trouve ensuite par intégration, en supposant la pression constante,

$$L = Apux;$$

quand on fond exactement *un* kilogramme de glace, c'est-à-dire quand $x = 1$, on a

$$L = Apu.$$

Telle est la chaleur latente externe de l'eau saturée sous la pression extérieure p, et à la température t correspondante.

Retranchons cette quantité de la chaleur de fusion r, et posons

$$(473)\qquad \rho = r - Apu:$$

c'est la *chaleur latente interne* de l'eau saturée. Quand on aura déterminé la chaleur latente Apu à l'aide d'une formule

facile à établir, la chaleur latente externe se calculera immédiatement par la formule précédente.

La quantité de chaleur nécessaire pour fondre, sous une pression constante, dx kilogrammes de glace, est

$$dQ = r dx.$$

Si l'on exprime dx à l'aide de l'équation (471),

$$dQ = \frac{r}{u} dv.$$

Comme ici $dt = 0$ et $dp = 0$, on trouve une autre expression de dQ en partant des équations fondamentales (III), p. 76, à savoir :

$$dQ = AY dv$$

et

$$dQ = \frac{AT}{\left(\frac{dt}{dp}\right)} dv.$$

Remarquons que la température t est ici une fonction de la pression p seule, et qu'elle est indépendante du volume du mélange; alors en égalant les trois valeurs de dQ, nous trouvons

(474) $$Y = \frac{r}{Au} = T\frac{dp}{dt},$$

équations qui nous conduisent à la relation suivante, qui sert à calculer la chaleur latente externe,

(475) $$Apu = \frac{pr}{T\frac{dp}{dt}};$$

l'équation (473) donne ensuite la chaleur latente interne ρ.

L'étude que nous venons de faire est la base des recherches qu'il faut entreprendre pour bien connaître les phénomènes qui accompagnent la fusion. Les résultats d'expérience que nous avons à notre disposition, et qui, joints aux équations précédentes, peuvent nous servir à poursuivre davantage cette question, sont malheureusement très-peu nombreux; nous

pousserons la théorie aussi loin que le permettent les expériences connues.

Sous la pression d'*une* atmosphère, la température de fusion est de 0 degré centigrade, ou T = 273 degrés.

Le *volume de l'unité de poids de l'eau* est à cette température

$$\sigma_e = 0,001.$$

Le *volume de l'unité de poids de la glace* est d'un autre côté

$$\sigma_i = 0,001\,087.$$

La chaleur de fusion, pour cette température, est

$$r = 79,035.$$

A l'aide de ces nombres, on trouve

$$u = \sigma - \sigma_e = -\ 0,000\,087,$$

valeur négative.

Portons ces nombres dans l'équation (474), et exprimons *dp* en atmosphères au lieu de l'exprimer en kilogrammes par unité de surface; nous trouvons alors, pour T = 273 degrés,

$$\frac{dp}{dT} = -\frac{79,035 \times 424}{0,000\,087 \times 273 \times 10334},$$

ou bien

(476) $$\frac{dp}{dT} = -\ 136,53,$$

et

(477) $$\frac{dT}{dp} = -\ 0,007\,324.$$

La dernière valeur est celle que M. J. Thomson a établie le premier (il donne $\frac{dT}{dp} = -\ 0,0075$); elle conduit à ce résultat remarquable qu'*un accroissement de la pression p* (aux environs du point de congélation) est accompagné d'*un abaissement de la température de fusion;* de sorte que, sous une

pression supérieure à celle d'une atmosphère, l'eau se congèle à une température inférieure à zéro.

La justesse de cette prévision a été mise hors de doute par les expériences de M. W. Thomson. Il a trouvé que, pour les accroissements de pression de 8,1 et 16,8 atmosphères, la température de fusion de la glace se trouvait respectivement abaissée de 0°,059 et 0°,129 au-dessous de 0 degré; cela donne, pour une augmentation de pression d'une atmosphère, un abaissement de température respectivement égal à 0,00727 et 0,00767, résultats qui concordent très-bien avec les développements présentés ci-dessus. M. Mousson (*) a pu conserver de l'eau à l'état liquide à — 20 degrés, en exerçant sur elle une très-haute pression (quelques milliers d'atmosphères); cette expérience est encore une nouvelle confirmation de l'exactitude de nos développements.

Prenons maintenant les températures T pour abscisses et les pressions correspondantes p pour ordonnées d'une courbe : ce sera la courbe des tensions de l'eau saturée. On ne connaît qu'un élément de cette courbe, celui qui correspond à l'abscisse $T = 273$ degrés et à l'ordonnée $p = 1$ atmosphère.

Mais l'équation (476) donne

$$dp = -136,53 \times dT,$$

et on conclut de cette relation que la tangente en ce point est presque normale à l'axe des abscisses; que, par suite, la courbe descend très-rapidement en *s'approchant de l'axe des abscisses quand l'abscisse augmente.*

La courbe des tensions de la vapeur saturée montre des propriétés tout à fait opposées.

Si l'équation (476) était applicable jusqu'à un abaissement de température de 1 degré, on trouverait que l'eau doit être soumise à une pression de 136 atmosphères, pour qu'elle ne se congèle pas à — 1 degré. Cette considération prouve que le zéro

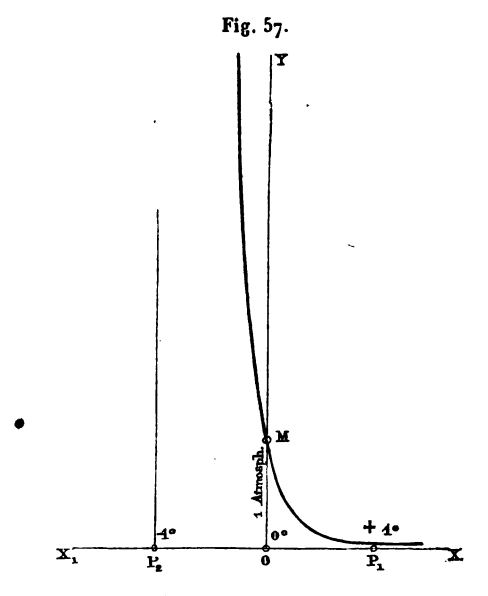
(*) *Annales de Poggendorff*, t. CV, p. 161.

des thermomètres centigrades est très-stable; il faut un changement de pression énorme pour que la détermination de ce zéro éprouve des différences appréciables. Ceci n'a pas lieu, comme on sait, pour le point 100 degrés centigrades : quand on le détermine, il faut tenir compte des moindres variations de la pression atmosphérique.

Quand la glace est placée sous une pression moindre qu'une atmosphère, le point de fusion est élevé. Sous le récipient de la machine pneumatique, l'eau commence donc à se congeler à une température supérieure au zéro centigrade. On conçoit que ce fait n'ait pas été observé jusqu'à présent, en remarquant que cette élévation de température est probablement extrêmement petite, et qu'il faudrait la mesurer à l'aide d'une pile thermo-électrique.

La courbe des tensions de l'eau a la forme qu'indique la *fig.* 57. Le point O est l'origine des coordonnées, et on a pris

Fig. 57.



pour abscisses les températures centigrades; les points P_1 et P_2 correspondent respectivement aux températures 1 degré et — 1 degré. L'ordonnée OM, qui correspond à l'origine et à la

température zéro, a été prise égale à 1 atmosphère; l'ordonnée qui correspond à la température — 1 degré est environ 136 atmosphères, tandis que celle qui correspond à + 1 degré est presque nulle. Des expériences entreprises dans le but de déterminer la forme de cette courbe entre zéro et 1 degré ne présenteraient pas de grandes difficultés, et jointes aux formules précédentes, elles seraient certainement très-utiles.

Prenons de l'eau saturée à l'état M (*fig.* 57), c'est-à-dire sous la pression d'une atmosphère et à la température zéro : d'après l'équation (477), on a la relation

$$dt = -0{,}007324 \cdot dp.$$

Prenons pour l'accroissement de pression une quantité finie, *une atmosphère*, la température devrait être abaissée de

$$-0^{\circ}{,}007324,$$

pour que l'eau fût de nouveau saturée, c'est-à-dire prête à se congeler sous la pression nouvelle (2 atmosphères).

Mais nous avons trouvé plus haut (*voyez* le tableau de la page 559) que la température de l'eau à zéro, qui supporte une pression d'*une* atmosphère, varie de

$$-0^{\circ}{,}0004062,$$

lorsqu'on élève la pression d'*une* atmosphère à l'aide de la compression, sans lui fournir ni lui soustraire de la chaleur. On conclut de là que l'eau passe à l'état de surchauffe par la simple compression dans les conditions supposées (comme cela a lieu pour la vapeur sèche et saturée), et qu'il faut retirer à l'unité de poids de l'eau, après une compression de 2 atmosphères, la quantité de chaleur

$$0{,}00734 - 0{,}000406 = 0^{\text{cal}}{,}006918,$$

pour qu'elle soit de nouveau saturée sous la nouvelle pression.

Il n'existe malheureusement aucune observation qui nous

permette de faire un calcul analogue pour d'autres températures.

Mettons dans l'équation (475) la valeur de $\frac{dp}{dt}$ donnée par l'équation (476), et faisons-y $p = 10334$ et $T = 273$ degrés, nous trouverons, pour la chaleur latente externe de l'eau à zéro et sous la pression d'une atmosphère,

$$Apu = -0{,}00212 \text{ calories.}$$

Pendant la fusion de 1 kilogramme de glace dans les circonstances ordinaires, on n'emploie donc pas, comme pendant la vaporisation, une partie de la chaleur à produire du travail externe; c'est la glace *qui absorbe ce travail* dont la valeur est

$$pu = 0^{\text{kgm}},899.$$

Le travail interne s'obtient à l'aide de l'équation (473) à zéro et sous la pression atmosphérique

$$\rho = 79{,}035 + 0{,}002 = 79{,}037.$$

La différence de r et ρ est, par conséquent, entièrement dans les limites des erreurs d'observation.

On trouve aussi à l'aide de l'équation (474)

$$\frac{r}{u} = 87{,}91,$$

puis

$$\frac{\rho}{u} = \frac{r}{u} - Ap = 63{,}54.$$

Il résulte, de tout ce qui précède, que les équations fondamentales d'un mélange de glace et d'eau sont *les mêmes* que celles qui ont été établies pour un mélange de vapeur et de liquide.

TABLES.

TEMPÉRATURE en degrés centigr. t.	TEMPÉRATURE absolue T.	PRESSION en millimètres de mercure p. (Regnault.)	$\frac{dp}{dt}$	$\frac{dp}{pdt}$	$T\frac{dp}{pdt}$	$\frac{r}{u}$	$\frac{\rho}{u}$	$\frac{Apu}{r}$
— 1 —	— 2 —	— 3 —	— 4 —	— 5 —	— 6 —	— 7 —	— 8 —	— 9 —
0	273	4,600	0,3289	0,071502	19,520	2,879	2,732	0,051229
5	278	6,534	0,4503	0,068915	19,158	4,024	3,805	0,052196
10	283	9,165	0,6088	0,066429	18,799	5,525	5,231	0,053193
15	288	12,699	0,8132	0,064041	18,444	7,511	7,104	0,054219
20	293	17,391	1,0738	0,061746	18,091	10,090	9,532	0,055274
25	298	23,550	1,4022	0,059542	17,743	13,400	12,645	0,056358
30	303	31,548	1,8117	0,057427	17,400	17,604	16,592	0,057470
35	308	41,827	2,3171	0,055397	17,062	22,886	21,545	0,058609
40	313	54,906	2,9347	0,053449	16,730	29,457	27,696	0,059774
45	318	71,390	3,6825	0,051582	16,403	37,554	35,264	0,060964
50	323	91,980	4,5800	0,049794	16,083	47,442	44,492	0,062176
55	328	117,475	5,6484	0,048081	15,771	59,413	55,646	0,063409
60	333	148,786	6,9100	0,046443	15,465	73,792	69,020	0,064661
65	338	186,938	8,3891	0,044876	15,168	90,933	84,938	0,065927
70	343	233,082	10,111	0,043380	14,879	111,220	103,746	0,067206
75	348	288,500	12,104	0,041953	14,600	135,077	125,825	0,068494
80	353	354,616	14,395	0,040594	14,329	162,959	151,587	0,069786
85	358	433,002	17,017	0,039300	14,069	195,369	181,482	0,071076
90	363	525,392	20,002	0,038072	13,820	232,852	216,003	0,072359
95	368	633,692	23,388	0,036907	13,582	276,009	255,687	0,073628
100	373	760,000	27,189	0,035775	13,344	325,229	300,856	0,074940
105	378	906,410	31,454	0,034701	13,117	381,286	352,218	0,076236
110	383	1075,370	36,212	0,033674	12,897	444,778	410,292	0,077536
115	388	1269,410	41,499	0,032691	12,684	516,362	475,653	0,078838
120	393	1491,280	47,348	0,031750	12,478	596,736	548,902	0,080143
125	398	1743,880	53,795	0,030848	12,277	686,610	630,685	0,081450
130	403	2030,280	60,873	0,029982	12,083	786,716	721,607	0,082761
135	408	2353,730	68,617	0,029152	11,894	897,803	822,321	0,084075
140	413	2717,630	77,060	0,028355	11,711	1020,627	933,475	0,085391
145	418	3125,550	86,234	0,027590	11,533	1155,960	1055,726	0,086709
150	423	3581,230	96,171	0,026854	11,359	1304,583	1189,736	0,088034
155	428	4088,560	106,901	0,026146	11,191	1467,283	1336,166	0,089361
160	433	4651,620	118,455	0,025465	11,026	1644,860	1495,686	0,090691
165	438	5274,540	130,858	0,024809	10,866	1838,076	1668,926	0,092026
170	443	5691,660	144,138	0,024177	10,711	2047,724	1856,538	0,093365
175	448	6717,430	158,319	0,023568	10,559	2274,570	2059,147	0,094709
180	453	7546,390	173,423	0,022981	10,410	2519,373	2277,366	0,096059
185	458	8453,230	189,470	0,022414	10,265	2782,875	2511,787	0,097413
190	463	9442,700	206,478	0,021886	10,124	3065,794	2762,974	0,098774
195	468	10519,630	224,462	0,021337	9,986	3368,820	3031,464	0,100140
200	473	11688,960	243,438	0,020826	9,851	3692,650	3317,795	0,101514

TEMPÉRATURE en degrés centig. t.	CHALEUR totale λ. (Regn.)	Diff.	CHALEUR du liquide q. (Regn.)	Diff.	CHALEUR de vaporisation r.	Diff.	CHALEUR latente externe Apu.	Diff.	CHALEUR de la vapeur J.	Diff.	CHALEUR latente interne ρ.	Diff.	u
— 1 —	— 2 —		— 3 —		— 4 —		— 5 —		— 6 —		— 7 —		— 8 —
0	606,500	1,525	0,000	5,000	606,500	3,475	31,071	0,404	575,43	1,12	575,43	3,88	210,66
5	608,025	1,525	5,000	5,002	603,025	3,477	31,475	0,417	576,55	1,11	571,55	3,87	150,23
10	609,550	1,525	10,002	5,003	599,548	3,478	31,892	0,426	577,66	1,10	567,66	3,91	108,51
15	611,075	1,525	15,005	5,005	596,070	3,480	32,318	0,437	578,76	1,08	563,75	3,92	79,346
20	612,600	1,525	20,010	5,007	592,590	3,482	32,755	0,446	579,84	1,08	559,83	3,92	58,720
25	614,125	1,525	25,017	5,009	589,108	3,484	33,201	0,455	580,92	1,07	555,91	3,94	43,963
30	615,650	1,525	30,026	5,011	585,624	3,486	33,656	0,463	581,99	1,07	551,97	3,95	33,266
35	617,175	1,525	35,037	5,014	582,138	3,489	34,119	0,469	583,06	1,05	548,02	3,96	25,436
40	618,700	1,525	40,051	5,017	578,649	3,492	34,588	0,476	584,11	1,05	544,06	3,97	19,644
45	620,225	1,525	45,068	5,019	575,157	3,494	35,064	0,480	585,16	1,05	540,09	3,97	15,315
50	621,750	1,525	50,087	5,023	571,663	3,498	35,544	0,483	586,21	1,04	536,12	3,97	12,049
55	623,275	1,525	55,110	5,027	568,165	3,502	36,027	0,485	587,25	1,04	532,14	3,98	9,5613
60	624,800	1,525	60,137	5,030	564,663	3,505	36,512	0,484	588,29	1,04	528,15	3,99	7,6531
65	626,325	1,525	65,167	5,034	561,158	3,509	36,996	0,482	589,33	1,04	524,16	3,99	6,1711
70	627,850	1,525	70,201	5,038	557,649	3,513	37,478	0,477	590,37	1,05	520,17	3,99	5,0139
75	629,375	1,525	75,239	5,043	554,136	2,518	37,955	0,470	591,42	1,05	516,18	3,99	4,1024
80	630,900	1,525	80,282	5,047	550,618	3,522	38,425	0,460	592,47	1,07	512,19	3,99	3,3789
85	632,425	1,525	85,329	5,052	547,096	3,527	38,885	0,447	593,54	1,08	508,21	3,98	2,8003
90	633,950	1,525	90,381	5,057	543,569	3,532	39,332	0,430	594,62	1,09	504,24	3,97	2,3344
95	635,475	1,525	95,438	5,062	540,037	3,537	39,762	0,443	595,71	1,08	500,27	3,97	1,9566
100	637,000	1,525	100,500	5,068	536,500	3,543	40,205	0,426	596,79	1,10	496,29	3,98	1,6496
105	638,525	1,525	105,568	5,073	532,957	3,548	40,631	0,417	597,89	1,11	492,33	3,96	1,3978
110	640,050	1,525	110,641	5,080	529,409	3,555	41,048	0,409	599,00	1,12	488,36	3,97	1,1903
115	641,575	1,525	115,721	5,085	525,854	3,560	41,457	0,401	600,12	1,12	484,40	3,96	1,0184
120	643,100	1,525	120,806	5,092	522,294	3,567	41,858	0,392	601,24	1,13	480,44	3,96	0,8752
125	644,625	1,525	125,898	5,099	518,727	3,574	42,250	0,384	602,37	1,15	476,48	3,96	0,7555
130	646,150	1,525	130,997	5,106	515,153	3,581	42,634	0,376	603,52	1,14	472,52	3,96	0,6548
135	647,675	1,525	136,103	5,112	511,572	3,587	43,010	0,367	604,66	1,16	468,56	3,95	0,5698
140	649,200	1,525	141,215	5,119	507,985	3,594	43,377	0,358	605,82	1,17	464,61	3,95	0,4977
145	650,725	1,525	146,334	5,128	504,391	3,603	43,735	0,351	606,99	1,17	460,66	3,96	0,4363
150	652,250	1,525	151,462	5,136	500,788	3,611	44,086	0,342	608,16	1,19	456,70	3,95	0,3839
155	653,775	1,525	156,598	5,143	497,177	3,618	44,428	0,333	609,35	1,21	452,75	3,95	0,3388
160	655,300	1,525	161,741	5,151	493,559	3,626	44,761	0,325	610,54	1,20	448,80	3,95	0,3001
165	656,825	1,525	166,892	5,160	489,933	3,635	45,086	0,317	611,74	1,21	444,85	3,96	0,2665
170	658,350	1,525	172,052	5,168	486,298	3,643	45,403	0,308	612,95	1,21	440,89	3,95	0,2375
175	659,875	1,525	177,220	5,178	482,655	3,653	45,711	0,299	614,16	1,23	436,94	3,95	0,2122
180	661,400	1,525	182,398	5,186	479,002	3,661	46,012	0,292	615,39	1,23	432,99	3,95	0,1901
185	662,925	1,525	187,584	5,196	475,341	3,671	46,304	0,285	616,62	1,24	429,04	3,96	0,1708
190	664,450	1,525	192,780	5,205	471,670	3,680	46,589	0,275	617,86	1,25	425,08	3,95	0,1538
195	665,975	1,525	197,985	5,215	467,990	3,690	46,864	0,269	619,11	1,26	421,13	3,96	0,1389
200	667,500		203,200		464,300		47,133		620,37		417,17		0,1257

TEMPÉRATURE en degrés centigr. t.	TEMPÉRATURE absolue T.	PRESSION en millimètres de mercure p. (Regnault.)	$\frac{dp}{dt}$	$\frac{dp}{pdt}$	$T\frac{dp}{pdt}$	$\frac{r}{u}$	$\frac{\rho}{u}$	$\frac{Apu}{r}$
— 1 —	— 2 —	— 3 —	— 4 —	— 5 —	— 6 —	— 7 —	— 8 —	— 9 —
0	273	184,39	8,441	0,045778	12,497	73,90	67,99	0,08002
10	283	286,83	12,224	0,042619	12,061	110,94	101,74	0,08291
20	293	432,78	17,175	0,039685	11,628	161,38	147,50	0,08600
30	303	634,80	23,464	0,036963	11,200	228,00	207,64	0,08929
40	313	907,04	31,242	0,034444	10,781	313,60	284,51	0,09275
50	323	1264,83	40,622	0,032117	10,374	420,78	380,22	0,09640
60	333	1725,01	51,709	0,029476	9,982	552,20	496,88	0,10018
70	343	2304,90	64,576	0,028017	9,610	710,32	636,40	0,10406
80	353	3022,79	79,327	0,026243	9,264	898,02	801,08	0,10794
90	363	3898,26	96,127	0,024659	8,951	1119,01	994,00	0,11172
100	373	4953,30	115,313	0,023280	8,683	1379,34	1220,49	0,11516
110	383	6214,63	137,523	0,022129	8,475	1689,13	1489,83	0,11799
120	393	7719,20	163,979	0,021243	8,348	2066,66	1819,11	0,11978

TEMPÉRATURE en degrés centig. t.	CHALEUR totale λ. (Regn.)	Diff.	CHALEUR du liquide q. (Regn.)	Diff.	CHALEUR de vaporisation r.	Diff.	CHALEUR latente externe Apu.	Diff.	CHALEUR de la vapeur J.	Diff.	CHALEUR latente interne ρ.	Diff	u
— 1 —	— 2 —		— 3 —		— 4 —		— 5 —		— 6 —		— 7 —		— 8 —
0	94,00		0,00		94,00		7,521		86,48		86,48		1,2720
10	98,44	4,44	5,32	5,32	93,12	0,88	7,721	0,200	90,72	4,24	85,40	1,08	0,8393
20	102,78	4,34	10,70	5,38	92,08	1,04	7,919	0,198	94,86	4,14	84,16	1,24	0,5706
30	107,00	4,22	16,14	5,44	90,86	1,22	8,113	0,194	98,89	4,01	82,75	1,41	0,3985
40	111,11	4,11	21,63	5,49	89,48	1,38	8,300	0,187	102,81	3,92	81,18	1,57	0,2853
50	115,11	4,00	27,19	5,56	87,92	1,56	8,475	0,175	106,64	3,83	79,45	1,73	0,2089
60	119,00	3,89	32,80	5,61	86,20	1,72	8,635	0,160	110,37	3,73	77,57	1,88	0,1561
70	122,78	3,78	38,48	5,68	84,30	1,90	8,772	0,137	114,01	3,64	75,53	2,04	0,1186
80	126,44	3,66	44,21	5,73	82,23	2,07	8,876	0,104	117,56	3,55	73,35	2,18	0,0916
90	130,00	3,56	50,00	5,79	80,00	2,23	8,937	0,061	121,06	3,50	71,06	2,29	0,0715
100	133,44	3,44	55,86	5,86	77,58	2,42	8,934	−0,003	124,51	3,45	68,65	2,41	0,0562
110	136,78	3,34	61,77	5,91	75,01	2,57	8,850	−0,084	127,93	3,42	66,16	2,49	0,0444
120	140,00	3,22	67,74	5,97	72,26	2,75	8,655	−0,195	13,135	3,42	63,61	2,55	0,0350

TEMPÉRATURE en degrés centigr. t.	TEMPÉRATURE absolue T.	PRESSION en millimètres de mercure p. (Regnault.)	$\frac{dp}{dt}$	$\frac{dp}{pdt}$	$T\frac{dp}{pdt}$	$\frac{r}{u}$	$\frac{\rho}{u}$	$\frac{Apu}{r}$
— 1 —	— 2 —	— 3 —	— 4 —	— 5 —	— 6 —	— 7 —	— 8 —	— 9 —
0	273	12,70	0,8419	0,066895	18,099	7,37	6,96	0,05525
10	283	24,23	1,5185	0,062672	17,736	13,78	13,00	0,05638
20	293	44,46	2,6133	0,058779	17,222	24,55	23,13	0,05806
30	303	78,52	4,3193	0,055009	16,668	41,97	39,35	0,05999
40	313	133,69	6,8784	0,051450	16,104	69,04	64,75	0,06210
50	323	219,90	10,580	0,048114	15,541	109,59	102,54	0,06435
60	333	350,21	15,757	0,044992	14,982	168,26	157,03	0,06674
70	343	541,15	22,767	0,042072	14,431	250,43	233,08	0,06930
80	353	812,91	31,981	0,039342	13,887	362,04	335,97	0,07201
90	363	1189,30	43,752	0,036788	13,354	509,32	471,18	0,07488
100	373	1697,55	58,397	0,034401	12,831	698,53	644,09	0,07793
110	383	2367,64	76,162	0,032168	12,320	935,46	859,53	0,08117
120	393	3231,73	97,211	0,030080	11,821	1225,17	1121,53	0,08459
130	403	4323,00	121,597	0,028128	11,335	1571,53	1432,56	0,08822
140	413	5674,59	149,255	0,026302	10,863	1976,82	1794,84	0,09206
150	423	7318,40	179,998	0,024595	10,404	2441,72	2207,02	0,09612

TEMPÉRATURE en degrés centig. t.	CHALEUR totale λ. (Regn.)	Diff.	CHALEUR du liquide q. (Regn.)	Diff.	CHALEUR de vaporisation r.	Diff.	CHALEUR latente externe Apu.	Diff.	CHALEUR de la vapeur J.	Diff.	CHALEUR latente interne ρ.	Diff.	u
— 1 —	— 2 —		— 3 —		— 4 —		— 5 —		— 6 —		— 7 —		— 8 —
0	236,50		0,00		236,50		13,067		223,43		223,43		32,0844
10	244,40	7,90	5,59	5,59	238,81	−2,31	13,465	0,398	230,94	7,51	225,35	−1,95	17,3281
20	252,00	7,60	11,42	5,83	240,58	−1,77	13,969	0,504	238,03	7,09	226,61	−1,26	9,7976
30	258,00	6,00	17,49	6,07	240,51	+0,07	14,429	0,460	243,57	5,54	226,08	+0,53	5,7303
40	262,00	4,00	23,71	6,22	238,29	2,22	14,797	0,368	247,20	3,63	223,49	2,59	3,4513
50	264,00	2,00	30,21	6,50	233,79	4,50	15,044	0,247	248,96	1,76	218,75	4,74	2,1332
60	265,00	1,00	37,37	7,16	227,63	6,16	15,193	0,149	249,81	0,85	212,44	6,31	1,3528
70	265,20	0,20	44,58	7,21	220,61	7,01	15,287	0,094	249,91	+0,19	205,32	7,11	0,8809
80	265,20	0,00	52,11	7,53	213,09	7,53	15,344	0,057	249,86	−0,05	197,75	7,58	0,5886
90	266,00	0,80	59,97	7,86	206,03	7,06	15,428	0,084	250,57	+0,71	190,60	7,15	0,4045
100	267,30	1,30	68,18	8,21	199,12	6,91	15,518	0,090	251,78	1,21	183,60	7,00	0,2850
110	269,60	2,30	76,74	8,56	192,86	6,26	15,654	0,136	253,95	2,17	177,21	6,39	0,2062
120	272,50	2,90	85,67	8,93	186,83	6,03	15,803	0,149	256,70	2,75	171,03	6,18	0,1525
130	276,00	3,50	94,98	9,31	181,02	5,81	15,969	0,166	260,03	3,33	165,05	5,98	0,1152
140	280,50	4,50	104,70	9,72	175,80	5,22	16,184	0,215	264,32	4,29	159,62	5,43	0,0889
150	285,30	4,80	114,82	10,12	170,48	5,32	16,386	0,202	268,91	4,59	154,09	5,53	0,0698

TEMPÉRATURE en degrés centigr. t.	TEMPÉRATURE absolue T.	PRESSION en millimètres de mercure p. (Regnault.)	$\frac{dp}{dt}$	$\frac{dp}{pdt}$	$T\frac{dp}{pdt}$	$\frac{r}{u}$	$\frac{\rho}{u}$	$\frac{Apu}{r}$
— 1 —	— 2 —	— 3 —	— 4 —	— 5 —	— 6 —	— 7 —	— 8 —	— 9 —
0	273	63,33	3,769	0,059516	16,248	33,00	30,97	0,06155
10	283	110,32	5,726	0,051910	14,690	51,97	48,43	0,06807
20	293	180,08	8,349	0,046364	13,553	78,45	72,68	0,07378
30	303	280,05	11,797	0,042125	12,674	114,63	105,65	0,07834
40	313	419,35	16,242	0,038733	12,123	163,04	149,59	0,08248
50	323	608,81	21,858	0,035903	11,596	226,41	206,89	0,08623
60	333	860,96	28,808	0,033460	11,142	307,64	280,03	0,08975
70	343	1189,90	37,237	0,031294	10,733	409,60	371,44	0,09316
80	353	1611,05	47,266	0,029338	10,356	535,06	483,40	0,09656
90	363	2140,82	58,971	0,027546	9,999	686,49	617,84	0,10001
100	373	2796,20	72,391	0,025889	9,657	865,92	776,25	0,10355
110	383	3594,33	87,515	0,024348	9,325	1074,90	959,64	0,10723
120	393	4551,95	104,271	0,022907	9,002	1314,15	1168,18	0,11108
130	403	5684,90	122,555	0,021558	8,688	1583,89	1401,58	0,11510
140	413	7007,64	142,199	0,020292	8,380	1883,37	1658,64	0,11932

TEMPÉRATURE en degrés centig. t.	CHALEUR totale λ. (Regn.)	Diff.	CHALEUR du liquide q. (Regn.)	Diff.	CHALEUR de vaporisation r.	Diff.	CHALEUR latente externe Apu.	Diff.	CHALEUR de la vapeur J.	Diff.	CHALEUR latente interne ρ.	Diff.	u
— 1 —	— 2 —		— 3 —		— 4 —		— 5 —		— 6 —		— 7 —		— 8 —
0	140,50	3,61	0,00	5,10	140,50	1,49	8,647	0,815	131,85	2,80	131,85	2,30	4,2576
10	144,11	3,51	5,10	5,19	139,01	1,68	9,462	0,670	134,65	2,84	129,55	2,35	2,6748
20	147,62	3,41	10,29	5,26	137,33	1,85	10,132	0,481	137,49	2,93	127,20	2,33	1,7505
30	151,03	3,30	15,55	5,34	135,48	2,04	10,613	0,393	140,42	2,90	124,87	2,44	1,1818
40	154,33	3,20	20,89	5,42	133,44	2,22	11,006	0,309	143,32	2,90	122,43	2,52	0,8184
50	157,53	3,10	26,31	5,50	131,22	2,40	11,315	0,246	146,22	2,85	119,91	2,65	0,5796
60	160,63	2,99	31,81	5,58	128,82	2,59	11,561	0,198	149,07	2,79	117,26	2,79	0,4187
70	163,62	2,89	37,39	5,66	126,23	2,77	11,759	0,162	151,86	2,73	114,47	2,93	0,3082
80	166,51	2,79	43,05	5,74	123,46	2,95	11,921	0,131	154,59	2,66	111,54	3,08	0,2307
90	169,30	2,68	48,79	5,82	120,51	3,14	12,052	0,102	157,25	2,58	108,46	3,24	0,1755
100	171,98	2,58	54,61	5,89	117,37	3,31	12,154	0,077	159,83	2,50	105,22	3,39	0,1355
110	174,56	2,48	60,50	5,98	114,06	3,50	12,231	0,050	162,33	2,43	101,83	3,55	0,1061
120	177,04	2,38	66,48	6,06	110,56	3,68	12,281	0,021	164,76	2,36	98,28	3,70	0,0841
130	179,42	2,27	72,54	6,13	106,88	3,86	12,302	0,000	167,12	2,27	94,58	3,96	0,0675
140	181,69		78,67		103,02		12,302		169,39		90,62		0,0547

TEMPÉRATURE en degrés centigr. t.	TEMPÉRATURE absolue T.	PRESSION en millimètres de mercure p. (Regnault.)	$\frac{dp}{dt}$	$\frac{dp}{pdt}$	$T\frac{dp}{pdt}$	$\frac{r}{u}$	$\frac{\rho}{u}$	$\frac{Apu}{r}$
— 1 —	— 2 —	— 3 —	— 4 —	— 5 —	— 6 —	— 7 —	— 8 —	— 9 —
0	273	59,72	3,235	0,054178	14,790	28,32	26,41	0,06761
10	283	100,47	4,953	0,049297	13,951	44,95	41,73	0,07168
20	293	160,47	7,246	0,045156	13,231	68,08	62,93	0,07558
30	303	247,51	10,295	0,041593	12,603	100,04	92,10	0,07935
40	313	369,26	14,211	0,038485	12,046	142,64	130,80	0,08302
50	323	535,05	19,123	0,035741	11,544	198,08	180,92	0,08662
60	333	755,44	25,150	0,033292	11,086	268,58	244,35	0,09020
70	343	1042,11	32,393	0,031084	10,662	356,31	322,89	0,09379
80	353	1407,64	40,933	0,029079	10,265	463,38	418,24	0,09742
90	363	1865,22	50,816	0,027244	9,889	591,55	531,73	0,10112
100	373	2428,54	62,061	0,025555	9,532	742,36	664,48	0,10491
110	383	3110,99	74,645	0,023994	9,190	916,83	817,06	0,10882
120	393	3925,74	88,510	0,022546	8,860	1115,51	989,62	0,11286
130	403	4885,10	103,549	0,021197	8,542	1338,26	1181,60	0,11706
140	413	6000,16	119,625	0,019937	8,234	1584,38	1391,96	0,12145
150	423	7280,62	136,584	0,018760	7,935	1582,80	1619,32	0,12602
160	433	8734,20	154,218	0,017658	7,646	2141,61	1861,51	0,13079

TEMPÉRATURE en degrés centig. t.	CHALEUR totale λ. (Regn.)	Diff.	CHALEUR du liquide q. (Regn.)	Diff.	CHALEUR de vaporisation r.	Diff.	CHALEUR latente externe Apu.	Diff.	CHALEUR de la vapeur J.	Diff.	CHALEUR latente interne ρ.	Diff.	u
— 1 —	— 2 —		— 3 —		— 4 —		— 5 —		— 6 —		— 7 —		— 8 —
0	67,000	0,375	0,00	2,33	67,00	0,96	4,530	0,204	62,47	1,17	62,47	1,16	2,3658
10	68,375	0,375	2,33	2,34	66,04	0,96	4,734	0,185	63,64	1,19	61,31	1,15	1,4692
20	69,75	0,375	4,67	2,35	65,08	0,98	4,919	0,167	64,83	1,20	60,16	1,15	0,9559
30	71,12	0,375	7,02	2,35	64,10	0,97	5,086	0,155	66,03	1,23	59,01	1,12	0,6407
40	72,50	0,375	9,37	2,37	63,13	1,00	5,241	0,141	67,26	1,23	57,89	1,12	0,4426
50	73,87	0,375	11,74	2,38	62,13	1,00	5,382	0,132	68,49	1,25	56,75	1,13	0,3137
60	75,25	0,375	14,12	2,39	61,13	1,02	5,514	0,124	69,74	1,24	55,62	1,15	0,2276
70	76,62	0,375	16,51	2,40	60,11	1,02	5,638	0,118	70,98	1,26	54,47	1,14	0,1687
80	78,00	0,375	18,91	2,41	59,09	1,04	5,756	0,114	72,24	1,26	53,33	1,15	0,1275
90	79,37	0,375	21,32	2,42	58,05	1,04	5,870	0,111	73,50	1,27	52,18	1,15	0,0981
100	80,75	0,375	23,74	2,43	57,01	1,06	5,981	0,107	74,77	1,26	51,03	1,17	0,0768
110	82,12	0,375	26,17	2,44	55,95	1,06	6,088	0,107	76,03	1,28	49,86	1,16	0,0610
120	83,50	0,375	28,61	2,45	54,89	1,08	6,195	0,104	77,31	1,26	48,70	1,19	0,0492
130	84,87	0,375	31,06	2,46	53,81	1,08	6,299	0,105	78,57	1,28	47,51	1,10	0,0402
140	86,25	0,375	33,52	2,47	52,73	1,10	6,404	0,102	79,85	1,26	46,33	1,21	0,0333
150	87,62	0,375	35,99	2,48	51,63	1,10	6,506	0,103	81,11	1,28	45,12	1,20	0,0279
160	89,00		38,47		50,53		6,609		82,39		43,92		0,0236

TEMPÉRATURE en degrés centigr. t.	TEMPÉRATURE absolue T.	PRESSION en millimètres de mercure p. (Regnault.)	$\frac{dp}{dt}$	$\frac{dp}{pdt}$	$T\frac{dp}{pdt}$	$\frac{r}{u}$	$\frac{\rho}{u}$	$\frac{Apu}{r}$
— 1 —	— 2 —	— 3 —	— 4 —	— 5 —	— 6 —	— 7 —	— 8 —	— 9 —
0	273	32,95	1,82	0,055338	15,107	15,96	14,90	0,06619
10	283	55,97	2,84	0,050708	14,350	25,76	23,97	0,06968
20	293	90,99	4,24	0,046574	13,646	39,82	36,90	0,07328
30	303	142,27	6,10	0,042882	12,993	59,28	54,72	0,07696
40	313	214,81	8,50	0,039584	12,390	85,35	78,46	0,08071
50	323	314,28	11,52	0,036637	11,834	119,30	109,22	0,08450
60	333	447,43	15,21	0,034002	11,322	162,46	148,11	0,08832
70	343	621,15	19,66	0,031647	10,855	216,23	196,31	0,09212
80	353	843,29	24,91	0,029539	10,427	281,99	254,95	0,09590
90	363	1122,26	31,03	0,027653	10,038	361,27	325,28	0,09962
100	373	1467,09	38,09	0,025964	9,685	455,64	408,59	0,10325
110	383	1887,44	46,15	0,024451	9,365	566,83	506,30	0,10678
120	393	2393,67	55,28	0,023094	9,076	696,70	619,94	0,11018
130	403	2996,88	65,56	0,021876	8,816	847,28	751,17	0,11343
140	413	3709,04	77,09	0,020784	8,584	1021,00	902,06	0,11650
150	423	4543,13	89,96	0,019801	8,376	1220,31	1074,28	0,11939
160	433	5513,14	104,29	0,018917	8,191	1448,19	1271,39	0,12208

TEMPÉRATURE en degrés centig. t.	CHALEUR totale λ. (Regn.)	Diff.	CHALEUR du liquide q. (Regn.)	Diff.	CHALEUR de vaporisation r.	Diff.	CHALEUR latente externe Apu.	Diff.	CHALEUR de la vapeur J.	Diff.	CHALEUR latente interne ρ.	Diff.	u
— 1 —	— 2 —		— 3 —		— 4 —		— 5 —		— 6 —		— 7 —		— 8 —
0	52,00	1,44	0,00	1,99	52,00	,55	3,442	0,143	48,56	1,30	48,56	0,69	3,2581
10	53,44	1,42	1,99	2,00	51,45	0,58	3,585	0,143	49,86	1,27	47,87	0,73	1,9969
20	54,86	1,37	3,99	2,03	50,87	0,66	3,728	0,136	51,13	1,24	47,14	0,79	1,2775
30	56,23	1,3	6,02	2,04	50,21	0,69	3,864	0,133	52,37	1,21	46,35	0,83	0,8470
40	57,58	1,30	8,06	2,06	49,52	0,76	3,997	0,123	53,58	1,18	45,52	0,88	0,5802
50	58,88	1,28	10,12	2,08	48,76	0,80	4,120	0,116	54,76	1,16	44,64	0,92	0,4087
60	60,16	1,24	12,20	2,10	47,96	0,85	4,236	0,103	55,92	1,14	43,72	0,96	0,2952
70	61,40	1,20	14,30	2,12	47,10	0,92	4,339	0,090	57,06	1,11	42,76	1,01	0,2178
80	62,60	1,17	16,42	2,13	46,18	0,96	4,429	0,076	58,17	1,10	41,75	1,03	0,1638
90	63,77	1,13	18,55	2,15	45,22	1,02	4,505	0,059	59,27	1,07	40,72	1,08	0,1252
100	64,90	1,11	20,70	2,17	44,20	1,06	4,564	0,042	60,34	1,06	39,64	1,11	0,0970
110	66,01	1,06	22,87	2,19	43,14	1,13	4,606	0,023	61,40	1,04	38,53	1,15	0,0761
120	67,07	1,03	25,06	2,21	42,01	1,18	4,629	0,002	62,44	1,03	37,38	1,18	0,0603
130	68,10	1,00	27,27	2,22	40,83	1,22	4,631	—0,017	63,47	1,02	36,20	1,20	0,0482
140	69,10	0,97	29,49	2,24	39,61	1,27	4,614	—0,037	64,49	1,00	35,00	1,24	0,0388
150	70,07	0,93	31,73	2,27	38,34	1,34	4,577	—0,060	65,49	0,99	33,76	1,28	0,0315
160	71,00		34,00		37,00		4,517		66,48		32,48		0,0255

TEMPÉRATURE en degrés centigr. t.	TEMPÉRATURE absolue T.	PRESSION en millimètres de mercure p. (Regnault.)	$\frac{dp}{dt}$	$\frac{dp}{pdt}$	$T\frac{dp}{pdt}$	$\frac{r}{u}$	$\frac{\rho}{u}$	$\frac{Apu}{r}$
— 1 —	— 2 —	— 3 —	— 4 —	— 5 —	— 6 —	— 7 —	— 8 —	— 9 —
0	273	127,91	5,846	0,045704	12,477	51,18	47,08	0,08015
10	283	198,46	8,380	0,042226	11,950	76,05	69,69	0,08368
20	293	298,03	11,664	0,039137	11,467	109,60	100,04	0,08721
30	303	434,62	15,813	0,036383	11,024	153,65	139,71	0,09071
40	313	617,53	20,941	0,033911	10,614	210,20	190,40	0,09421
50	323	857,07	27,157	0,031682	10,233	281,30	253,82	0,09772
60	333	1164,51	34,540	0,029661	9,877	368,85	331,51	0,10124
70	343	1552,09	43,181	0,027821	9,543	474,98	425,21	0,10478
80	353	2032,53	53,124	0,026137	9,226	601,38	536,20	0,10838
90	363	2619,08	64,406	0,024591	8,926	749,76	665,77	0,11202
100	373	3325,15	77,030	0,023166	8,641	921,42	814,79	0,11573
110	383	4164,06	90,972	0,021847	8,367	1117,36	983,82	0,11951
120	393	5148,79	106,173	0,020621	8,104	1338,12	1173,00	0,12339
130	403	6291,60	122,573	0,019482	7,851	1584,12	1382,35	0,12737
140	413	7603,96	140,057	0,018419	7,607	1855,00	1611,15	0,13146
150	423	9095,94	158,497	0,017425	7,371	2150,06	1858,36	0,13567

TEMPÉRATURE en degrés centig. t.	CHALEUR totale λ. (Regn.)	Diff.	CHALEUR du liquide q. (Regn.)	Diff.	CHALEUR de vaporisation r.	Diff.	CHALEUR latente externe Apu.	Diff.	CHALEUR de la vapeur J.	Diff.	CHALEUR latente interne ρ.	Diff.	u
— 1 —	— 2 —		— 3 —		— 4 —		— 5 —		— 6 —		— 7 —		— 8 —
0	90,00	1,42	0,00	2,36	90,00	0,94	7,213	0,239	82,79	1,18	82,79	1,18	1,7585
10	91,42	1,34	2,36	2,38	89,06	1,04	7,452	0,224	83,97	1,11	81,61	1,27	1,1712
20	92,76	1,25	4,74	2,39	88,02	1,14	7,676	0,205	85,08	1,05	80,34	1,34	0,8031
30	94,01	1,17	7,13	2,41	86,88	1,24	7,881	0,187	86,13	0,98	79,00	1,43	0,5654
40	95,18	1,09	9,54	2,42	85,64	1,33	8,068	0,171	87,11	0,92	77,57	1,50	0,4074
50	96,27	1,01	11,96	2,45	84,31	1,44	8,239	0,151	88,03	0,86	76,07	1,59	0,2997
60	97,28	0,92	14,41	2,45	82,87	1,53	8,390	0,133	88,89	0,79	74,48	1,66	0,2247
70	98,20	0,84	16,86	2,48	81,34	1,64	8,523	0,115	89,68	0,72	72,82	1,76	0,1712
80	99,04	0,76	19,34	2,49	79,70	1,73	8,638	0,096	90,40	0,67	71,06	1,82	0,1325
90	99,80	0,68	21,83	2,51	77,97	1,83	8,734	0,078	91,07	0,60	69,24	1,91	0,1040
100	100,48	0,59	24,34	2,52	76,14	1,93	8,812	0,057	91,67	0,53	67,33	1,99	0,0826
110	101,07	0,51	26,86	2,54	74,21	2,03	8,869	0,037	92,20	0,47	65,34	2,07	0,0664
120	101,58	0,43	29,40	2,56	72,18	2,13	8,906	0,016	92,67	0,42	63,27	2,14	0,0539
130	102,01	0,35	31,96	2,57	70,05	2,22	8,922	−0,005	93,09	0,35	61,13	2,22	0,0442
140	102,36	0,26	34,53	2,59	67,83	2,33	8,917	−0,031	93,44	0,29	58,91	2,30	0,0366
150	102,62		37,12		65,50		8,886		93,73		56,61		0,0305

TEMPÉRATURE en degrés centigrades t.	TEMPÉRATURE absolue T.	PRESSION en millim. de mercure p. (Regnault.)	$\frac{dp}{dt}$	$\frac{dp}{pdt}$	$T\frac{dp}{pdt}$	$\frac{r}{u}$	$\frac{\rho}{u}$	$\frac{Apu}{r}$
— 1 —	— 2 —	— 3 —	— 4 —	— 5 —	— 6 —	— 7 —	— 8 —	— 9 —
140	413	3,0592	0,1030	0,033684	13,911	1,36	1,27	0,07189
160	433	5,9002	0,1888	0,031999	13,855	2,62	2,43	0,07217
180	453	11,00	0,3336	0,030328	13,738	4,85	4,49	0,07279
200	473	19,90	0,5712	0,028703	13,576	8,66	8,03	0,07366
220	493	34,70	0,9418	0,027142	13,381	14,89	13,78	0,07473
240	513	58,82	1,5088	0,025652	13,159	24,82	22,94	0,07599
260	533	96,73	2,3443	0,024236	12,918	40,07	36,97	0,07741
280	553	155,17	3,5525	0,022894	12,660	63,00	58,02	0,07898
300	573	242,15	5,2362	0,021624	12,390	96,22	88,45	0,08071
320	593	368,73	7,5302	0,020422	12,110	143,20	131,38	0,08257
340	613	548,35	10,576	0,019287	11,823	207,90	190,32	0,08458
360	633	797,74	14,530	0,018214	11,529	294,96	269,38	0,08673
380	653	1139,65	19,602	0,017200	11,232	410,48	373,94	0,08903
400	673	1587,96	25,795	0,016244	10,932	556,73	505,80	0,09147
420	693	2177,53	33,405	0,015341	10,631	742,40	672,57	0,09406
440	713	2933,99	42,499	0,014485	10,328	971,73	877,64	0,09682
460	733	3888,14	53,186	0,013679	10,027	1250,24	1125,55	0,09973
480	753	5072,43	65,520	0,012917	9,726	1582,19	1419,52	0,10281
500	773	6520,25	79,534	0,012198	9,429	1971,52	1762,47	0,10605
520	793	8264,96	95,204	0,011519	9,134	2421,13	2156,08	0,10947

TABLE IX. — VAPEUR D'ACIDE CARBONIQUE SATURÉE.

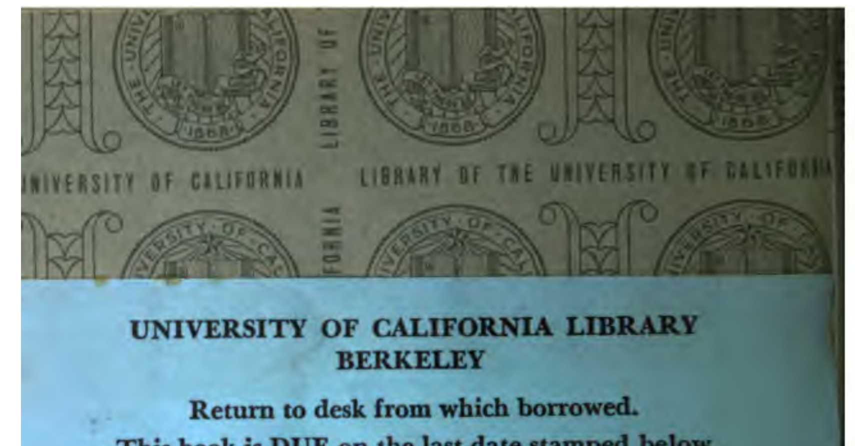
TEMPÉRATURE en degrés centigrades t.	TEMPÉRATURE absolue T.	PRESSION en millim. de mercure p. (Regnault.)	$\frac{dp}{dt}$	$\frac{dp}{pdt}$	$T\frac{dp}{pdt}$	$\frac{r}{u}$	$\frac{\rho}{u}$	$\frac{Apu}{r}$
— 1 —	— 2 —	— 3 —	— 4 —	— 5 —	— 6 —	— 7 —	— 8 —	— 9 —
— 25	248	13007,02	399,64	0,030725	7,620	3178,42	2761,30	0,13124
— 20	253	15142,44	456,63	0,030156	7,629	3704,91	3219,31	0,13107
— 15	258	17582,48	518,66	0,029499	7,611	4291,33	3727,47	0,13139
— 10	263	20340,20	585,19	0,028770	7,566	4935,58	4283,29	0,13216
— 5	268	23441,34	656,01	0,027985	7,500	5638,04	4886,30	0,13333
0	273	26906,60	730,70	0,027157	7,414	6397,22	5534,35	0,13488
+ 5	278	30753,80	808,70	0,026296	7,310	7209,74	6223,49	0,13679
+ 10	283	34998,65	889,42	0,025413	7,192	8072,03	6949,65	0,13904
+ 15	288	39646,86	972,06	0,024518	7,061	8977,87	7706,43	0,14162
+ 20	293	44716,58	1055,98	0,023615	6,919	9922,30	8488,28	0,14452
+ 25	298	50207,32	1140,31	0,022712	6,768	10897,49	9287,38	0,14775
+ 30	303	56119,05	1224,18	0,021814	6,610	11895,36	10095,67	0,15129
+ 35	308	62447,30	1306,77	0,020926	6,445	12907,36	10904,73	0,15515
+ 40	313	69184,45	1387,22	0,020051	6,276	13924,36	11705,67	0,15934
+ 45	318	76314,60	1464,71	0,019193	6,103	14937,11	12489,76	0,16384

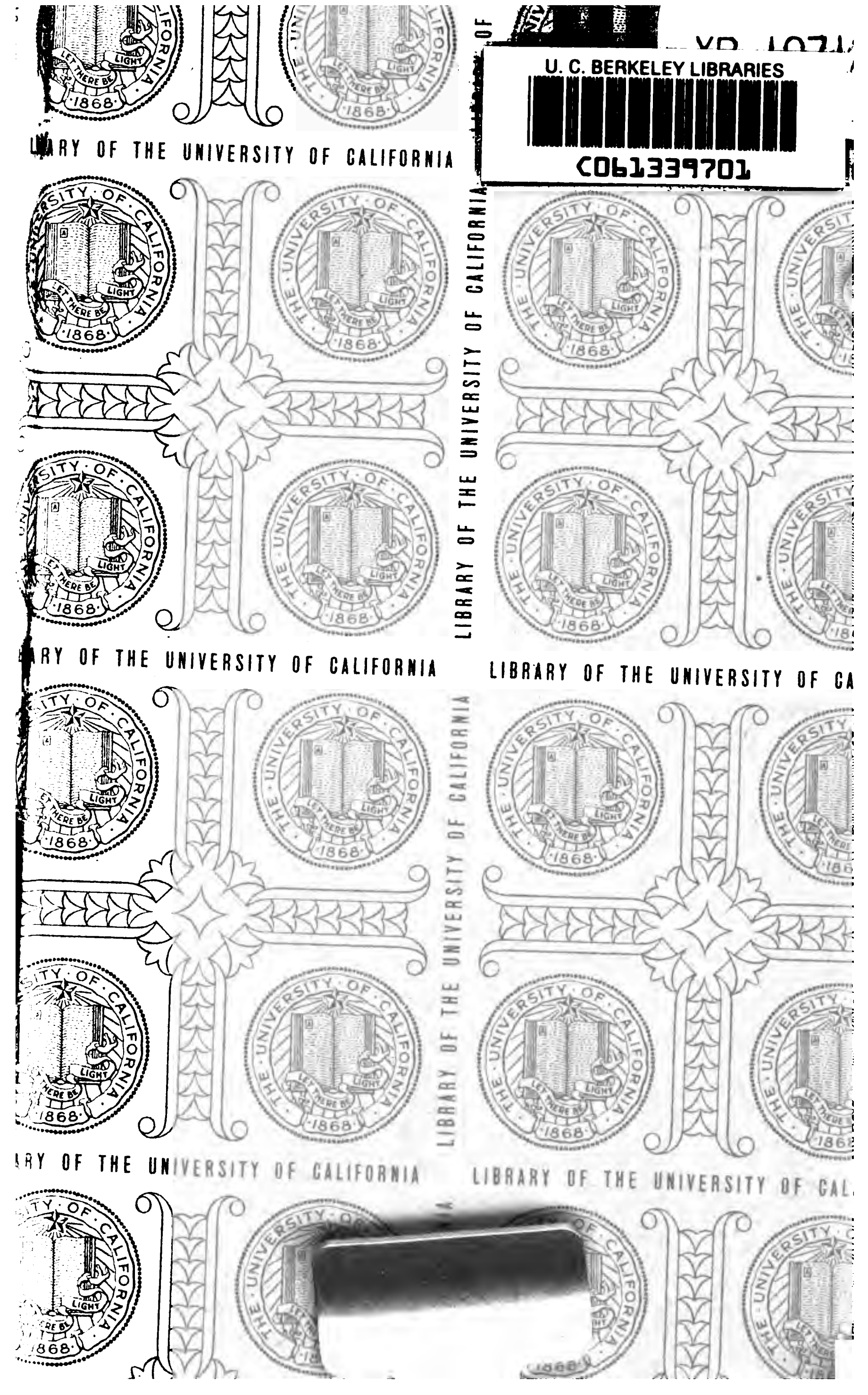
PRESSION en atmosphères.	PRESSION en millimètres de mercure.	PRESSION en kilogrammes par mètre carré.	TEMPÉRATURE en degrés centigrades t. (Regn.)	CHALEUR du liquide q. (Regn.)	CHALEUR latente interne ρ.	CHALEUR latente externe Apu.	u	$\frac{\rho}{u}$	Diff.	POIDS d'un mètre cube en kilogr. γ.	Diff.
— 1 —	— 2 —	— 3 —	— 4 —	— 5 —	— 6 —	— 7 —	— 8 —	— 9 —	—10—	— 11 —	—12—
0,1	76	1033,4	46,21	46,282	538,848	35,464	14,5508	37,03	32,92	0,0687	0,0639
0,2	152	2066,8	60,45	60,589	527,584	36,764	7,5421	69,95	31,32	0,1326	0,0619
0,3	228	3100,2	69,49	69,687	520,433	37,574	5,1388	101,27	30,28	0,1945	0,0608
0,4	304	4133,6	76,25	76,499	515,086	38,171	3,9154	131,55	29,55	0,2553	0,0600
0,5	380	5167,0	81,71	82,017	510,767	38,637	3,1705	161,10	28,83	0,3153	0,0591
0,6	456	6200,4	86,32	86,662	507,121	39,045	2,6700	189,93	28,36	0,3744	0,0586
0,7	532	7233,8	90,32	90,704	503,957	39,387	2,3086	218,29	27,91	0,4330	0,0580
0,8	608	8267,2	93,88	94,304	501,141	39,688	2,0355	246,20	27,52	0,4910	0,0577
0,9	684	9300,6	97,08	97,543	498,610	39,957	1,8216	273,72	27,18	0,5487	0,0572
1,0	760	10334,0	100,00	100,500	496,300	40,200	1,6494	300,90	26,87	0,6059	0,0569
1,1	836	11367,4	102,68	103,216	494,180	40,421	1,5077	327,77	26,58	0,6628	0,0566
1,2	912	12400,8	105,17	105,740	492,210	40,626	1,3891	354,35	26,31	0,7194	0,0563
1,3	988	13434,2	107,50	108,104	490,367	40,816	1,2882	380,66	26,07	0,7757	0,0560
1,4	1064	14467,6	109,68	110,316	488,643	40,993	1,2014	406,73	25,85	0,8317	0,0557
1,5	1140	15501,0	111,74	112,408	487,014	41,159	1,1258	432,58	25,64	0,8874	0,0556
1,6	1216	16534,4	113,69	114,389	485,471	41,315	1,0595	458,22	25,44	0,9430	0,0553
1,7	1292	17567,8	115,54	116,269	484,008	41,463	1,0007	483,66	25,27	0,9983	0,0551
1,8	1368	18601,2	117,30	118,059	482,616	41,602	0,9483	508,93	25,10	1,0534	0,0550
1,9	1444	19634,6	118,99	119,779	481,279	41,734	0,9012	534,03	24,91	1,1084	0,0547
2,0	1520	20668,0	120,60	121,417	480,005	41,861	0,8588	558,94	24,78	1,1631	0,0546
2,1	1596	21701,4	122,15	122,995	478,779	41,981	0,8202	583,72	24,62	1,2177	0,0544
2,2	1672	22734,8	123,64	124,513	477,601	42,096	0,7851	608,34	24,48	1,2721	0,0543
2,3	1748	23768,2	125,07	125,970	476,470	42,207	0,7529	632,82	24,32	1,3264	0,0541
2,4	1824	24801,6	126,46	127,386	475,370	42,314	0,7234	657,14	24,22	1,3805	0,0540
2,5	1900	25835,0	127,80	128,753	474,310	42,416	0,6961	681,36	24,07	1,4345	0,0538
2,6	1976	26868,4	129,10	130,079	473,282	42,515	0,6709	705,43	23,99	1,4883	0,0537
2,7	2052	27901,8	130,35	131,354	472,293	42,610	0,6475	729,42	23,82	1,5420	0,0536
2,8	2128	28935,2	131,57	132,599	471,328	42,702	0,6257	753,24	23,73	1,5956	0,0534
2,9	2204	29968,6	132,76	133,814	470,387	42,791	0,6054	776,97	23,64	1,6490	0,0534
3,0	2280	31002,0	133,91	134,989	469,477	42,876	0,5864	800,61	23,52	1,7024	0,0532
3,1	2356	32035,4	135,03	136,133	468,591	42,960	0,5686	824,13	23,44	1,7556	0,0532
3,2	2432	33068,8	136,12	137,247	467,729	43,040	0,5518	847,57	23,31	1,8088	0,0530
3,3	2508	34102,2	137,19	138,341	466,883	43,119	0,5361	870,88	23,21	1,8618	0,0529
3,4	2584	35135,6	138,23	139,404	466,060	43,196	0,5213	894,09		1,9147	

PRESSION en atmosphères.	PRESSION en millimètres de mercure.	PRESSION en kilogrammes par mètre carré.	TEMPÉRATURE en degrés centigrades t. (Regn.)	CHALEUR du liquide q. (Regn.)	CHALEUR latente interne ρ.	CHALEUR latente externe Apu.	u	$\frac{\rho}{u}$	Diff.	POIDS d'un mètre cube en kilogr. γ.	Diff.
— 1 —	— 2 —	— 3 —	— 4 —	— 5 —	— 6 —	— 7 —	— 8 —	— 9 —	— 10 —	— 11 —	— 12 —
3,5	2660	36169,0	139,24	140,438	465,261	43,269	0,5072	917,2	23,1	1,9676	0,0527
3,6	2736	37202,4	140,23	141,450	464,478	43,342	0,4940	940,3	22,9	2,0203	0,0526
3,7	2812	38235,8	141,21	142,453	463,703	43,413	0,4814	963,2	22,9	2,0729	0,0526
3,8	2888	39269,2	142,15	143,416	462,959	43,480	0,4695	986,1	22,8	2,1255	0,0525
3,9	2964	40302,6	143,08	144,368	462,224	43,548	0,4581	1008,9	22,7	2,1780	0,0523
4,0	3040	41336,0	144,00	145,310	461,496	43,614	0,4474	1031,6	22,6	2,2303	0,0523
4,1	3116	42369,4	144,89	146,222	460,792	43,677	0,4371	1054,2	22,6	2,2826	0,0523
4,2	3192	43402,8	145,76	147,114	460,104	43,739	0,4273	1076,8	22,5	2,3349	0,0522
4,3	3268	44436,2	146,61	147,985	459,431	43,799	0,4179	1099,3	22,4	2,3871	0,0520
4,4	3344	45469,6	147,46	148,857	458,759	43,859	0,4090	1121,7	22,3	2,4391	0,0520
4,5	3420	46503,0	148,29	149,708	458,103	43,918	0,4004	1144,0	22,3	2,4911	0,0519
4,6	3496	47536,4	149,10	150,539	457,462	43,975	0,3922	1166,3	22,2	2,5430	0,0519
4,7	3572	48569,8	149,90	151,360	456,829	44,030	0,3844	1188,5	22,1	2,5949	0,0518
4,8	3648	49603,2	150,69	152,171	456,204	44,085	0,3768	1210,6	22,1	2,6467	0,0517
4,9	3724	50636,6	151,46	152,961	455,595	44,139	0,3696	1232,7	22,0	2,6984	0,0516
5,0	3800	51670,0	152,22	153,741	454,994	44,192	0,3626	1254,7	21,9	2,7500	0,0516
5,1	3876	52703,4	152,97	154,512	454,401	44,243	0,3559	1276,6	21,9	2,8016	0,0515
5,2	3952	53736,8	153,70	155,262	453,823	44,293	0,3495	1298,5	21,8	2,8531	0,0515
5,3	4028	54770,2	154,43	156,012	453,246	44,343	0,3433	1320,3	21,8	2,9046	0,0514
5,4	4104	55803,6	155,14	156,741	452,684	44,392	0,3373	1342,1	21,7	2,9560	0,0513
5,5	4180	56837,0	155,85	157,471	452,123	44,441	0,3315	1363,8	21,6	3,0073	0,0513
5,6	4256	57870,4	156,54	158,181	451,577	44,487	0,3529	1385,4	21,6	3,0586	0,0512
5,7	4332	58903,8	157,22	158,880	451,039	44,533	0,3205	1407,0	21,5	3,1098	0,0512
5,8	4408	59937,2	157,90	159,579	450,501	44,579	0,3153	1428,5	21,5	3,1610	0,0512
5,9	4484	60970,6	158,56	160,259	449,979	44,623	0,3103	1450,0	21,5	3,2122	0,0510
6,0	4560	62004,0	159,22	160,938	449,457	44,667	0,3054	1471,5	21,4	3,2632	0,0510
6,1	4636	63037,4	159,87	161,607	448,943	44,710	0,3007	1492,9	21,3	3,3142	0,0510
6,2	4712	64070,8	160,50	162,255	448,444	44,753	0,2962	1514,2	21,3	3,3652	0,0509
6,3	4788	65104,2	161,14	162,915	447,938	44,794	0,2917	1535,5	21,2	3,4161	0,0509
6,4	4864	66137,6	161,76	163,553	447,448	44,836	0,2874	1556,7	21,2	3,4670	0,0508
6,5	4940	67171,0	162,37	164,181	446,965	44,876	0,2883	1577,9	21,1	3,5178	0,0507
6,6	5016	68204,4	162,98	164,810	446,483	44,916	0,2792	1599,0	21,1	3,5685	0,0507
6,7	5092	69237,8	163,58	165,428	446,008	44,956	0,2753	1620,1	21,1	3,6192	0,0507
6,8	5168	70271,2	164,18	166,047	445,534	44,994	0,2715	1641,2	21,0	3,6699	0,0507
6,9	5244	71304,6	164,76	166,645	445,075	45,032	0,2678	1662,3		3,7206	

PRESSION en atmosphères.	PRESSION en millimètres de mercure.	PRESSION en kilogrammes par mètre carré.	TEMPÉRATURE en degrés centigrades t. (Regn.)	CHALEUR du liquide q. (Regn.)	CHALEUR latente interne ρ.	CHALEUR latente externe Apu.	u	$\frac{\rho}{u}$	Diff.	POIDS d'un mètre cube en kilogr. γ.	Diff.
— 1 —	— 2 —	— 3 —	— 4 —	— 5 —	— 6 —	— 7 —	— 8 —	— 9 —	— 10 —	— 11 —	— 12 —
7,00	5320	72338,0	165,34	167,243	444,616	45,070	0,2642	1683,0		3,7711	
7,25	5510	74921,5	166,77	168,718	443,485	45,162	0,2556	1735,2	52,2	3,8974	0,1263
7,50	5700	77505,0	168,15	170,142	442,393	45,250	0,2475	1787,1	51,9	4,0234	0,1260
7,75	5890	80088,5	169,50	171,535	441,325	45,337	0,2400	1838,7	51,6	4,1490	0,1256
8,00	6080	82672,0	170,81	172,888	440,289	45,420	0,2329	1890,1	51,4	4,2745	0,1255
8,25	6270	85255,5	172,10	174,221	439,269	45,501	0,2263	1941,2	51,1	4,3997	0,1252
8,50	6460	87839,0	173,35	175,514	438,280	45,578	0,2200	1992,1	50,9	4,5248	0,1251
8,75	6650	90422,5	174,57	176,775	437,315	45,654	0,2141	2042,8	50,7	4,6495	0,1247
9,00	6840	93006,0	175,77	178,017	436,366	45,727	0,2085	2093,3	50,5	4,7741	0,1246
9,25	7030	95589,5	176,94	179,228	435,440	45,798	0,2031	2143,5	50,2	4,8985	0,1244
9,50	7220	98173,0	178,08	180,408	434,539	45,868	0,1981	2193,5	50,0	5,0226	0,1241
9,75	7410	100756,5	179,21	181,579	433,645	45,935	0,1933	2243,3	49,8	5,1466	0,1240
10,00	7600	103340,0	180,31	182,719	432,775	46,001	0,1887	2293,0	49,7	5,2704	0,1238
10,25	7790	105923,5	181,38	183,828	431,928	46,064	0,1844	2342,5	49,5	5,3941	0,1237
10,50	7980	108507,0	182,44	184,927	431,090	46,127	0,1802	2391,7	49,2	5,5174	0,1233
10,75	8170	111090,5	183,48	186,005	430,267	46,189	0,1763	2440,7	49,0	5,6405	0,1231
11,00	8360	113674,0	184,50	187,065	429,460	46,247	0,1725	2489,5	48,8	5,7636	0,1231
11,25	8550	116257,5	185,51	188,113	428,661	46,306	0,1689	2538,2	48,7	5,8864	0,1228
11,50	8740	118841,0	186,49	189,131	427,886	46,362	0,1654	2586,8	48,6	6,0092	0,1228
11,75	8930	121424,5	187,46	190,139	427,119	46,417	0,1621	2635,2	48,4	6,1318	0,1226
12,00	9120	124008,0	188,41	191,126	426,368	46,471	0,1589	2683,4	48,2	6,2543	0,1225
12,25	9310	126591,5	189,35	192,104	425,624	46,524	0,1558	2731,4	48,0	6,3765	0,1222
12,50	9500	129175,0	190,27	193,060	424,896	46,576	0,1529	2779,3	47,9	6,4986	0,1221
12,75	9690	131758,5	191,18	194,007	424,177	46,626	0,1500	2827,0	47,7	6,6206	0,1220
13,00	9880	134342,0	192,08	194,944	423,465	46,676	0,1473	2874,5	47,5	6,7424	0,1218
13,25	10070	136925,5	192,96	195,860	422,769	46,724	0,1447	2922,0	47,5	6,8642	0,1218
13,50	10260	139509,0	193,83	196,766	422,080	46,772	0,1421	2969,3	47,3	6,9857	0,1215
13,75	10450	142092,5	194,69	197,662	421,400	46,818	0,1397	3016,5	47,2	7,1072	0,1215
14,00	10640	144676,0	195,53	198,537	420,736	46,864	0,1373	3063,4	46,9	7,2283	0,1211

Paris. — Imp. de GAUTHIER-VILLARS, rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.


LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA



U. C. BERKELEY LIBRARIES
C061339701
LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA
THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA
LET THERE BE LIGHT
1868

